1
LIVRO

6
AULA

# Teoria da Demonstração

**META:**

Introduzir os procedimentos lógicos para uma demonstração matemática.

**OBJETIVOS:**

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Diferenciar de um teorema a hipótese e a tese;

Aplicar as técnicas de demonstração na prova de teoremas.

**PRÉ-REQUISITOS**

Aula-05 os conhecimentos de sistemas axiomáticos.

## 6.1 Introdução

Nas aulas anteriores, estabelecemos a linguagem da lógica de predicados em seu aspecto sintático, conhecida também por lógica de primeira espécie. Estudamos também, como determinar a semântica de uma proposição molecular. Fizemos um breve passeio entre as regras de equivalência e das regras de inferência. Em nossa aula anterior estudamos os Sistemas Axiiomáticos e suas propriedades. Na aula de hoje, estudaremos e exemplificaremos algumas Técnicas de Demonstração e veremos como isolar de um teorema a hipótese e a tese.

## 6.2 Teoria da Demonstração

David Hilbert (Königsberg, 23/01/1862 - Göttingen, 14/02/1943). Consolidou a Teoria dos Invariantes; axiomatizou de forma consistente a Geometria Euclidiana e criou os Espaços de Hilbert.

A teoria da demonstração é uma subdivisão da Lógica Matemática que encara as demonstrações como um objeto formal da Matemática. Uma demonstração pode, por exemplo, ser vista como uma estrutura de dados conhecida como *estrutura de árvore*, sujeita a certos axiomas. A teoria da demonstração é um subproduto do esforço dos formalistas em sua pretensão de formalizar a Matemática como uma teoria axiomática, em que sua consistência fosse provada. Kurt Göedel, entretanto, deu um banho de água fria nesta pretensão quando provou que um sistema axiomático se é consistente não é completo e portanto, nem todas as proposições válidas poderão ser provadas. Entretanto, a teoria da demonstração serve como guia para Matemáticos como uma base para orientar as demonstrações nas diversas áreas da Matemática. Começaremos por expor os axiomas propostos por David Hilbert para sua *Teoria da Demonstração*:

**A1** Axioma da identidade

$$\forall x, x = x$$

**A2** Axioma da substituição

$$\forall P((x = y \wedge P(x)) \rightarrow P(y)$$

**A3** Indução de uma hipótese

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

**A4** Omissão de uma hipótese

$$(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

**A5** Permutação de hipóteses

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$$

**A6** Eliminação de uma proposição

$$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \alpha) \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta))$$

**A7** Axioma da não contradição

$$(\alpha \rightarrow \beta \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha$$

**A8** Axioma da dupla negação

$$\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$$

Em adição aos axiomas acima, são válidas as seguintes regras de inferência:

**I1** $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$

**I2** $\alpha \wedge \beta \vdash \beta$

**I3** $\alpha \vdash (\beta \rightarrow \alpha \wedge \beta)$

**I4** $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$

**I5** $\alpha \to \gamma, \beta \to \gamma \vdash (\alpha \vee \beta) \to \gamma$

Existem outas versões da teoria da demonstração com apenas cinco axiomas e uma regra de inferência (Modus ponnes) porém, não é intenção esgotar o assunto nem extendê-lo mais que o necessário em um primeiro curso de Fundamentos de Matemática.

## 6.3 Tipos de Demonstração

Na teoria da demonstração de Hilbert, omitimos o axioma referente a demonstração por indução. Para esta forma de demonstração voltaremos a nossa atenção nas aulas referentes a números. Neste ponto veremos algumas das técnicas de demonstração seguida de alguns exemplos ilustrativos. Podemos classificar as diversas técnicas de demonstrações como:

### 6.3.1 Demonstração Direta

A demonstração direta consiste em, partindo das proposições $\alpha_1$, $\ldots, \alpha_n$ em um modelo $\mathfrak{M}$, usar as regras de inferência e as regras de equivalência até chegar na proposição $\beta$. Podemos representar esquematicamente por:
$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta$.
As proposições $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são ditas hipóteses ou premissas enquanto que a proposição $\beta$ é dita tese.

**OBS 6.1.** De modo geral em uma demonstração, para simplificar e encurtar ela, é necessário acrescentar ao conjunto de premissas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ alguns teoremas já provados e conhecidos no âmbito do modelo $\mathfrak{M}$. Este procedimento não se restringe à técnica da

Demonstração Direta e sim usa-lo como complemento à todas as técnicas aqui apresentadas.

### 6.3.2 Demonstração Indireta Contrapositiva

A demonstração indireta contrapositiva consiste em partir da premissa $\neg\beta$ em um modelo $\mathfrak{M}$ e usando as regras de inferência e as regras de equivalência chegar no argumento $\neg\alpha_1 \vee \ldots \vee \neg\alpha_n$. Em outras palavras consiste em provar a contra-positiva de $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$. Podemos representar esquematicamente por:
$\neg\beta \models \neg\alpha_1 \vee \ldots \vee \neg\alpha_n$.

### 6.3.3 Demonstração Indireta por Redução ao Absurdo

A demonstração indireta por redução ao absurdo em um modelo $\mathfrak{M}$ consiste em demonstrar, usando as regras de inferência e as regras de equivalência, que $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \wedge \neg\beta$ é uma contradição. Veremos agora, alguns exemplos de demonstrações para ilustrar as técnicas de demonstrações expostas acima. Mais exemplos poderão ser encontrados nos livros de Matemática. Demonstração é uma arte e as técnicas de demonstração são os instrumentos desta arte. Só a prática leva a uma desenvoltura em demonstrar teoremas. A intuição e principalmente a completa compreensão do enunciado dos teoremas e o domínio da Lógica Matemática são essenciais a uma demonstração.

**Exemplo 6.1.** Considerando o sistema axiomático 1 (**Aula-05**), provaremos, usando demonstração direta, o seguinte teorema:
$\forall a \in A, x \square a = x$

**PROVA:** $\forall a \in A$

| | |
|---|---|
| $(x\Box a) \bigcirc (x\Box a)^* = x$ | De A4 |
| $x \bigcirc x = x$ | De A3 fazendo $a \leftarrow x$ |
| $((x \bigcirc x)\Box a) \bigcirc (x\Box a)^* = x$ | Do axioma da substituição |
| $((x\Box a) \bigcirc (x\Box a)) \bigcirc (x\Box a)^* = x$ | De A6 |
| $(x\Box a) \bigcirc ((x\Box a) \bigcirc (x\Box a)^*) = x$ | De A2 |
| $(x\Box a) \bigcirc x = x$ | De A4 |
| $\forall a \in A, x\Box a = x$ | De A3 |

**Exemplo 6.2.** Provaremos , usando demonstração indireta por contra-positiva, o seguinte teorema:

$\forall n \in \mathbb{N} | n^2$ é par então $n$ é par.

**PROVA:** A forma contra-positiva do teorema é:

$\forall n \in \mathbb{N} | n$ não é par então $n^2$ não é par.

Que pode ser reescrita como:

$\forall n \in \mathbb{N} | n$ é ímpar então $n^2$ é ímpar.

| | |
|---|---|
| $n \in \mathbb{N}$ é ímpar | Premissa |
| $\exists k \in \mathbb{N} | n = 2k+1$ | Definição de número ímpar |
| $n^2 = n^2$ | Axima da identidade |
| $n^2 = (2k+1)^2$ | Axioma da substituição |
| $n^2 = (2k+1) \cdot (2k+1)$ | Definição de potência |
| $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ | Distri. e associ. em $\mathbb{N}$ |
| $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ | Distributividade em $\mathbb{N}$ |
| $\exists j \in \mathbb{N}, j = 2k^2 + 2k | n^2 = 2j + 1$ | Portanto $n^2$ é impar. |

Como exemplo, de uma demonstração indireta por redução ao absurdo veremos uma demonstração de unicidade. Demonstrações de unicidade seguem um padrão. Para demonstrar que só existe um $x$ que satisfaz a proposição $p(x)$, isto é $\exists! x | p(x)$, basta estabelecer a Hipótese Nula $\exists x_1, x_2, x_1 \neq x_2 | p(x_1) \wedge p(x_2)$ e mostrar que a mesma é uma contradição chegando que $x_1 = x_2$.

**Exemplo 6.3.** Considerando o sistema axiomático 1 (**Aula-05**), provaremos, usando demonstração indireta por redução ao absurdo, o seguinte teorema:

$\exists! x \in A | \forall a \in A, a \bigcirc x = a$

**PROVA:** Usaremos a seguinte Hipótese Nula:

**HN** $\exists x_1, x_2, x_1 \in A \neq x_2 | \forall a \in A, (a \bigcirc x_1 = a) \wedge (a \bigcirc x_2 = a)$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $a \bigcirc x_1 = a$ | Premissa |
| 2 | $x_2 \bigcirc x_1 = x_2$ | Fazendo em 1 $a \leftarrow x_2$ |
| 3 | $a \bigcirc x_2 = a$ | Premissa |
| 4 | $x_1 \bigcirc x_2 = x_1$ | Fazendo em 3 $a \leftarrow x_1$ |
| 5 | $x_2 \bigcirc x_1 = x_1$ | Usando em 4 o axioma A1 |
| 6 | $x_1 = x_2 \bigcirc x_1$ | Propriedade reflexiva da igualdade |
| 7 | $x_1 = x_2$ | De 2 e 6 e da transi. da igualdade |
| 8 | $x_1 \neq x_2$ | Premissa |
| 9 | $(x_1 = x_2) \wedge (x_1 \neq x_2)$ | Absurdo. |
| | **HN** é falsa e | $\exists! x \in A | \forall a \in A, a \bigcirc x = a$ |

Encerraremos por aqui o capítulo dedicado a Lógica Matemática. Muito mais poderia ser exposto, porém para um primeiro contato com os Fundamentos de Matemática, considero suficientes as idéias aqui expostas. Para um aprofundamento do conteúdo, aconselho dar uma olhada nas referências bibliográficas e consultar na INTERNET os sites indicados

## 6.4 Conclusão

Concluímos que, embora demonstrar um proposição em Matemática requera uma boa dose de experiência e inspiração, existem regras e técnicas que ajudam nesta tarefa.

## 6.5 Resumo

Começamos por expor, em uma forma simplificada, sem o axioma da indução, a Teoria da Demonstração do Matemático alemão David Hilbert, composta dos seguintes axiomas:

**A1** Axioma da identidade

$\forall x, x = x$

**A2** Axioma da substituição

$\forall P((x = y \wedge P(x)) \rightarrow P(y)$

**A3** Indução de uma hipótese

$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

**A4** Omissão de uma hipótese

$(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

**A5** Permutação de hipóteses

$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$

**A6** Eliminação de uma proposição

$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \alpha) \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta))$

**A7** Axioma da não contradição

$(\alpha \rightarrow \beta \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha$

**A8** Axioma da dupla negação

$\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$

E das seguintes regras de inferência:

**I1** $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$

**I2** $\alpha \wedge \beta \vdash \beta$

**I3** $\alpha \vdash (\beta \rightarrow \alpha \wedge \beta)$

**I4** $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$

**I5** $\alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \gamma \vdash (\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma$

Quanto às Técnicas de Demonstração, resumimos desta forma:
**Demonstração Direta:** A demonstração direta consiste em, partindo das proposições $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ em um modelo $\mathfrak{M}$, usar as regras de inferência e as regras de equivalência até chegar na proposição $\beta$. Podemos representar esquematicamente por:
$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta$.

**Demonstração Indireta Contrapositiva:** A demonstração indireta contrapositiva consiste em partir da premissa $\neg\beta$ em um modelo $\mathfrak{M}$ e usando as regras de inferência e as regras de equivalência chegar no argumento $\neg\alpha_1 \vee \ldots \vee \neg\alpha_n$. Podemos representar esquematicamente por:
$\neg\beta \models \neg\alpha_1 \vee \ldots \vee \neg\alpha_n$.

**Demonstração Indireta por Redução ao Absurdo** A demonstração indireta por redução ao absurdo em um modelo $\mathfrak{M}$ consiste em demonstrar, usando as regras de inferência e as regras de equivalência, que $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \wedge \neg\beta$ é uma contradição.

## 6.6 Atividades

**ATIV. 6.1.** Prove que $\forall n \in \mathbb{N}$. Se $n$ é par então $n^2$ é par.
**Comentário:** Reveja no texto o **exemplo 6.2**.

**ATIV. 6.2.** Considere o sistema axiomático 1 (**Aula-05**)e prove por redução ao absurdo que: $\forall a \in A, \exists! \overline{a} | a \bigcirc \overline{a} = x$.

**Comentário:** Reveja no texto o **exemplo 6.3**.

## 6.7 Referências Bibliográficas

MORTARI, Cezar Augusto. Introdução à Lógica. Editora UNESP. São Paulo. 2001.

GASPAR, Marisa. Introdução à Lógica Matemática. Disponível em: http:// mjgaspar.sites.uol.com.br/logica/logica. Acessado em 13/01/2007

ABAR, Celina. Noções de Lógica Matemática. Disponível em: http://www. pucsp.br/~logica/. Acessado em 13/01/2007