1
LIVRO

7
AULA

Teoria de Cantor e Teoria de Zermelo -Fraenkel

META:

Apresentar conjuntos segundo a ótica da teoria de Georg Cantor e da teoria de Zermelo-Fraenkel.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Reconhecer os axiomas da teoria dos conjuntos de Cantor;

Reconhecer os axiomas da teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel.

PRÉ-REQUISITOS

Aula-05 os conhecimentos de sistemas axiomáticos.

7.1 Introdução

A Matemática tem como motivação problemas oriundos da Física, da Engenharia, recentemente da Biologia e muitas outras áreas do conhecimento, sendo usada como uma linguagem universal e de ferramenta de lógica. Alguns matemáticos têm sua motivação na inspiração da própria Matemática resultando algumas das maiores realizações do intelecto humano como a Teoria dos Conjuntos. "Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nos". David Hilbert, com esta frase, sintetiza o que a teoria dos conjuntos representa atualmente para a Matemática, em seus fundamentos.
Nosso objetivo nesta aula é apresentar de forma axiomática a Teoria dos Conjuntos. Embora o conteúdo de Matemática do Ensino Fundamental inclua uma parte dos conceitos da Teoria dos Conjuntos, este não é, nem deveria ser ensinado de forma axiomática e desta forma passa uma visão deformada de sua importância.

7.2 Teoria dos Conjuntos de Georg Cantor

Na geometria euclidiana clássica existem conjuntos de axiomas antigos, mas que são inadequados pelos padrões atuais da Matemática. Podemos até questionar se Euclides estava tentando dar um conjunto de axiomas no sentido moderno do termo ou se estava apenas anotando algumas proposições que iria usar sem demonstrar por conveniência do momento.
A teoria axiomática dos conjuntos foi concebida, inicialmente, por Georg Cantor, tornan-se assim seu principal mentor. Outras versões da teoria dos conjuntos podem ser encontradas, cada qual com

suas virtudes e defeitos.

7.2.1 Conceito de Conjunto

Em sua teoria dos conjuntos, Georg Cantor definiu conjunto da seguinte forma:

Definição 7.1. Conjunto é qualquer coleção de objetos bem definidos.

OBS 7.1. Aqui, não há qualquer restrição ao termo **coleção de objetos** podendo ser de qualquer natureza, matrizes, polinômios pessoas, carros, outros conjuntos etc. Os objetos são denominados elementos do conjunto ou membros do conjunto. Se um dado objeto é elemento de um conjunto, dizemos que ele pertence ao conjunto.

OBS 7.2. Em teorias axiomáticas mais elaboradas (não foi o caso de Cantor, pois sua teoria dos conjuntos é conhecida também como "Teoria Ingênua dos Conjuntos") conjunto e elemento são termos primitivos e, portanto sem definição. Neste ponto em particular, a teoria dos conjuntos de Georg Cantor sofre do mesmo defeito que a Geometria Euclidiana. Euclides definiu ponto , reta e plano sem considerar nenhum termo primitivo isto é, sem definição. Aqui, em uma análise, mesmo que superficial, vemos que os termos coleção e conjuntos são na verdade sinônimos.

7.2.2 Linguagem da Teoria dos Conjuntos

Definição 7.2. A linguagem da Teoria dos Conjuntos é constituída de:

- **VARIÁVEIS PROPOSICIONAIS:** Letras latinas minúsculas $x, y, x, ...$ possivelmente indexadas, para indicar objetos conjuntos ou elementos. Letras latinas maiúsculas A, B, $C, ...$ possivelmente indexadas, para indicar conjuntos e letras gregas minúsculas $\alpha, \beta, \gamma, ...$ possivelmente indexadas, para representar proposições.

- **OPERADORES:** A linguagem da Teoria dos Conjuntos de Cantor admite todos os operadores lógicos, $\neg$ negação, $\wedge$ conjunção, $\vee$ disjunção, $\rightarrow$ implicação e $\leftrightarrow$ dupla implicação.

- **QUANTIFICADORES:** A linguagem da Teoria dos Conjuntos de Cantor admite os quantificadores lógicos, $\forall$ para todo, quantificador universal e $\exists$ existe, quantificador existencial.

- **OPERADOR DE ESPECIFICAÇÂO:** A linguagem da Teoria dos Conjuntos de Cantor admite também um operador especial de especificação $Set(A)$ para indicar que A é um conjunto.

- **PREDICATIVOS BINÁRIOS:** A linguagem da Teoria dos Conjuntos de Cantor admite os símbolos predicativos binários $=$ igual para igualdade e $\in$ relação de pertinência.

- **SÍMBOLOS ADICIONAIS:** A linguagem da Teoria dos Conjuntos de Cantor admite os seguintes símbolos adicionais (abre parêntesis,) fecha parêntesis, { abre chave e } fecha chave.

OBS 7.3. Na notação de Cantor $\forall x, \exists y(Set(y)x \in Y)$ presenta na moderna Teoria dos Conjuntos $\forall x, \exists y | \, x \in y$.

7.2.3 Axiomas da Teoria dos Conjuntos

Georg Cantor formulou sua Teoria dos Conjuntos baseada em apenas dois axiomas, o segundo dos quais é tão abrangente que motivou uma série de paradoxos.

Axioma 1 Extensionalidade:

$$\forall a, \forall b, Set(a), Set(b)(\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b) \leftrightarrow a = b)$$

OBS 7.4. Uma conseqüência deste axioma é que um conjunto fica unicamente determinado pelos seus elementos. Deste modo os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 1, 3\}$ são iguais, a ordem em que os elementos são listados no conjunto é irrelevante. Os conjuntos $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{a, a, a, b, b, b, c\}$ são iguais, a repetição de elementos é irrelevante.

Axioma 2 Compreensão:

$$\forall \pi, \exists a, Set(a)(\forall x, x \in a \leftrightarrow \pi(x))$$

OBS 7.5. O axioma da compreensão é também conhecido como axioma da fundação. Tem um alcance muito grande ao garantir que toda função proposicional $\pi(x)$ gera um conjunto. Denotamos A o conjunto gerado por π na forma: $A = \{x | \, \pi(x)\}$.

OBS 7.6. Os axiomas da extensionalidade e da compreensão juntos implicam em que proposições diferentes podem gerar o mesmo conjunto. Considere como exemplo as seguintes proposições:
$\pi_1 \equiv (x^2 - 3x + 2 = 0)$ e $\pi_2 \equiv (x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0)$ efetuando o cálculo das raízes teremos:
$A = \{x | \, \pi_1(x)\} = \{1, 2\}$ e $B\{x | \, \pi_2(x)\} = \{1, 2\}$ que são conjuntos iguais, embora as proposições $\pi_1 \neq \pi_2$ sejam diferentes.

7.2.4 Alguns Tipos de Conjuntos

Conjuntos Unitários: Comjunto formado por um só elemento. $\forall x, \exists A(\forall y(y \in A \leftrightarrow y = x))$.

OBS 7.7. $A = \{x|, \pi(x)\}$ e escolhemos usando o Axioma da Compreensão $\pi(x) \Leftrightarrow (y = x)$. Representamos também por $A = \{x\}$.

Conjunto Vazio: Conjunto que não possui elementos $\exists \phi(\forall x, x \notin \phi)$

OBS 7.8. $\phi = \{x|\, \pi(x)\}$ e escolhemos usando o Axioma da Compreensão $\pi(x) \equiv \neg(x = x)$ ou qualquer contradição. Representamos também por $\phi = \{\}$.

7.3 Paradoxo de Russel

Em 1901, Bertrand Russell tomou conhecimento do trabalho desenvolvido por Gottlob Frege em "Grundgesetze der Arithmetik". Mas apenas em 1902, teve oportunidade de analisá-lo detalhadamente e de "fazer um estudo mais rigoroso". Nesta obra, Frege tentava reduzir a aritmética à lógica. Ao analisá-la, Russell descobre uma contradição no sistema proposto. Esta contradição viria a ser conhecida como " *Paradoxo de Russell*".
Em sua versão popular o "*Paradoxo de Russell*", pode ser enunciado da seguinte maneira:
Há em Sevilha um barbeiro que reúne as duas condições seguintes:

- Faz a barba de todas as pessoas de Sevilha que não fazem a barba a si próprias.

- Só faz a barba a quem não faz a barba a si próprio.

O paradoxo surge quando tentamos saber se o barbeiro faz a barba a si próprio ou não. Se fizer a barba a si próprio, não pode fazer a barba a si próprio, para não violar a segunda condição; mas se não fizer a barba a si próprio, então tem de fazer a barba a si próprio, pois essa é a primeira condição. Em sua versão moderna e matemática o Paradoxo de Russell", pode ser enunciado da seguinte maneira: seja y o conjunto de todos os conjuntos que não são membros de si próprio, isto é, $y = \{x|\, x \notin x\}$. Pode-se mostrar que: $y \in y \leftrightarrow y \notin y$ e isto é uma contradição.

OBS 7.9. Primeiramente teremos para o conjunto de Russell $y = \{x|\, \pi(x)\}, \pi(x) \equiv (x \notin x)$

Para mostrar o "Paradoxo de Russell", tomaremos o seguinte estudo de casos: ou y é um elemento de y ou y não é um elemento de y isto é $y \in y \vee y \notin y$

a) caso $y \in y$ temos que:

$y \in y \leftrightarrow \pi(y)$. Da definição de π temos:

$\pi(y) \leftrightarrow y \notin y$. Logo:

$y \in y \leftrightarrow y \notin y$, que é uma contradição Por outro lado.

b) caso $y \notin y$ temos que:

$y \notin y \leftrightarrow \neg\pi(y)$. Da definição de π temos:

$\neg\pi(y) \leftrightarrow \neg(y \notin y) \leftrightarrow y \in y$. Logo:

$y \notin y \leftrightarrow y \in y$, que também é uma contradição. Logo os dois possíveis casos levam a contradições e portanto, o conjunto de Russel é paradoxal. $\square$

OBS 7.10. O paradoxo de Russel ocorre porque o axioma da extencionalidade não impõe qualquer restrição à construção de conjuntos. E noções como "*o conjunto de todos os conjuntos*", (conjunto universal) e de "*o conjunto dos conjuntos que não são* *elementos de si mesmos*", podem ser aceitas no âmbito da teoria dos conjuntos de Cantor. Para corrigir este defeito, vários matemáticos reformularam a teoria dos conjuntos, propondo axiomas alternativos. Entre todas as proposta a que mais se destacou foi a "Teoria dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel", dois matemáticos alemães Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo e Adolf Abraham Halevi Fraenkel, que veremos logo em seguida.

7.4 Teoria dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel

Zermelo nasceu em Berlim, 27/07/1871 e morreu em Friburgo, 21/05/1953 foi um matemático e filósofo alemão. Formulou uma teoria axiomática dos conjuntos que levou seu nome. Wikipedia

Fraenkel nasceu em Munique, 17/02/1891 e morreu em Jerusalém, 15/10/1965 foi um matemático judeu nascido e criado na Alemanha. Em 1922, melhorou o sistema axiomático criado por Ernst Zermelo. Wikipedia

A teoria axiomática dos conjuntos foi concebida inicialmente por George Cantor, tornam-se assim seu principal mentor. Outras versões da teoria dos conjuntos podem ser encontradas, cada qual com suas virtudes e defeitos. Aqui, procuraremos dar uma visão geral da formulação de Ernst Zermelo e Abraham Fraenkel conhecida como Teoria de Zermelo-Fraenkel **ZF**.

Na formulação de Zermelo-Fraenkel, os termos primitivos são "conjunto" representados por letras latinas maiúsculas $A, B, C, ...$, "elementos", qualquer objeto de domínio, representados por letras latinas minúsculas ou maiúsculas, já que um conjunto pode ser elemento de outro conjunto, e "pertence", uma relação entre elementos e conjuntos representada pelo símbolo $\in$ onde: $x \in A$ lê-se "o elemento x pertence ao conjunto A".

A linguagem da teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel é basicamente a mesma da teoria dos conjuntos de Cantor, na qual é retirado o operador de especificação.

Quanto aos axiomas, a teoria **ZF** listaremos os nove abaixo:

Começaremos pelo primeiro axioma, **Axioma da Existência do Conjunto Vazio**, que é equivalente a definição do conjunto vazio, um conjunto ao qual nenhum elemento pertence. Visa garantir a existência do conjunto vazio.

A01 $\exists\phi|\forall x, \neg(x \in \phi)$

O segundo axioma é o **Axioma da Extensionalidade** que equivale a definição de igualdade entre conjuntos.

A02 $\forall A, \forall B(\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \leftrightarrow A = b)$

OBS 7.11. Como na teoria dos conjuntos de Cantor, o Axioma da Extensionalidade nos diz que um conjunto fica unicamente definido pelos seus elementos. O axioma diz que dados dois conjuntos, eles são iguais se possuem os mesmos elementos.

O terceiro, axioma, a pedra de toque da axiomática de Zermelo-Fraenkel, é o **Axioma da Separação**:

A03 $\forall A, \forall\pi, \exists B(\forall x(x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \pi(x))))$

OBS 7.12. Aqui π é uma fórmula da linguagem, na qual a variável x não ocorre livre. Este esquema de axiomas (um para cada fórmula π) diz-nos que dado um conjunto A e uma fórmula π, é possível separar os elementos de A em dois conjuntos - no conjunto dos elementos de A que satisfazem π e no conjunto dos elementos de A que não satisfazem π. Na verdade, este axioma não é um axioma e sim um "esquema de axiomas" pois, depende de cada fórmula π da linguagem.

O quarto axioma, **Axioma da Formação de Pares** nos permite, dados dois conjuntos, formar um conjunto que possui como elementos esses dois conjuntos.

A04 $\forall A, \forall B, \exists C(\forall x(x \in C \rightarrow (x = A \vee x = B)))$

OBS 7.13. Isto diz, que para todo par de conjuntos A e B existe um conjunto C que contem A e B e nenhum outro elemento. Formalmente $C = \{A, B\}$.

O quinto axioma, **Axioma da União**. Dado um conjunto A de conjuntos, a união dos elementos de A é um conjunto. O axioma da união permite construir um conjunto com elementos de outros conjuntos.

A05 $\forall A, \exists B(\forall x(x \in B \leftrightarrow \exists C(C \in A \wedge x \in C)))$

OBS 7.14. Isto diz, que dado um conjunto A existe um conjunto B que é a união de todos os elementos dos conjuntos que são elementos de A. Isto é, para todo x que pertence a B deve existir um C pertencente a A tal que x pertence a C. Do axioma da extensionalidade o conjunto B é único e denotamos $B = \cup(A)$.

OBS 7.15. Para melhor compreensão veja os seguintes exemplos:

- Se $A = \{a, \{b, c\}, d, \{e, f, g\}\}\}$ então $B = \cup(A) = \{b, c, e, f, g\}$. Pois $\{b, c\}$ e $\{e, f, g\}$ são elementos de A.
- Se $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ então $B = \phi$. Pois, A não tem conjuntos como elementos.

Definiremos agora uma operação entre conjuntos denominada união, pois a usaremos no estabelecimento do sexto axioma.

Definição 7.3. Sejam A e B conjuntos. Definimos a união de A e B , denotada $A \cup B$, por:
$\forall A, \forall B(\forall x((x \in A \vee x \in B) \leftrightarrow x \in A \cup b))$.

OBS 7.16. Podemos definir alternativamente como $A \cup B = \cup(\{A, B\})$.

O sexto axioma, **Axioma do Infinito**, garante a existência de um conjunto infinito.

A06 $\exists A(\phi \in A \wedge (\forall x(x \in A \rightarrow (x \cup \{x\} \in A))))$

OBS 7.17. Embutido no Axioma do Infinito está a definição dos números naturais, que são definidos axiomaticamente como um conjunto $\mathbb{N}$, tal que, contém um elemento 0 e que se n pertence a $\mathbb{N}$ então seu sucessor $n + 1$ também pertence a $\mathbb{N}$. Neste caso, associamos 0 ao conjunto vazio ϕ e definimos a função "*sucessor*" por: se n está associado a x então $n + 1$ está associado a $x \cup \{x\}$.

Definiremos agora uma relação entre dois conjuntos denominada contido, pois a usaremos no estabelecimento do sétimo axioma.

Definição 7.4. Dados dois conjuntos A e B, dizemos que A está contido em B, denotado $A \subset B$ da seguinte forma:
$\forall A, \forall B(\forall x((x \in A \rightarrow x \in B) \leftrightarrow A \subset B))$.

O sétimo axioma, **Axioma da Potenciação**, garante a existência do conjunto das partes de um conjunto.

A07 $\forall A, \exists B(\forall C(C \subset A \rightarrow C \in B))$.

OBS 7.18. Do axioma da extensionalidade o conjunto é único e denotamos $B = \mathscr{P}(A)$.

OBS 7.19. Se $A = \{a, b, c\}$ o conjunto das partes de A é dado por $B = \mathscr{P}(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

O oitavo axioma, **Axioma da Substituição**, este também é um "*esquema de axiomas*".

A08 $\forall A, \forall \pi((\forall x(\pi(x, y) = \pi(x, z) \rightarrow y = z) \rightarrow \exists B(\forall x \in A, \exists y \in B \wedge \pi(x, y)))$.

OBS 7.20. Em outras palavras, dada uma proposição π binária tal que, $\forall x(\pi(x,y) = \pi(x,z) \rightarrow y = z)$ isto é, a proposição define uma função cujo domínio é o conjunto A, então a imagem do conjunto A pela função definida por π também é um conjunto denominado de imagem de A pela função π. O axioma da extensionalidade garante a unicidade do conjunto imagem.

O nono axioma, **Axioma da Fundação**, também conhecido como **Axioma da Regularidade**, diz que para todo conjunto A não vazio existe um elemento x disjunto de A.

A09 $\forall A(\exists x(x \in A) \rightarrow \exists B(B \in A \wedge \neg\exists z(z \in A \wedge z \in B)))$.

OBS 7.21. Este axioma diz, que um conjunto não pode ter ele mesmo como único elemento isto é, o conjunto $A = \{A\}$ não é um conjunto na axiomática de Zermelo-Fraenkel. Entretanto o conjunto $A = \{\{b\}, A\}$ parece a princípio que não é descartado pelo axioma da fundação pois, tem dois elemento $\{b\}$ e A. Como $\{b\} \cap A = \phi$, já que o único elemento de $\{b\}$ é b e b não é elemento de A, o axioma parece a princípio satisfeito. Porém, o axioma da formação de pares descarta qualquer conjunto que tenha ele mesmo como elemento. Acompanhe o raciocínio: do axioma da formação de pares para todo par de conjuntos A e B existe um conjunto C, único pelo axioma da extencionalidade tal que $C = \{A, B\}$. Em particular podemos tomar $B = A$. Logo $C = \{A, A\} = \{A\}$. Daí se admitirmos $A = \{\{b\}, A\}$ teremos que, como o único elemento de C é A como A é também elemento de A teremos $C \cap A \neq \phi$, o que contraria o axioma da fundação. Desta forma, qualquer conjunto que contenha a si mesmo como elemento é descartado.

Em adição a estes nove axiomas, podemos acrescentar um décimo axioma denominado **Axioma da Escolha**, polêmico, pois não possui um caráter construtivista. E a nova teoria dos conjunto é denominada Teoria dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel com Axioma da Escolha ou simplesmente **ZFC**.

A10 $\forall \{A_s\}_{s \in S}((\forall s \in S, A_s \neq \phi) \rightarrow \exists B(\forall s \in S, \exists! y(y \in A_s \wedge y \in B)))$

OBS 7.22. A unicidade exigida de cada elemento de A_s na construção do conjunto B permite construir uma função, denominada função escolha do conjunto de todos os A_s.

Existem outras formas de enunciar o Axioma da Escolha . Porém, este, na minha opinião, é o mais adequado ou nosso texto.

OBS 7.23. Toda a matemática que escrevemos está calcada no axioma da fundação. Esse axioma, em outra formulação, nos conta que todo conjunto foi recursivamente construído a partir dos axiomas **ZFC**, isto é, todo conjunto tem uma partícula mínima. Vejamos: $\exists x(x \in A)$ é equivalente a dizer que A não é vazio. Nesse caso, existe um elemento B de A cuja interseção com A é vazia. Em resumo, não podemos fazer conjuntos sem um "*tijolo*" inicial.

Por hoje é só. Em nossa próxima aula, veremos algumas operações sobre conjuntos.

7.5 Conclusão

Caro aluno, uma teoria dos conjuntos bem fundamentada e isenta de paradoxos é fundamental para o desenvolvimento da Matemática. Portanto, a teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel é a linguagem usada pela maioria dos matemáticos na construção de novas teorias.

7.6 Resumo

Os axiomas para a Teoria dos Conjuntos de Cantor são:

A01 Extensionalidade

$\forall a, \forall b, Set(a), Set(b)(\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b) \leftrightarrow a = b)$

A02 Compreensão

$\forall \pi, \exists a, Set(a)(\forall x, x \in a \leftrightarrow \pi(x))$

E os axiomas para a Teoria dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel são:

A01 Existência do Conjunto Vazio

$\exists \phi | \forall x, \neg(x \in \phi)$

A02 Extensionalidade

$\forall A, \forall B(\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \leftrightarrow A = b)$

A03 Separação

$\forall A, \forall \pi, \exists B(\forall x(x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \pi(x))))$

A04 Formação de Pares

$\forall A, \forall B, \exists C(\forall x(x \in C \rightarrow (x = A \vee x = B)))$

A05 União

$\forall A, \exists B(\forall x(x \in B \leftrightarrow \exists C(C \in A \wedge x \in C)))$

A06 Infinito

$\exists A(\phi \in A \wedge (\forall x(x \in A \rightarrow (x \cup \{x\} \in A))))$

A07 Potenciação

$\forall A, \exists B(\forall C(C \subset A \rightarrow C \in B))$.

A08 Substituição

$\forall A, \forall \pi((\forall x(\pi(x, y) = \pi(x, z) \rightarrow y = z) \rightarrow \exists B(\forall x \in A, \exists y \in B \wedge \pi(x, y)))$.

A09 Fundação

$\forall A(\exists x(x \in A) \rightarrow \exists B(B \in A \wedge \neg \exists z(z \in A \wedge z \in B)))$.

A10 Escolha

$\forall\{A_s\}_{s\in S}((\forall s \in S, A_s \neq \phi) \rightarrow \exists B(\forall s \in S, \exists! y(y \in A_s \wedge y \in B)))$

7.7 Atividades

ATIV. 7.1. Considere os axiomas da teoria **ZF** e prove a existência de um conjunto unitário.

Comentário: Use o axioma da existência do conjunto vazio como base para a demonstração.

ATIV. 7.2. Considere os axiomas da teoria **ZF** e prove a existência do conjunto $\{\phi, \{\phi\}\}$.

Comentário: Use o exercício anterior como base para a demonstração.

7.8 Referências Bibliográficas

FERREIRA, Fernando.Teoria dos Conjuntos: Uma Vista, Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática 38: 29-47, 1998.

HALMOS, Paul Richard, Naive Set Theory, Springer-Verlag, 1974.

CASTRUCCI, Benedito. Elementos da Teoria de Conjuntos. São Paulo: GEEM, 1970.