1
LIVRO

8
AULA

Operações com Conjuntos: União e Interseção

META:

Introduzir algumas propriedades da união e da interseção de conjuntos.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Demonstrar propriedades envolvendo união de conjuntos;

Demonstrar propriedades envolvendo interseção de conjuntos.

PRÉ-REQUISITOS

Aula-04 e Aula-07 os conhecimentos das regras de inferência e das regras de equivalência e da teoria axiomática dos conjuntos.

8.1 Introdução

Na aula anterior, vimos duas teorias axiomáticas dos conjuntos. A primeira (Teoria dos Conjuntos de Cantor) que teve sua importância histórica por ser a primeira a lançar sementes para teorias mais elaboradas como a de Zermelo-Fraenkel. A segunda vista, com mais detalhes (Teoria dos Conjuntos de Zemelo-Fraenkel) corrigiu alguns dos defeitos da primeira e é hoje em dia a base dos Fundamentos da Matemática. Embora importante por si só, uma teoria axiomática é como uma criança cheia de potencial, mas que é preciso ser desenvolvida. Na aula de hoje, continuaremos por desenvolver a Teoria dos Conjuntos, definindo as operações de união e intersecção e provando algumas de suas propriedades.

8.2 União de Conjuntos

Começaremos nossa aula, definido união de conjuntos. Como o nome indica, a união de conjuntos é uma idéia intuitiva de criar um conjunto a partir de dois outros juntando todos os elementos de cada um dos dois conjuntos.

Definição 8.1. Sejam A e B dois conjuntos. Definimos a união de A com B, denotada $A \cup B$, por:
$\forall A, \forall B(\forall x(x \in A \vee x \in B) \leftrightarrow x \in A \cup B)$.

Antes de continuar com as propriedades da união de conjuntos, observaremos que a definição de igualdade entre conjuntos pode ser modificada do seguinte modo:
$\forall A, \forall B(\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \leftrightarrow A = b)$
Como $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ temos:

$\forall A, \forall B(\forall x((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)) \leftrightarrow A = b)$

Da definição de contido, temos:

$\forall A, \forall B((A \subset B) \wedge (B \subset A) \leftrightarrow A = b)$

Que é uma forma mais conveniente para demonstrações.

8.2.1 Propriedades da União de Conjuntos

Para a união de conjuntos listamos aqui, entre outras, as seguintes propriedades:

Sejam A, B e C conjuntos,valem então as seguintes propriedades:

- $\phi \cup A = A$
- $A \cup A = A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \subset A \cup B$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

8.3 Interseção de Conjuntos

Vamos começar esta secção, definindo interseção de conjuntos. Como o nome indica, a interseção de conjuntos é uma idéia intuitiva de criar um conjunto a partir de dois outros, juntando todos os elementos compartilhados pelos dois conjuntos.

Definição 8.2. Sejam A e B dois conjuntos, definimos a interseção de A com B, denotada $A \cap B$, por:

$\forall A, \forall B(\forall x(x \in A \wedge x \in B) \leftrightarrow x \in A \cap B)$.

OBS 8.1. Nem sempre dois conjuntos A e B compartilham elementos em comum, neste caso dizemos que os conjuntos são disjuntos e escrevemos $A \cap B = \emptyset$.

8.3.1 Propriedades da Interseção de Conjuntos

Para a interseção de conjuntos listamos aqui, entre outras, as seguintes propriedades:
Sejam A, B e C conjuntos. Valem então as seguintes propriedades:

- $\phi \cap A = \phi$
- $A \cap A = A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap B \subset A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

8.3.2 Propriedades da União e Interseção de Conjuntos

Para a união e interseção de conjuntos listamos aqui, entre outras, as seguintes propriedades:
Sejam A, B e C conjuntos. Valem então as seguintes propriedades:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Adicionalmente listaremos também algumas propriedades da relação de contido.

8.3.3 Propriedades da Relação de Contido

Para a relação de contido entre conjuntos listamos aqui, entre outras, as seguintes propriedades:
Sejam A, B e C conjuntos. Valem então as seguintes propriedades:

- $\phi \subset A$
- $A \subset A$
- $(A \subset B \wedge B \subset C) \to A \subset C$

8.4 Algumas Demonstrações

Nesta seção, vamos demonstrar algumas das propriedades vistas acima.
Vamos provar a primeira das propriedades da união e interseção. A saber:
Propriedade1: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
PROVA É suficiente mostrar que:
$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.
a) Primeiramente mostraremos que: $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$\forall x, x \in A \cap (B \cup C)$
Da definição de interseção de conjuntos:
$x \in A \wedge x \in (B \cup C)$
Da definição de união de conjuntos:
$x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$
Como $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ temos:
$(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$
Da definição de interseção de conjuntos:
$x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap B)$

Da definição de união de conjuntos:

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap B)$

Daí, teremos que:

$\forall x, x \in A \cap (B \cup C) \to x \in (A \cap B) \cup (A \cap B)$

Da definição de contido:

$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) Em seguida mostrarmos que: $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

$\forall x, x \in (A \cap B) \cup (A \cap B)$

Da definição de união de conjuntos:

$x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap B)$

Da definição de interseção de conjuntos:

$(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$

Como $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ temos:

$x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$

Da definição de união de conjuntos:

$x \in A \wedge x \in (B \cup C)$

Da definição de interseção de conjuntos:

$x \in A \cap (B \cup C)$

Daí, teremos que:

$\forall x, x \in (A \cap B) \cup (A \cap B) \to x \in A \cap (B \cup C)$

Da definição de contido:

$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

Das partes a) e b) teremos:

$(A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)) \wedge ((A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C))$

Portanto, da definição de igualdade de conjuntos temos:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\square$

Veremos agora mais uma demonstração de uma das propriedades da interseção. A saber:

Propriedade2: $A \cap B = B \cap A$

PROVA É suficiente mostrar que:

$A \cap B \subset B \cap A$ e que $B \cap A \subset A \cap B$.

a) Primeiramente mostraremos que: $A \cap B \subset B \cap A$

$\forall x, x \in A \cap B$

Da definição de interseção temos:

$x \in A \wedge x \in B$

Como $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$ temos:

$x \in B \wedge x \in A$

Da interseção de conjuntos temos:

$x \in B \cap A$

Daí, teremos que:

$\forall x, x \in A \cap B \rightarrow x \in B \cap A$

Da definição de contido:

$A \cap B \subset B \cap A$

b) Em seguida mostraremos que: $B \cap A \subset A \cap B$

$\forall x, x \in B \cap A$

Da definição de interseção temos:

$x \in B \wedge x \in A$

Como $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$ temos:

$x \in A \wedge x \in B$

Da interseção de conjuntos temos:

$x \in A \cap B$

Daí, teremos que:

$\forall x, x \in B \cap A \rightarrow x \in A \cap B$

Da definição de contido:

$B \cap A \subset A \cap A$

Das partes a) e b) teremos:

$(A \cap B \subset B \cap A) \wedge (B \cap A \subset A \cap A)$
Portanto, da definição de igualdade de conjuntos temos:
$A \cap B = B \cap A$ $\square$

Caro aluno, a nossa aula termina aqui, mas como você deve ter percebido o conteúdo abordado, devido ao seu aspecto técnico, exige uma dedicação maior. Na próxima aula, prosseguiremos vendo mais operações sobre conjuntos. Em particular detalharemos a diferença e o complementar.

8.5 Conclusão

Caro aluno, não é sufuciente ter uma teoria dos conjuntos livre de paradoxos. Precisamos completá-la com operações sobre conjuntos. Duas operações em especial, a união e a interseção de dois conjuntos, formam um terceiro reunindo todos os elementos de cada conjunto e separando os elementos que são comuns aos dois respectivamente.

8.6 Resumo

Sejam A, B e C conjuntos. Valem então as seguintes propriedades para a união de conjuntos:

- $\phi \cup A = A$
- $A \cup A = A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Sejam A, B e C conjuntos. Valem então as seguintes propriedades para a interseção de conjuntos:

- $\phi \cap A = \phi$
- $A \cap A = A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Sejam A, B e C conjuntos. Valem então as seguintes propriedades para a união e interseção de conjuntos:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Sejam A, B e C conjuntos. Valem então as seguintes propriedades para a relação de contido:

- $\phi \subset A$
- $A \subset A$
- $A \subset B \wedge B \subset C) \rightarrow A \subset C$

8.7 Atividades

Deixamos como atividades a demonstração de alguma das propriedades acima.

ATIV. 8.1. Sejam A e B conjuntos. Mostre que:

- $\phi \cup A = A$
- $A \cup A = A$

Comentário: Reveja a seção: Algumas Demonstrações.

ATIV. 8.2. Sejam A e B conjuntos. Mostre que:

- $\phi \subset A$
- $A \subset B \wedge B \subset C) \rightarrow A \subset C$

Comentário: Reveja a seção: Algumas Demonstrações.

8.8 Referências Bibliográficas

FERREIRA, Fernando.Teoria dos Conjuntos: Uma Vista, Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática 38: 29-47, 1998.

HALMOS, Paul Richard, Naive Set Theory, Springer-Verlag, 1974.

CASTRUCCI, Benedito. Elementos da Teoria de Conjuntos. São Paulo: GEEM, 1970.