1
LIVRO

9
AULA

Operações com Conjuntos: Diferença e Complementar

META:

Apresentar algumas propriedades da diferença e do complementar de conjuntos.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Demonstrar propriedades envolvendo diferença entre conjuntos;

Demonstrar propriedades envolvendo complementar de conjuntos.

PRÉ-REQUISITOS

Aula-04 e Aula-07 os conhecimentos das regras de inferência e das regras de equivalência e da teoria axiomática dos conjuntos.

9.1 Introdução

Na aula anterior, vimos operações de união e intersecção entre dois conjuntos e algumas propriedades envolvendo as mesmas. Provamos duas delas e deixamos outras como atividades em sala de aula. Na aula de hoje, continuando o estudo das relações entre conjuntos veremos mais três operações entre conjuntos. A diferença entre conjuntos e uma operação semelhante denominada diferença simétrica e o complementar de um conjunto. Veremos também algumas das propriedades destas operações e finalizando, provaremos duas das propriedades.

9.2 Diferença de Conjuntos

Começaremos nossa aula, definindo a diferença de conjuntos. Como o nome indica, a diferença de conjuntos é uma idéia intuitiva de criar um conjunto a partir de dois outros, juntando todos os elementos de um conjunto que não está no outro conjunto.

Definição 9.1. Sejam A e B dois conjuntos. Definimos a diferença de A menos B, denotada $A\backslash B$, por:
$\forall A, \forall B(\forall x(x \in A \wedge x \notin B) \leftrightarrow x \in A\backslash B)$.

9.2.1 Propriedades da Diferença de Conjuntos

Para a diferença de conjuntos listamos aqui, entre outras, as seguintes propriedades:
Sejam A, B e C conjuntos. Valem então as seguintes propriedades:

- $A\backslash A = \phi$
- $A\backslash \phi = A$

- $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$
- $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$
- $(A \backslash B) \cup (A \cap B) = A$

9.3 Diferença Simétrica de Conjuntos

Começaremos definindo a diferença simétrica de conjuntos. Como o nome indica, a diferença de conjuntos não é uma idéia intuitiva. A idéia aqui é de criar um conjunto a partir de dois outros, juntando todos os elementos de um conjunto que não está no outro conjunto e vice-versa.

Definição 9.2. Sejam A e B dois conjuntos. Definimos a diferença simétrica de A e B, denotada $A\Delta B$, por:
$\forall A, \forall B(\forall x(x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)) \leftrightarrow x \in A\Delta B)$.

9.3.1 Propriedades da Diferença Simétrica de Conjuntos

Para a diferença simétrica de conjuntos listamos aqui, entre outras, as seguintes propriedades:
Sejam A, B e C conjuntos. Valem então as seguintes propriedades:

- $A\Delta A = \phi$
- $A\Delta\phi = A$
- $A\Delta B = B\Delta A$
- $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$
- $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$

9.4 Complementar de Conjuntos

Começaremos essa seção, definindo o complementar de um conjunto relativo a outro conjunto que o contém. Como o nome indica, o complementar de um conjunto relativo a outro conjunto que o contém é uma idéia intuitiva de criar um conjunto a partir de dois outros, juntando todos os elementos que pertençam ao primeiro conjunto e que falta ao segundo para completar o primeiro.

Definição 9.3. Sejam A e B dois conjuntos tais que $B \subset A$. Definimos o complementar de B relativo a A, denotado $\complement_A(B)$, por:
$\forall A, \forall B((B \subset A)\forall x(x \in A \wedge x \notin B) \leftrightarrow x \in \complement_A(B))$.

9.4.1 Propriedades do Complementar de Conjuntos

Para o complementar de conjuntos listamos aqui, entre outras, as seguintes propriedades:
Sejam A, B e C conjuntos tais que $B, C \subset A$. Valem então as seguintes propriedades:

- $\complement_A(A) = \phi$
- $\complement_A(\phi) = A$
- $\complement_A(\complement_A(B)) = B$
- $\complement_A(B \cup C) = \complement_A(B) \cap \complement_A(C)$
- $\complement_A(B \cap C) = \complement_A(B) \cup \complement_A(C)$

9.5 Algumas Demonstrações

Nesta seção, demonstraremos algumas das (mais precisamente duas) propriedades vistas acima.

Provaremos primeiramente a quarta das propriedades da diferença entre conjuntos. A saber:

Propriedade1: sejam A, B e C tais que, $B \subset A$ e $C \subset A$ então $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

PROVA É suficiente mostrar que:

$A \backslash (B \cup C) \subset (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$ e que $(A \backslash B) \cap (A \backslash C) \subset A \backslash (B \cup C)$

a) Primeiramente mostraremos que: $A \backslash (B \cup C) \subset (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

$\forall x, x \in (A \backslash (B \cup C))$

Da definição de diferença entre conjuntos temos:

$(x \in A) \wedge x \notin (B \cup C)$

Ou de outra forma:

$(x \in A) \wedge \neg(x \in (B \cup C))$

Da definição de união de conjuntos temos:

$(x \in A) \wedge \neg(x \in B \vee x \in C)$

Da lei de De Morgan $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$ temos:

$(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \wedge \neg(x \in C)$

De outro modo:

$(x \in A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \notin C)$

Como $\alpha \equiv \alpha \wedge \alpha$ temos:

$(x \in A) \wedge (x \in A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \notin C)$

Rearrumando temos:

$((x \in A) \wedge (x \notin B)) \wedge ((x \in A) \wedge (x \notin C))$

Da definição de diferença de conjuntos temos:

$x \in (A \backslash B) \wedge x \in (A \backslash C)$

Da definição de interseção de conjuntos temos:

$x \in (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

Daí,

$\forall x, x \in (A \backslash (B \cup C)) \to x \in (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

Da definição de contido temos:

$A \backslash (B \cup C) \subset (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

b) Em seguida, mostrarmos que: $(A \backslash B) \cap (A \backslash C) \subset A \backslash (B \cup C)$

$\forall x, x \in (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

Da definição de interseção de conjuntos:

$x \in (A \backslash B) \wedge x \in (A \backslash C)$

Da definição de diferença de conjuntos:

$((x \in A) \wedge (x \notin B)) \wedge ((x \in A) \wedge (x \notin C))$

Reagrupando temos:

$(x \in A) \wedge (x \in A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \notin C)$

Como $\alpha \equiv \alpha \wedge \alpha$ temos:

$(x \in A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \notin C)$

De outro modo:

$(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \wedge \neg(x \in C)$

Da lei de De Morgan $\neg(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta$ temos:

$(x \in A) \wedge \neg(x \in B \vee x \in C)$

Da definição de união de conjuntos temos:

$(x \in A) \wedge \neg(x \in (B \cup C))$

De outra forma:

$(x \in A) \wedge x \notin (B \cup C)$

Da definição de diferença de conjuntos temos:

$x \in (A \backslash (B \cup C))$

Daí,

$\forall x, x \in (A \backslash B) \cap (A \backslash C) \to x \in (A \backslash (B \cup C))$

Da definição de contido: $(A\backslash B) \cap (A\backslash C) \subset A\backslash(B \cup C)$

Das partes a) e b) temos:

$(A\backslash(B \cup C) \subset (A\backslash B) \cap (A\backslash C)) \wedge ((A\backslash B) \cap (A\backslash C) \subset A\backslash(B \cup C))$

Portanto, da definição de igualdade de conjuntos temos:

$A\backslash(B \cup C) = (A\backslash B) \cap (A\backslash C)$ $\square$

Veremos agora mais uma demonstração de uma das propriedades do complementar. A saber:

Propriedade2: $\complement_A(\complement_A(B)) = B$

PROVA É suficiente mostrar que:

$\complement_A(\complement_A(B)) \subset B$ e que $B \subset \complement_A(\complement_A(B))$

a) Primeiramente mostraremos que: $\complement_A(\complement_A(B)) \subset B$

$\forall x, x \in \complement_A(\complement_A(B))$

Da definição de complementar temos:

$x \in A \wedge x \notin \complement_A(B)$

De outro modo:

$x \in A \wedge \neg(x \in \complement_A(B))$

Da definição de complementar temos:

$x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge x \notin B)$

De outro modo:

$x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge \neg(x \in B))$

Da lei de De Morgan $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$ temos:

$x \in A \wedge (\neg(x \in A) \vee \neg\neg(x \in B))$

Como $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$ temos:

$x \in A \wedge (\neg(x \in A) \vee x \in B)$

Como $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ temos:

$(x \in A \wedge \neg(x \in A)) \vee (x \in A \wedge x \in B)$

Como $\perp \equiv (x \in A \wedge \neg(x \in A))$ temos:

$\perp \vee (x \in A \wedge x \in B)$

Como $\perp \vee \alpha \equiv \alpha$ temos:

$x \in A \wedge x \in B$

Como $B \subset A$ então $x \in A \wedge x \in B \rightarrow x \in B$. Logo:

$x \in B$

Daí, temos:

$\forall x, x \in \complement_A(\complement_A(B)) \rightarrow x \in B$

Da definição de contido:

$\complement_A(\complement_A(B)) \subset B$

b) Em seguida, mostrarmos que: $B \subset \complement_A(\complement_A(B))$

$\forall x, x \in B$

Como $B \subset A$, $x \in B \rightarrow x \in A \wedge x \in B$ temos:

$x \in A \wedge x \in B$

Como $\perp \vee \alpha \equiv \alpha$ temos:

$\perp \vee (x \in A \wedge x \in B)$

Como $\perp \equiv (x \in A \wedge \neg(x \in A))$ temos:

$(x \in A \wedge \neg(x \in A)) \vee (x \in A \wedge x \in B)$

Como $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ temos

$x \in A \wedge (\neg(x \in A) \vee x \in B)$

Como $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$ temos:

$x \in A \wedge (\neg(x \in A) \vee \neg\neg(x \in B))$

Da lei de De Morgan $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$ temos:

$x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge \neg(x \in B))$

De outro modo:

$x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge x \notin B)$

Da definição de complementar temos:

$x \in A \wedge \neg(x \in \complement_A(B))$

De outro modo:

$x \in A \wedge x \notin \complement_A(B)$

Da definição de complementar temos:

$x \in \complement_A(\complement_A(B))$

Daí, temos:

$\forall x, x \in B \rightarrow x \in \complement_A(\complement_A(B))$

Da definição de contido:

$B \subset \complement_A(\complement_A(B))$

Das partes a) e b) teremos:

$(\complement_A(\complement_A(B)) \subset B) \wedge (B \subset \complement_A(\complement_A(B)))$

Portanto, da definição de igualdade de conjuntos temos:

$\complement_A(\complement_A(B)) = B \square$

Essa aula caro aluno, devido ao seu aspecto técnico como a aula anterior, exige uma dedicação maior. Resolva as atividades propostas e procure esclarecer suas dúvidas, pois na próxima aula, prosseguiremos vendo mais operações sobre conjuntos e detalharemos produto cartesiano.

9.6 Conclusão

Na aula de hoje, vimos mais duas novas operações sobre conjuntos, diferença e complementar, e podemos concluir que apesar de úteis, são menos intuitivas que as da aula anterior união e interseção.

9.7 Resumo

Sejam A, B e C conjuntos. Valem então as seguintes propriedades para a diferença de conjuntos:

- $A\backslash A = \phi$
- $A\backslash\phi = A$
- $A\backslash(B \cup C) = (A\backslash B) \cap (A\backslash C)$
- $A\backslash(B \cap C) = (A\backslash B) \cup (A\backslash C)$
- $(A\backslash B) \cup (A \cap B) = A$

Sejam A, B e C conjuntos. Valem então as seguintes propriedades para a diferença simétrica de conjuntos:

- $A\Delta A = \phi$
- $A\Delta\phi = A$
- $A\Delta B = B\Delta A$
- $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$
- $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$

Sejam A, B e C conjuntos ,tais que $B, C \subset A$. Valem então as seguintes propriedades para o complementar de conjuntos:

- $\complement_A(A) = \phi$
- $\complement_A(\phi) = A$
- $\complement_A(\complement_A(B)) = B$
- $\complement_A(B \cup C) = \complement_A(B) \cap \complement_A(C)$
- $\complement_A(B \cap C) = \complement_A(B) \cup \complement_A(C)$

9.8 Atividades

Deixamos como atividades a demonstração de alguma das propriedades acima.

ATIV. 9.1. Sejam A e B conjuntos. Mostre que:

- $A \backslash A = \phi$
- $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção as demonstrações acima, elas lhe servirão de guia.

ATIV. 9.2. Sejam A, B e C conjuntos, tais que $B, C \subset A$. Mostre que:

- $\complement_A(\phi) = A$
- $\complement_A(B \cup C) = \complement_A(B) \cap \complement_A(C)$

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção as demonstrações acima, elas lhe servirão de guia.

9.9 Referências Bibliográficas

FERREIRA, Fernando,Teoria dos Conjuntos: Uma Vista, Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática 38: 29-47, 1998.

HALMOS, Paul Richard, Naive Set Theory, Springer-Verlag, 1974.

CASTRUCCI, Benedito, Elementos da Teoria de Conjuntos. São Paulo: GEEM, 1970.