1
LIVRO

10
AULA

Operações com Conjuntos: Produto Cartesiano

META:

Introduzir propriedades para o produto cartesiano de conjuntos.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Demonstrar propriedades envolvendo pares ordenados;

Demonstrar propriedades envolvendo produto cartesiano de conjuntos.

PRÉ-REQUISITOS

Aula-04 e Aula-07 os conhecimentos das regras de inferência e das regras de equivalência e da teoria axiomática dos conjuntos.

10.1 Introdução

Nas duas aulas anteriores, vimos as operações de união e interseção entre dois conjuntos e algumas propriedades que as envolvem. Provamos duas delas e deixamos outras como atividades em sala de aula. Vimos também, a diferença entre conjuntos, a diferença simétrica entre conjuntos e por fim o complementar de um conjunto com relação a outro que o contenha. Na aula de hoje, continuaremos estudando as relações entre conjuntos e veremos também, produto cartesiano de conjuntos

10.2 Par Ordenado

Kazimierz Kuratowski nasceu no dia 02/02/1896 em Varsovia, mesmo lugar onde morreu em 18/06/1980. Matemático e Lógico polonês, entre suas contribuições encontram-se uma caracterização dos Espaços de Hausdorff conhecido como Axiomas de Fechamento de Kuratowski e a carecterização de pares ordenados. Wikipedia

Começaremos nossa aula, definindo par ordenado. Um conceito importante, pois sem ele a Geometria analítica não seria possível. Como vimos na aula 07, a ordem em que os elementos são listados em um conjunto é irrelevante. Porém, há ocasiões em que a ordem em que os elementos são introduzidos tem relevância. Quem é o primeiro, quem é o segundo e assim consecutivamente, Quem é o primeiro, quem é o segundo, o terceiro e assim consecutivamente, é exemplo do conceito de par ordenado, introduzido pelo matemático polonês Kuratowski . Em seguida, definiremos também o conceito de n-úpla ordenada.

Definição 10.1. Sejam a e b objetos quaisquer. Definimos o par ordenado, denotado (a, b), por:
$(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

OBS 10.1. A definição acima foi elaborada por Kuratowski. O fato de a ser o primeiro objeto do par ordenado X pode ser expresso como:

$\forall x \in X, a \in x$

e o fato de b ser o segundo objeto do par ordenado X pode ser expresso como:

$(\exists x \in X | b \in x) \wedge (\forall x_1, x_2 \in X | x_1 \neq x_2 \rightarrow (b \notin x_1 \vee b \notin x_2))$

A definição vale no caso de $a = b$ pois, se $X = (a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}$ $\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$ e como a condição $x_1 \neq x_2$ não pode ser satisfeita por X, a definição de a ser o segundo objeto fica vaziamente satisfeita ($F \rightarrow V$ é verdade).

Teorema 10.1. *Sejam $X = (a, b)$ e $Y = (c, d)$ dois pares ordenado. $X = Y$ somente se $a = c$ e $b = d$.*

PROVA: Provaremos primeiramente que $X = Y \rightarrow a = c \wedge b = d$. Para isso usaremos o estudo de casos:

a) Caso $a = b$

$X = (a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\}$:

Como $a = b$ temos:

$X = \{\{a\}, \{a, a\}\}$

Do axioma da extensionalidade (a repetição de elementos é irrelevante) temos:

$X = \{\{a\}, \{a\}\}$

$X = \{\{a\}\}$

Por outro lado:

$Y = (c, d) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{c\}, \{c, d\}\}$

Como $X = Y$ temos:

$\{\{a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$

Do axioma da extensionalidade (um conjunto fica unicamente determinado pelos seus elementos) temos:

$\{a\} = \{c\} = \{c, d\} \rightarrow a = c = d$

Portanto:

$a = b = c = d$

b) Caso $a \neq b$

$X = (a, b) \overset{\text{def}}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\}$ e:

$Y = (c, d) \overset{\text{def}}{=} \{\{c\}, \{c, d\}\}$

Como $X = Y$ temos:

$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$

Do axioma da extensionalidade temos duas possibilidades $\{c\} = \{a, b\}$ ou $\{c\} = \{a\}$

b1) Caso $\{c\} = \{a, b\}$

Do axioma da extensionalidade temos:

$\{c\} = \{a, b\} \rightarrow c = a = b$

Daí, temos:

$a \neq b \wedge a = b$ que é um absurdo. Logo vale a segunda opção:

b2) Caso $\{c\} = \{a\}$

$\{c\} = \{a\}$

Do axioma da extensionalidade:

$\{c\} = \{a\} \rightarrow a = c$

Ok, ainda restam duas possibilidades para $\{c, d\}$. $\{c, d\} = \{a\}$ ou $\{c, d\} = \{a, b\}$.

b21) Caso $\{c, d\} = \{a\}$

$\{c, d\} = \{a\}$

Do axioma da extensionalidade:

$\{c, d\} = \{a\} \rightarrow c = d = a$

Daí, do axioma da extensionalidade temos:

$c = d \rightarrow Y = (c, d) = \{\{c\}, \{c, d\}\} = \{\{c\}, \{c, c\}\} = \{\{c\}, \{c\}\} = \{\{c\}\}$

Como $X = Y$, do axioma da extensionalidade temos:

$\{\{c\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}\} \rightarrow \{c\} = \{a\} = \{a, b\} \rightarrow c = a = b$

Daí,

$a \neq b \wedge a = b$ absurdo. Logo vale a segunda opção:

b22) Caso $\{c, d\} = \{a, b\}$

$\{c, d\} = \{a, b\}$

Como $a = c$ temos:

$\{a, d\} = \{a, b\}$

Do axioma da extensionalidade temos:

$\{a, d\} = \{a, b\} \rightarrow b = d$

Dai, temos:

$a = c \wedge b = d$.

Em segundo lugar, provaremos que $a = c \wedge b = d \rightarrow X = Y$.

Como $a = c \wedge b = d$ e $X = (a, b) \wedge Y = (c, d)$.

É trivial que $Y = (a, b)$ e portanto:

$X = Y$.

Portanto conclui-se que:

$X = Y \leftrightarrow a = c \wedge b = d$ $\square$.

Podemos definir termo ordenado usando o conceito de par ordenado da seguinte forma:

Definição 10.2. Sejam a, b e c três objetos quaisquer. Definimos terno ordenado, denotado (a, b, c), por:

$(a, b, c) \stackrel{\text{def}}{=} (a, (b, c))$.

OBS 10.2. Seguindo a definição de Kuratowski para par ordenado, para um terno ordenado temos:

$(a, b, c) = (a, (b, c)) = \{\{a\}, \{a, (b, c)\}\}$

$(a, b, c) = \{\{a\}, \{a, \{\{b\}, \{b, c\}\}\}\}$.

O conceito de n-úpla ordenada pode ser definido interativamente por:

Definição 10.3. Sejam $x_1, x_2, \ldots x_n$ n objetos. Definimos interativamente a n-úpla ordenada, denotada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ por:
$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \overset{\text{def}}{=} (x_1, (x_2, \ldots, x_n))$,
onde $(x_2, \ldots, x_n)$ é uma n-1-úpla ordenada.

10.3 Produto Cartesiano de Conjuntos

O produto cartesiano leva este nome em homenagem ao Matemático francês Renné Descartes, que o usou na definição da Geometria Analítica. Consiste em formar, partindo de dois conjuntos, um conjunto constituído de todos os pares ordenados, cujo primeiro objeto pertence ao primeiro conjunto e o segundo objeto pertence ao segundo conjunto. Vamos à definição:

Definição 10.4. Sejam A e B dois conjuntos. Definimos o produto cartesiano de A por B, denotado $A \times B$, por:
$A \times B \overset{\text{def}}{=} \{(a, b), \forall a \in A \wedge \forall b \in B\}$.

Exemplo 10.1. Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2\}$ então o produto cartesiano $A \times B$ é dado por:
$A \times B = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2)\}$
enquanto que o produto cartesiano $B \times A$ é dado por:
$B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$

Podemos estender o conceito de produto cartesiano à três conjuntos, definindo:

Definição 10.5. Sejam A, B e C três conjuntos. Definimos o produto cartesiano de A, B e C, denotado $A \times B \times C$, por:
$A \times B \times C \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b, c), \forall a \in A, \forall b \in B, c \in C\}$.

Podemos estender facilmente a definição para o produto cartesiano de n conjuntos. A saber:

Definição 10.6. Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n conjuntos. Definimos o produto cartesiano de $A_1, A_2, \ldots, A_n$, denotado $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, por:
$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(a_1, a_2, \ldots, a_n), \forall a_1 \in A_1, \forall a_2 \in A_2, \ldots, \forall a_n \in A_n\}$.

10.3.1 Propriedades do Produto Cartesiano

Listaremos aqui, algumas das propriedades do produto cartesiano. A saber:

Sejam A,B e C três conjuntos, então valem as seguintes propriedades:

- $A \times B \neq B \times A$, se $A \neq B$ e $A \neq \phi$ ou $B \neq \phi$.
- $A \times B \times C = A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$
- $A \times \phi = \phi \times A = \phi$
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

10.4 Algumas Demonstrações

Nesta seção, demonstraremos duas propriedades vistas acima. Provaremos, primeiramente, a segunda das propriedades do produto cartesiano de conjuntos. A saber:

Propriedade1: Sejam A, B e C conjuntos então, $A \times B \times C = A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$.

PROVA Da definição do produto cartesiano de n conjuntos, no caso particular de $n = 3$ temos:

$A \times B \times C \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b, c), \forall a \in A \forall b \in B \forall c \in C\}$

Da definição de terno ordenado $(a, b, c) \stackrel{\text{def}}{=} (a, (b, c))$ temos: $A \times B \times C \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, (b, c)), \forall a \in A \forall b \in B \forall c \in C\}$

Por outro lado, da definição de produto cartesiano de dois conjuntos temos:

$B \times C \stackrel{\text{def}}{=} \{(b, c), \forall b \in B \forall c \in C\}$

Novamente da definição de produto cartesiano de dois conjuntos, em que o primeiro é A e o segundo é $B \times C$ temos:

$A \times (B \times C) \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, x), \forall a \in A \forall x \in B \times C\}$

Daí, como $x \in B \times C \rightarrow x = (b, c), \forall b \in B \forall c \in C$ temos:

$A \times (B \times C) \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, (b, c)), \forall a \in A \forall b \in B \forall c \in C\}$

Do axioma da extensionalidade (dois conjuntos são iguais, somente se tem os mesmos elementos) temos:

$A \times B \times C = A \times (B \times C)$

Que encerra a primeira parte da demonstração.

Para a segunda parte, usando a definição de produto cartesiano de dois conjuntos temos:

$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b), \forall a \in A \forall b \in B\}$

Novamente da definição de produto cartesiano de dois conjuntos, em que o primeiro é $A \times B$ e o segundo C temos:

$(A \times B) \times C \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, c), \forall x \in A \times B \forall c \in C\}$

Daí, como $x \in A \times B \rightarrow x = (a, b), \forall a \in A \forall b \in B$ temos:

$(A \times B) \times C \stackrel{\text{def}}{=} \{((a, b), c), \forall a \in A \forall b \in B \in A \times B \forall c \in C\}$

Poderíamos pensar que $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ se $((a, b), c) = (a, (b, c))$. Porém, da definção de Kuratowski de par ordenado temos:

$(a, (b, c)) = \{\{a\}, \{a, (b, c)\}\}$

Como $(b, c) = \{\{b\}, \{b, c\}\}$ temos:

$(a, (b, c)) = \{\{a\}, \{a, \{\{b\}, \{b, c\}\}\}\}$

E também:

$((a, b), c) = \{\{(a, b)\}, \{(a, b), c\}\}$

Como $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ temos:

$((a, b), c) = \{\{\{\{a\}, \{a, b\}\}\}, \{\{\{a\}, \{a, b\}\}, c\}\}$

Daí, fica claro que de modo geral $((a, b), c) \neq (a, (b, c))$ e portanto: $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$. $\square$

Veremos agora, mais uma demonstração de uma das propriedades do produto cartesiano. A saber:

Propriedade2: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

PROVA É suficiente mostrar que:

$A \times (B \cup C) \subset (A \times B) \cup (A \times C)$ e que $(A \times B) \cup (A \times C) \subset A \times (B \cup C)$.

a) Primeiramente mostraremos que: $A \times (B \cup C) \subset (A \times B) \cup (A \times C)$

$\forall x, x \in A \times (B \cup C)$

Da definição de produto cartesiano temos:

$x = (a, z), a \in A, z \in (B \cup C)$

De definição de união temos:

$x = (a, z), a \in A, (z \in B \vee z \in C)$

Podemos reescrever como:

$(x = (a, z), a \in A, z \in B) \vee (x = (a, z), a \in A, z \in C)$

Da definição de produto cartesiano temos:

$(x \in A \times B) \vee (x \in A \times C)$

Da definição de união temos:

$x \in (A \times B) \cup (A \times C)$

Logo:

$\forall x, x \in A \times (B \cup C) \to x \in (A \times B) \cup (A \times C)$

Da definição de contido temos:

$A \times (B \cup C) \subset (A \times B) \cup (A \times C)$

b) Em seguida mostrarmos que: $(A \times B) \cup (A \times C) \subset A \times (B \cup C)$

$\forall x, x \in (A \times B) \cup (A \times C)$

Da definição de união temos:

$x \in (A \times B) \vee x \in (A \times C)$

Da definição de produto cartesiano temos:

$(x = (y, z), y \in A, z \in B) \vee (x = (u, w), u \in A, w \in C)$

Que pode ser reescrita como:

$x = (a, t), a \in A, (t \in B \vee t \in C)$

Da definição de união temos:

$x = (a, t), a \in A, t \in (B \cup C)$

Da definição de produto cartesiano temos:

$x \in A \times (B \cup C)$

Logo:

$\forall x, x \in (A \times B) \cup (A \times C) \to x \in A \times (B \cup C)$

Da definição de contido temos:

$(A \times B) \cup (A \times C) \subset A \times (B \cup C)$

Das partes a) e b) temos:

$(A \times (B \cup C) \subset (A \times B) \cup (A \times C)) \wedge ((A \times B) \cup (A \times C) \subset A \times (B \cup C))$

Portanto, da definição de igualdade de conjuntos temos:
$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ $\square$

Aqui encerra-se nosso primeiro módulo, e como algumas aulas anteriores, devido ao seu aspecto técnico, essa aula também exige uma dedicação maior em seu estudo. No próximo módulo, iniciaremos nossa aula vendo relações binárias

10.5 Conclusão

Ao final dessa aula, concluimos que, embora a ordem dos elementos de um conjunto seja irrelevante, como afirma o axioma da extensionalidade, podemos criar ordem em um conjunto usando como base o conceito de conjuntos e, conseqüentemente, teremos as n-úplas ordenadas.

10.6 Resumo

Nosso resumo hoje consta das seguintes definições e propriedades:
Definição de par ordenado:
Definição: Sejam a e b objetos quaisquer. Definimos o par ordenado, denotado (a, b), por:
$(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\}$.
Definição de n-úpla ordenada:
Definição: Sejam $x_1, x_2, \ldots x_n$ n objetos. Definimos interativamente a n-úpla ordenada, denotada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ por:
$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, (x_2, \ldots, x_n))$,
onde $(x_2, \ldots, x_n)$ é uma n-1-úpla ordenada.

Definição de produto cartesiano de dois conjuntos:

Definição: Sejam A e B dois conjuntos. Definimos o produto cartesiano de A por B, denotado $A \times B$, por:
$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b), \forall a \in A \wedge \forall b \in B\}$.

Produto cartesiano de n conjuntos:

Definição: Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n conjuntos. Definimos o produto cartesiano de $A_1, A_2, \ldots, A_n$, denotado $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, por:
$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(a_1, a_2, \ldots, a_n), \forall a_1 \in A_1, \forall a_2 \in A_2, \ldots, \forall a_n \in A_n\}$.

Propriedades Para o produto cartesiano vale as seguintes propriedades. Sejam A,B e C então::

- $A \times B \neq B \times A$, se $A \neq B$ e $A \neq \phi$ ou $B \neq \phi$.
- $A \times B \times C = A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$
- $A \times \phi = \phi \times A = \phi$
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

10.7 Atividades

Deixamos como atividades a demonstração de alguma das propriedades acima.

ATIV. 10.1. Sejam A e B conjuntos. Mostre que:

- Se $A = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ e $B = \{\{c\}\}$ então $A = B \leftrightarrow a = b = c$
  $A = \{a\}$ e $B = \{b, c\}$ então $A = B \leftrightarrow a = b = c$

Comentário: Reveja as demonstrações desta aula, pois servirão como guias.

ATIV. 10.2. Sejam A, B e C conjuntos, tais que $B, C \subset A$. Mostre que:

- $A \times \phi = \phi \times A = \phi$
- $A \times (B \cap C) = (A \times b) \cap (A \times C)$

Comentário: Reveja as demonstrações desta aula, sobretudo a segunda que servirá como sua guia.

10.8 Referências Bibliográficas

FERREIRA, Fernando,Teoria dos Conjuntos: Uma Vista, Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática 38: 29-47, 1998.

HALMOS, Paul Richard, Naive Set Theory, Springer-Verlag, 1974.

CASTRUCCI, Benedito, Elementos da Teoria de Conjuntos. São Paulo: GEEM, 1970.