Sumário

2
LIVRO

11
AULA

Relações Binárias

META

Introduzir o conceito de relações e suas propriedades.

OBJETIVOS

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Determinar a imagem e o domínio de uma relação.

Verificar as propriedades de uma relação.

PRÉ-REQUISITOS

Aula-10 os conhecimentos de produto cartesiano

11.1 Introdução

Olá caro aluno, iniciaremos nosso segundo módulo vendo relações e suas propriedades. O conceito de relação é bastante intuitivo. Diariamente podemos presenciar vários exemplos de relações. Entre os habitantes de uma cidade, o casamento define então uma relação entre seus habitantes; entre os times de futebol de um campeonato, o time x jogou com o time y, também define uma relação; entre o conjunto dos alunos do Curso de Matemática e o conjunto das disciplinas do Curso de Matemática, podemos definir uma relação por : o aluno x cursou a disciplina y. Esses são alguns de muitos outros exemplos que poderiam ser citados. Nesta aula, tornaremos a noção de "*relação*" precisa no sentido da Matemática.

11.2 Relações Binárias

Começaremos nossa aula diretamente com o conceito (definição) de relação binária:

Definição 11.1. Sejam A e B dois conjuntos. Definimos como uma relação binária do conjunto A com o conjunto B, denotado R, à qualquer subconjunto do produto cartesiano de A por B:
$R \subset A \times B$.

Exemplo 11.1. Sejam $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$:

- $R_1 = \{(a, 1), (b, 3), (d, 2)\}$ é, conforme a definição acima, uma relação entre o conjunto A e o conjunto B **Fig 11.1**.
- $R_2 = \{(1, c), (3, a), (2, a)\}$ por sua vez, é uma relação entre o conjunto B e o conjunto A **Fig 11.2**.

- $R_3 = \{(a, 1), (3, b), (c, d)\}$ não é uma relação pois $(a, 1) \in A \times B$ enquanto que $(3, b) \in B \times A$

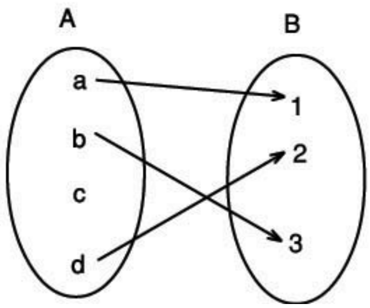

Figura 11.1: Relação R_1

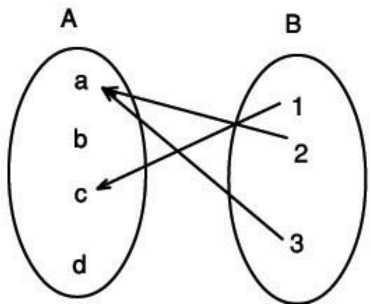

Figura 11.2: Relação R_2

OBS 11.1. Dados dois conjuntos A e B e uma relação $R \subset A \times B$ e um par ordenado (a, b), podemos representar de várias formas o fato do par pertencer a relação. A saber: $(a, b) \in R$ ou $a\, R\, b$ para indicar que a está na relação R com b. Podemos representar o fato do par (a, b) não pertencer a relação escrevendo $(a, b) \notin R$ ou alternativamente $a \not R\, b$.

Dois conceitos são importantes no estudo das relações: o conceito de domínio e o conceito de imagem de uma relação. Abaixo estabeleceremos estes conceitos definindo-os.

Definição 11.2. Sejam A e B conjuntos e $R \subset A \times B$ uma relação de A em B. Definimos o domínio de R, denotado $Dom(R)$, por: $Dom(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A |\, \exists y \in B \wedge (x, y) \in R\}$

Definição 11.3. Sejam A e B conjuntos e $R \subset A \times B$ uma relação de A em B. Definimos a imagem de R, denotada $Img(R)$, por: $Img(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in B |\, \exists x \in A \wedge (x, y) \in R\}$

OBS 11.2. Em palavras simples, o domínio de uma relação é constituído pelos primeiros elementos de todos os pares ordenados que pertencem a relação, e a imagem de uma relação é constituída pelos segundos elementos de todos os pares ordenados que pertencem a relação.

Exemplo 11.2. Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e a relação $R = \{(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 1)\}$ **Fig 11.3**. Desta forma temos para domínio da relação:
$Dom(R) = \{a, b, c\}$
e para imagem da relação:
$Img(R) = \{1, 2, 3\}$

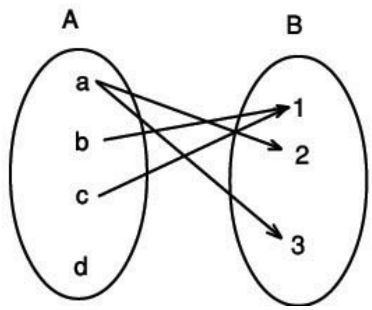

Figura 11.3: Relação R

Podemos também definir a inversa de uma relação. A saber:

Definição 11.4. Sejam A e B conjuntos e $R \subset A \times B$ uma relação de A em B. Definimos a inversa da relação R, denotada R^{-1}, por:
$R^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{(y, x) \in B \times A | \, (x, y) \in R\}$

Exemplo 11.3. Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e a relação $R = \{(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 1)\}$ **Fig 11.4**. Desta forma temos para a relação inversa de R^{-1}:
$R = \{(2, a), (3, a), (1, b), (1, c)\}$ **Fig 11.5**

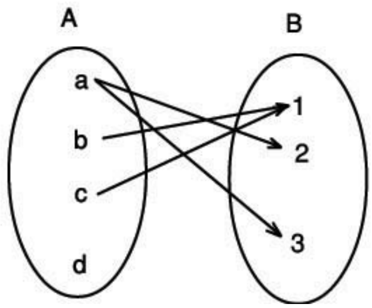

Figura 11.4: Relação R

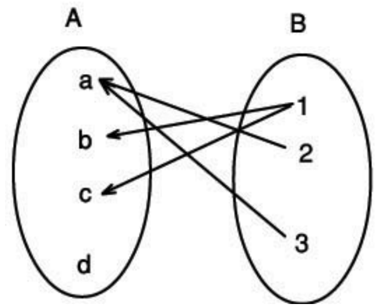

Figura 11.5: Relação R^{-1}

11.2.1 Propriedades das Relações Binárias

Veremos agora, algumas propriedades das relações de um conjunto A sobre ele mesmo. Esses tipos de relações são importantes na definição de relações de ordem e relações de equivalência, que veremos com detalhes nas próximas aulas.

Definição 11.5. Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R tem propriedade reflexiva, somente se: $\forall x \in A, (x, x) \in R$

OBS 11.3. A relação "*maior ou igual*" ($\geq$) no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um exemplo de relação com propriedade reflexiva pois, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geq x$.

Definição 11.6. Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R tem propriedade irreflexiva, somente se: $\forall x \in A, (x, x) \notin R$

OBS 11.4. A relação "*maior do que*" ($>$) no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um exemplo de relação com propriedade irreflexiva pois, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\neg(x > x)$.

Definição 11.7. Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R tem propriedade coreflexiva, somente se: $\forall x, y \in A, (x, y) \in R \rightarrow x = y$

OBS 11.5. A relação de igualdade $(=)$ no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um exemplo de relação com propriedade coreflexiva. A verificação é trivial pois, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ se $x = y$ então $x = y$.

Definição 11.8. Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R tem propriedade simétrica, somente se: $\forall x, y \in A, (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$

OBS 11.6. A relação de parentesco entre as pessoas de uma rua é um exemplo de relação simétrica pois, se x é parente de y então y é parente de x.

Definição 11.9. Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R tem propriedade anti-simétrica, somente se: $\forall x, y \in A, (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow x = y$

OBS 11.7. A relação "*maior ou igual*" $(\geq)$ no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um exemplo de relação com propriedade anti-simétrica pois, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \geq y \wedge y \geq x$ então $x = y$.

Definição 11.10. Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R tem propriedade assimétrica, somente se: $\forall x, y \in A, (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \notin R$

OBS 11.8. A relação "*maior do que*" $(>)$ no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um exemplo de relação com propriedade assimétrica pois, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, se $x > y$ não podemos ter $y > x$.

Definição 11.11. Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R tem propriedade transitiva, somente se: $\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$

OBS 11.9. A relação "*maior ou igual*" ($\geq$) no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um exemplo de relação com propriedade transitiva pois, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \geq y$ e $y \geq z$ então $x \geq z$.

Definição 11.12. Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R tem propriedade total, somente se: $\forall x, y \in A, (x, y) \in R \vee (y, x) \in R$

OBS 11.10. A relação "*maior ou igual*" ($\geq$) no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um exemplo de relação com propriedade total pois, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ teremos $x \geq y$ ou $y \geq x$, isto é, qualquer par de números reais é comparável pela relação "*maior ou igual*".

Definição 11.13. Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R tem propriedade tricotômica, somente se: $\forall x, y \in A, (x, y) \in R \veebar (y, x) \in R \veebar x = y$

OBS 11.11. A relação "*maior do que*", ($>$) no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um exemplo de relação com propriedade tricotômica pois, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ teremos de forma exclusiva ou $x = y$ ou $x > y$ ou $y > x$.

Definição 11.14. Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R tem propriedade euclidiana, somente se: $\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \wedge (x, z) \in R \rightarrow (y, z) \in R$

OBS 11.12. A relação de igualdade ($=$) no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um exemplo de relação com propriedade euclidiana. A verificação é trivial pois, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ se $x = y$ e $x = z$ então $y = z$.

11.3 Algumas Demonstrações

Veremos agora, algumas demonstrações envolvendo relações binárias e suas propriedades.
Primeiramente vamos mostrar que:

Propriedade 11.1. *Seja A um conjunto e $R, S \subset A \times A$ duas relações sobre o conjunto A se R e S são transitivas então, $R \cap S$ é transitiva.*

PROVA $\forall x, y, z \in R \cap S$ se $(x, y) \in R \cap S \wedge (y, z) \in R \cap S$ temos que:
Como $(x, y) \in R \cap S$ então $(x, y) \in R \wedge (x, y) \in S$
Por outro lado como $(y, z) \in R \cap S$ então $(y, z) \in R \wedge (y, z) \in S$
Daí, como $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R$ e R é transitiva temos que:
$(x, z) \in R$.
Do mesmo modo, como $(x, y) \in S \wedge (y, z) \in S$ e S é transitiva temos que:
$(x, z) \in S$.
Portanto, temos:
$(x, z) \in R \wedge (x, z) \in S$.
Conseqüentemente:
$(x, z) \in R \cap S$.
Finalmente:
$\forall x, y, z \in R \cap S$ se $(x, y) \in R \cap S \wedge (y, z) \in R \cap S$ então $(x, z) \in R \cap S$.
E a relação $R \cap S$ é transitiva. $\square$
seguida mostraremos que:

Propriedade 11.2. *Sejam A, B conjuntos e $R, S \subset A \times B$ relações de A em B então $R^{-1} \cap S^{-1} = (R \cap S)^{-1}$.*

PROVA É suficiente mostrar que $R^{-1} \cap S^{-1} \subset (R \cap S)^{-1}$ e $(R \cap S)^{-1} \subset R^{-1} \cap S^{-1}$.

a) Primeiramente mostraremos que: $R^{-1} \cap S^{-1} \subset (R \cap S)^{-1}$.

$\forall (x, y) \in R^{-1} \cap S^{-1}$ temos:

$(x, y) \in R^{-1} \wedge (x, y) \in S^{-1}$.

Da definição de relação inversa temos:

$(x, y) \in R^{-1} \rightarrow (y, x) \in R$.

Do mesmo modo da definição de relação inversa temos:

$(x, y) \in S^{-1} \rightarrow (y, x) \in S$.

Logo temos:

$(y, x) \in R \wedge (y, x) \in S$.

Da definição de interseção temos:

$(y, x) \in R \cap S$.

Da definição de relação inversa temos:

$(x, y) \in (R \cap S)^{-1}$. Daí, temos:

$\forall (x, y) \in R^{-1} \cap S^{-1} \rightarrow (x, y) \in (R \cap S)^{-1}$.

Da definição de contido temos:

$R^{-1} \cap S^{-1} \subset (R \cap S)^{-1}$.

b) Em seguida mostraremos que: $(R \cap S)^{-1} \subset R^{-1} \cap S^{-1}$.

$\forall (x, y) \in (R \cap S)^{-1}$.

Da definição de relação inversa temos:

$(y, x) \in R \cap S$.

Da definição de interseção temos:

$(y, x) \in R \wedge (y, x) \in S$.

Da definição de relação inversa temos:

$(y, x) \in R \rightarrow (x, y) \in R^{-1}$.

Do mesmo modo da definição de relação inversa temos:

$(y, x) \in S \rightarrow (x, y) \in S^{-1}$.

Logo temos:

$(x, y) \in R^{-1} \wedge (x, y) \in S^{-1}$.

Da definição de interseção temos:

$(x, y) \in R^{-1} \cap S^{-1}$.

Daí, temos:

$\forall (x, y) \in (R \cap S)^{-1} \rightarrow (x, y) \in R^{-1} \cap S^{-1}$.

Da definição de contido temos:

$(R \cap S)^{-1} \subset R^{-1} \cap S^{-1}$.

Das partes a) e b) temos:

$(R^{-1} \cap S^{-1} \subset (R \cap S)^{-1}) \wedge ((R \cap S)^{-1} \subset R^{-1} \cap S^{-1})$

Portanto, da definição de igualdade de conjuntos temos:

$R^{-1} \cap S^{-1} = (R \cap S)^{-1}$ □

11.4 CONCLUSÃO

Caro aluno, ao final dessa aula, podemos concluir que relações constituem-se em um dos aspectos da Matemática de aplicação prática mais ampla. Podemos, em teoria, fazer relações com qualquer par de conjuntos.

11.5 RESUMO

Nosso resumo consta das seguintes definições:

Definição de relação binária:

Definição: Sejam A e B dois conjuntos. Definimos como uma relação binária do conjunto A com o conjunto B, denotado R, à qualquer subconjunto do produto cartesiano de A por B:

$R \subset A \times B$

Definição de domínio de uma relação.

Definição: Sejam A e B conjuntos e $R \subset A \times B$ uma relação de A em B. Definimos o domínio de R, denotado $Dom(R)$, por:
$Dom(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A |\, \exists y \in B \wedge (x, y) \in R$

Definição de imagem de uma relação.

Definição: Sejam A e B conjuntos e $R \subset A \times B$ uma relação de A em B. Definimos a imagem de R, denotada $Img(R)$, por:
$Img(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in B |\, \exists x \in A \wedge (x, y) \in R$

Definição de inversa de uma relação.

Definição: Sejam A e B conjuntos e $R \subset A \times B$ uma relação de A em B. Definimos a inversa da relação R, denotada R^{-1}, por:
$R^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{(y, x) \in B \times A |\, (x, y) \in R\}$

Definição de propriedade reflexiva de uma relação.

Definição: Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R tem propriedade reflexiva, somente se:
$\forall x \in A, (x, x) \in R$

Definição de propriedade irreflexiva de uma relação.

Definição: Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R tem propriedade irreflexiva, somente se:
$\forall x \in A, (x, x) \notin R$

Definição de propriedade coreflexiva de uma relação.

Definição: Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R tem propriedade coreflexiva, somente se:
$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \rightarrow x = y$

Definição de propriedade simétrica de uma relação.

Definição: Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R tem propriedade simétrica, somente se:
$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$

Definição de propriedade anti-simétrica de uma relação.

Definição: Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R tem propriedade anti-simétrica, somente se: $\forall x, y \in A, (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow x = y$

Definição de propriedade assimétrica de uma relação.

Definição: Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R tem propriedade assimétrica, somente se: $\forall x, y \in A, (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \notin R$

Definição de propriedade transitiva de uma relação.

Definição: Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R tem propriedade transitiva, somente se: $\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$

Definição de propriedade total de uma relação.

Definição: Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R tem propriedade total, somente se: $\forall x, y \in A, (x, y) \in R \vee (y, x) \in R$

Definição de propriedade tricotômica de uma relação.

Definição: Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R tem propriedade tricotômica, somente se: $\forall x, y \in A, (x, y) \in R \veebar (y, x) \in R \veebar x = y$

Definição de propriedade euclidiana de uma relação.

Definição: Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R tem propriedade euclidiana, somente se: $\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \wedge (x, z) \in R \rightarrow (y, z) \in R$

11.6 ATIVIDADES

Deixamos como atividade a demonstração de algumas propriedades acima.

ATIV. 11.1. Sejam A um conjunto e $R, S \subset A \times A$ duas relações sobre o conjunto A. Mostre que, se R e S são transitivas então $R \cup S$ é transitiva.

Comentário: Volte ao texto e reveja com atenção as demonstrações desta aula.

ATIV. 11.2. Sejam A, B conjuntos e $R, S \subset A \times B$ relações de A em B. Mostre que:
$R^{-1} \cup S^{-1} = (R \cup S)^{-1}$.

Comentário: Volte ao texto e reveja com atenção as demonstrações desta aula.

11.7 REFERÊNCIAS BIBLIOGÁFICAS

DOMINGUES, Higino Hugueros. e IEZZI, Gelson. Álgebra Moderna. Atual Editora LTDA. São Paulo. 1979.

CASTRUCCI, Benedito. Elementos da Teoria de Conjuntos. São Paulo: GEEM, 1970.