

Sumário

Aula 11: Relações Binárias	9
11.1 Introdução	10
11.2 Relações Binárias	10
11.2.1 Propriedades das Relações Binárias	13
11.3 Algumas Demonstrações	16
11.4 CONCLUSÃO	18
11.5 RESUMO	18
11.6 ATIVIDADES	20
11.7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	21
Aula 12: Relações de Ordem	23
12.1 Introdução	24
12.2 Relações de Ordem	24
12.2.1 Cotas Superiores e Cotas Inferiores	28
12.2.2 Elementos Maximal, Minimal, Máximo e Mí- nimo	28
12.3 Algumas Demonstrações	29
12.4 CONCLUSÃO	32
12.5 RESUMO	32
12.6 ATIVIDADES	34

12.7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	34
Aula 13: Relações de Equivalência	37
13.1 Introdução	38
13.2 Relações de Equivalência	38
13.2.1 Partições e Classes de Equivalência	40
13.3 Algumas Demonstrações	43
13.4 CONCLUSÃO	47
13.5 RESUMO	47
13.6 ATIVIDADES	48
13.7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	49
Aula 14: Funções	51
14.1 Introdução	52
14.2 Funções	52
14.2.1 Imagem Direta e Imagem Inversa	54
14.3 Algumas Demonstrações	57
14.4 CONCLUSÃO	60
14.5 RESUMO	61
14.6 ATIVIDADES	62
14.7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	63
Aula 15: Tipos de Funções	65
15.1 Introdução	66
15.2 Tipos de Funções	66
15.3 CONCLUSÃO	74
15.4 RESUMO	75
15.5 ATIVIDADES	76
15.6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	76

Aula 16: Propriedades das Funções	79
16.1 Introdução	80
16.2 Propriedades das Funções Injetoras	80
16.3 Propriedades das Funções Sobrejetoras	81
16.4 Propriedades das Funções Bijetoras	81
16.5 Algumas Demonstrações	82
16.6 CONCLUSÃO	86
16.7 RESUMO	86
16.8 ATIVIDADES	88
16.9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	88
Aula 17: Números Naturais: Axiomas de Peano	91
17.1 Introdução	92
17.2 Axiomas de Peano	92
17.3 CONCLUSÃO	98
17.4 RESUMO	98
17.5 ATIVIDADES	99
17.6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	99
Aula 18: Operações em \mathbb{N}	101
18.1 Introdução	102
18.2 Soma no Conjunto dos Números Naturais	102
18.3 Propriedades da soma	103
18.4 Produto no Conjunto dos Números Naturais	103
18.5 Propriedades do Produto	104
18.6 Relação de Ordem no Conjunto dos Números Naturais	104
18.7 Propriedades da Relação de Ordem	104
18.7.1 Demonstração de Algumas Propriedades	105
18.8 CONCLUSÃO	110

18.9 RESUMO	110
18.10 ATIVIDADES	112
18.11 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	113
Aula 19: Princípio da Boa Ordem	115
19.1 Introdução	116
19.2 Alguns Teoremas	116
19.3 Princípio da Boa Ordem	120
19.4 Primeiro Princípio da Indução Finita	124
19.5 Segundo Princípio da Indução Finita	124
19.6 Algumas Demonstrações	126
19.7 CONCLUSÃO	129
19.8 RESUMO	130
19.9 ATIVIDADES	130
19.10 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	131
Aula 20: Cardinalidade e Conjuntos Enumeráveis	133
20.1 Introdução	134
20.2 Cardinalidade de um Conjunto	134
20.2.1 Conjuntos Enumeráveis	136
20.2.2 Algumas Demonstrações	138
20.3 CONCLUSÃO	142
20.4 RESUMO	142
20.5 ATIVIDADES	144
20.6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	144

Relações Binárias

META

Introduzir o conceito de relações e suas propriedades.

OBJETIVOS

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Determinar a imagem e o domínio de uma relação.

Verificar as propriedades de uma relação.

PRÉ-REQUISITOS

Aula-10 os conhecimentos de produto cartesiano

Relações Binárias

11.1 Introdução

Olá caro aluno, iniciaremos nosso segundo módulo vendo relações e suas propriedades. O conceito de relação é bastante intuitivo. Diariamente podemos presenciar vários exemplos de relações. Entre os habitantes de uma cidade, o casamento define então uma relação entre seus habitantes; entre os times de futebol de um campeonato, o time x jogou com o time y , também define uma relação; entre o conjunto dos alunos do Curso de Matemática e o conjunto das disciplinas do Curso de Matemática, podemos definir uma relação por : o aluno x cursou a disciplina y . Esses são alguns de muitos outros exemplos que poderiam ser citados. Nesta aula, tornaremos a noção de “*relação*” precisa no sentido da Matemática.

11.2 Relações Binárias

Começaremos nossa aula diretamente com o conceito (definição) de relação binária:

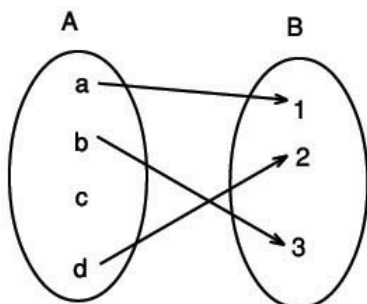
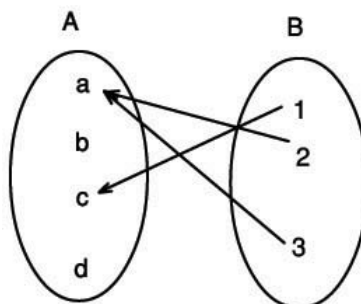
Definição 11.1. Sejam A e B dois conjuntos. Definimos como uma relação binária do conjunto A com o conjunto B , denotado R , à qualquer subconjunto do produto cartesiano de A por B :

$$R \subset A \times B.$$

Exemplo 11.1. Sejam $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$:

- $R_1 = \{(a, 1), (b, 3), (d, 2)\}$ é, conforme a definição acima, uma relação entre o conjunto A e o conjunto B **Fig 11.1**.
- $R_2 = \{(1, c), (3, a), (2, a)\}$ por sua vez, é uma relação entre o conjunto B e o conjunto A **Fig 11.2**.

- $R_3 = \{(a, 1), (3, b), (c, d)\}$ não é uma relação pois $(a, 1) \in A \times B$ enquanto que $(3, b) \in B \times A$

Figura 11.1: Relação R_1 Figura 11.2: Relação R_2

OBS 11.1. Dados dois conjuntos A e B e uma relação $R \subset A \times B$ e um par ordenado (a, b) , podemos representar de várias formas o fato do par pertencer a relação. A saber: $(a, b) \in R$ ou $a R b$ para indicar que a está na relação R com b . Podemos representar o fato do par (a, b) não pertencer a relação escrevendo $(a, b) \notin R$ ou alternativamente $a \not R b$.

Dois conceitos são importantes no estudo das relações: o conceito de domínio e o conceito de imagem de uma relação. Abaixo estabeleceremos estes conceitos definindo-os.

Definição 11.2. Sejam A e B conjuntos e $R \subset A \times B$ uma relação de A em B . Definimos o domínio de R , denotado $Dom(R)$, por:

$$Dom(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A \mid \exists y \in B \wedge (x, y) \in R\}$$

Definição 11.3. Sejam A e B conjuntos e $R \subset A \times B$ uma relação de A em B . Definimos a imagem de R , denotada $Img(R)$, por:

$$Img(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in B \mid \exists x \in A \wedge (x, y) \in R\}$$

Relações Binárias

OBS 11.2. Em palavras simples, o domínio de uma relação é constituído pelos primeiros elementos de todos os pares ordenados que pertencem a relação, e a imagem de uma relação é constituída pelos segundos elementos de todos os pares ordenados que pertencem a relação.

Exemplo 11.2. Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e a relação $R = \{(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 1)\}$ **Fig 11.3**. Desta forma temos para domínio da relação:

$$\text{Dom}(R) = \{a, b, c\}$$

e para imagem da relação:

$$\text{Img}(R) = \{1, 2, 3\}$$

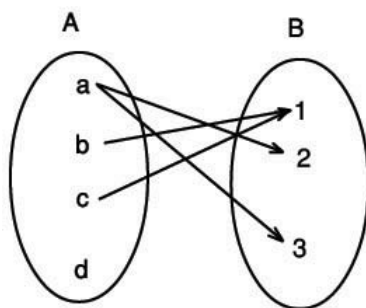


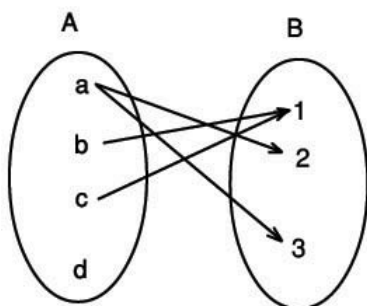
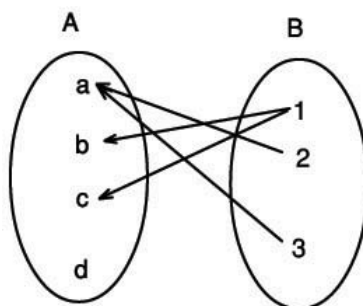
Figura 11.3: Relação R

Podemos também definir a inversa de uma relação. A saber:

Definição 11.4. Sejam A e B conjuntos e $R \subset A \times B$ uma relação de A em B . Definimos a inversa da relação R , denotada R^{-1} , por:
$$R^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}$$

Exemplo 11.3. Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e a relação $R = \{(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 1)\}$ **Fig 11.4**. Desta forma temos para a relação inversa de R^{-1} :

$$R^{-1} = \{(2, a), (3, a), (1, b), (1, c)\} \text{ Fig 11.5}$$

Figura 11.4: Relação R Figura 11.5: Relação R^{-1}

11.2.1 Propriedades das Relações Binárias

Veremos agora, algumas propriedades das relações de um conjunto A sobre ele mesmo. Esses tipos de relações são importantes na definição de relações de ordem e relações de equivalência, que veremos com detalhes nas próximas aulas.

Definição 11.5. Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A . Dizemos que R tem propriedade reflexiva, somente se: $\forall x \in A, (x, x) \in R$

OBS 11.3. A relação “maior ou igual” (\geq) no conjunto dos números reais \mathbb{R} é um exemplo de relação com propriedade reflexiva pois, $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq x$.

Definição 11.6. Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A . Dizemos que R tem propriedade irreflexiva, somente se: $\forall x \in A, (x, x) \notin R$

OBS 11.4. A relação “maior do que” ($>$) no conjunto dos números reais \mathbb{R} é um exemplo de relação com propriedade irreflexiva pois, $\forall x \in \mathbb{R}, \neg(x > x)$.

Relações Binárias

Definição 11.7. Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A . Dizemos que R tem propriedade coreflexiva, somente se: $\forall x, y \in A, (x, y) \in R \rightarrow x = y$

OBS 11.5. A relação de igualdade ($=$) no conjunto dos números reais \mathbb{R} é um exemplo de relação com propriedade coreflexiva. A verificação é trivial pois, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ se $x = y$ então $x = y$.

Definição 11.8. Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A . Dizemos que R tem propriedade simétrica, somente se: $\forall x, y \in A, (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$

OBS 11.6. A relação de parentesco entre as pessoas de uma rua é um exemplo de relação simétrica pois, se x é parente de y então y é parente de x .

Definição 11.9. Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A . Dizemos que R tem propriedade anti-simétrica, somente se: $\forall x, y \in A, (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow x = y$

OBS 11.7. A relação “*maior ou igual*” (\geq) no conjunto dos números reais \mathbb{R} é um exemplo de relação com propriedade anti-simétrica pois, $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \geq y \wedge y \geq x$ então $x = y$.

Definição 11.10. Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A . Dizemos que R tem propriedade assimétrica, somente se: $\forall x, y \in A, (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \notin R$

OBS 11.8. A relação “*maior do que*” ($>$) no conjunto dos números reais \mathbb{R} é um exemplo de relação com propriedade assimétrica pois, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, se $x > y$ não podemos ter $y > x$.

Definição 11.11. Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A . Dizemos que R tem propriedade transitiva, somente se: $\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$

OBS 11.9. A relação “maior ou igual” (\geq) no conjunto dos números reais \mathbb{R} é um exemplo de relação com propriedade transitiva pois, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \geq y$ e $y \geq z$ então $x \geq z$.

Definição 11.12. Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A . Dizemos que R tem propriedade total, somente se: $\forall x, y \in A, (x, y) \in R \vee (y, x) \in R$

OBS 11.10. A relação “maior ou igual” (\geq) no conjunto dos números reais \mathbb{R} é um exemplo de relação com propriedade total pois, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ teremos $x \geq y$ ou $y \geq x$, isto é, qualquer par de números reais é comparável pela relação “maior ou igual”.

Definição 11.13. Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A . Dizemos que R tem propriedade tricotômica, somente se: $\forall x, y \in A, (x, y) \in R \vee (y, x) \in R \vee x = y$

OBS 11.11. A relação “maior do que”, ($>$) no conjunto dos números reais \mathbb{R} é um exemplo de relação com propriedade tricotômica pois, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ teremos de forma exclusiva ou $x = y$ ou $x > y$ ou $y > x$.

Definição 11.14. Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A . Dizemos que R tem propriedade euclidiana, somente se: $\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \wedge (x, z) \in R \rightarrow (y, z) \in R$

OBS 11.12. A relação de igualdade ($=$) no conjunto dos números reais \mathbb{R} é um exemplo de relação com propriedade euclidiana. A verificação é trivial pois, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ se $x = y$ e $x = z$ então $y = z$.

Relações Binárias

11.3 Algumas Demonstrações

Veremos agora, algumas demonstrações envolvendo relações binárias e suas propriedades.

Primeiramente vamos mostrar que:

Propriedade 11.1. *Seja A um conjunto e $R, S \subset A \times A$ duas relações sobre o conjunto A se R e S são transitivas então, $R \cap S$ é transitiva.*

PROVA $\forall x, y, z \in R \cap S$ se $(x, y) \in R \cap S \wedge (y, z) \in R \cap S$ temos que:

Como $(x, y) \in R \cap S$ então $(x, y) \in R \wedge (x, y) \in S$

Por outro lado como $(y, z) \in R \cap S$ então $(y, z) \in R \wedge (y, z) \in S$

Daí, como $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R$ e R é transitiva temos que:

$(x, z) \in R$.

Do mesmo modo, como $(x, y) \in S \wedge (y, z) \in S$ e S é transitiva temos que:

$(x, z) \in S$.

Portanto, temos:

$(x, z) \in R \wedge (x, z) \in S$.

Conseqüentemente:

$(x, z) \in R \cap S$.

Finalmente:

$\forall x, y, z \in R \cap S$ se $(x, y) \in R \cap S \wedge (y, z) \in R \cap S$ então $(x, z) \in R \cap S$.

E a relação $R \cap S$ é transitiva. \square

seguida mostraremos que:

Propriedade 11.2. *Sejam A, B conjuntos e $R, S \subset A \times B$ relações de A em B então $R^{-1} \cap S^{-1} = (R \cap S)^{-1}$.*

PROVA É suficiente mostrar que $R^{-1} \cap S^{-1} \subset (R \cap S)^{-1}$ e $(R \cap S)^{-1} \subset R^{-1} \cap S^{-1}$.

a) Primeiramente mostraremos que: $R^{-1} \cap S^{-1} \subset (R \cap S)^{-1}$.

$\forall (x, y) \in R^{-1} \cap S^{-1}$ temos:

$$(x, y) \in R^{-1} \wedge (x, y) \in S^{-1}.$$

Da definição de relação inversa temos:

$$(x, y) \in R^{-1} \rightarrow (y, x) \in R.$$

Do mesmo modo da definição de relação inversa temos:

$$(x, y) \in S^{-1} \rightarrow (y, x) \in S.$$

Logo temos:

$$(y, x) \in R \wedge (y, x) \in S.$$

Da definição de interseção temos:

$$(y, x) \in R \cap S.$$

Da definição de relação inversa temos:

$$(x, y) \in (R \cap S)^{-1}. \text{ Daí, temos:}$$

$$\forall (x, y) \in R^{-1} \cap S^{-1} \rightarrow (x, y) \in (R \cap S)^{-1}.$$

Da definição de contido temos:

$$R^{-1} \cap S^{-1} \subset (R \cap S)^{-1}.$$

b) Em seguida mostraremos que: $(R \cap S)^{-1} \subset R^{-1} \cap S^{-1}$.

$$\forall (x, y) \in (R \cap S)^{-1}.$$

Da definição de relação inversa temos:

$$(y, x) \in R \cap S.$$

Da definição de interseção temos:

$$(y, x) \in R \wedge (y, x) \in S.$$

Da definição de relação inversa temos:

$$(y, x) \in R \rightarrow (x, y) \in R^{-1}.$$

Do mesmo modo da definição de relação inversa temos:

$$(y, x) \in S \rightarrow (x, y) \in S^{-1}.$$

Relações Binárias

Logo temos:

$$(x, y) \in R^{-1} \wedge (x, y) \in S^{-1}.$$

Da definição de interseção temos:

$$(x, y) \in R^{-1} \cap S^{-1}.$$

Daí, temos:

$$\forall (x, y) \in (R \cap S)^{-1} \rightarrow (x, y) \in R^{-1} \cap S^{-1}.$$

Da definição de contido temos:

$$(R \cap S)^{-1} \subset R^{-1} \cap S^{-1}.$$

Das partes a) e b) temos:

$$(R^{-1} \cap S^{-1} \subset (R \cap S)^{-1}) \wedge ((R \cap S)^{-1} \subset R^{-1} \cap S^{-1})$$

Portanto, da definição de igualdade de conjuntos temos:

$$R^{-1} \cap S^{-1} = (R \cap S)^{-1} \quad \square$$

11.4 CONCLUSÃO

Caro aluno, ao final dessa aula, podemos concluir que relações constituem-se em um dos aspectos da Matemática de aplicação prática mais ampla. Podemos, em teoria, fazer relações com qualquer par de conjuntos.

11.5 RESUMO

Nosso resumo consta das seguintes definições:

Definição de relação binária:

Definição: Sejam A e B dois conjuntos. Definimos como uma relação binária do conjunto A com o conjunto B , denotado R , à qualquer subconjunto do produto cartesiano de A por B :

$$R \subset A \times B$$

Definição de domínio de uma relação.

Definição: Sejam A e B conjuntos e $R \subset A \times B$ uma relação de A em B . Definimos o domínio de R , denotado $Dom(R)$, por:

$$Dom(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A \mid \exists y \in B \wedge (x, y) \in R\}$$

Definição de imagem de uma relação.

Definição: Sejam A e B conjuntos e $R \subset A \times B$ uma relação de A em B . Definimos a imagem de R , denotada $Img(R)$, por:

$$Img(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in B \mid \exists x \in A \wedge (x, y) \in R\}$$

Definição de inversa de uma relação.

Definição: Sejam A e B conjuntos e $R \subset A \times B$ uma relação de A em B . Definimos a inversa da relação R , denotada R^{-1} , por:

$$R^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}$$

Definição de propriedade reflexiva de uma relação.

Definição: Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A . Dizemos que R tem propriedade reflexiva, somente se:

$$\forall x \in A, (x, x) \in R$$

Definição de propriedade irreflexiva de uma relação.

Definição: Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A . Dizemos que R tem propriedade irreflexiva, somente se:

$$\forall x \in A, (x, x) \notin R$$

Definição de propriedade coreflexiva de uma relação.

Definição: Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A . Dizemos que R tem propriedade coreflexiva, somente se:

$$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \rightarrow x = y$$

Definição de propriedade simétrica de uma relação.

Definição: Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A . Dizemos que R tem propriedade simétrica, somente se:

$$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$$

Definição de propriedade anti-simétrica de uma relação.

Relações Binárias

Definição: Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A . Dizemos que R tem propriedade anti-simétrica, somente se:

$$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow x = y$$

Definição de propriedade assimétrica de uma relação.

Definição: Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A . Dizemos que R tem propriedade assimétrica, somente se:

$$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \notin R$$

Definição de propriedade transitiva de uma relação.

Definição: Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A . Dizemos que R tem propriedade transitiva, somente se:

$$\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$$

Definição de propriedade total de uma relação.

Definição: Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A . Dizemos que R tem propriedade total, somente se:

$$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \vee (y, x) \in R$$

Definição de propriedade tricotômica de uma relação.

Definição: Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A . Dizemos que R tem propriedade tricotômica, somente se:

$$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \vee (y, x) \in R \vee x = y$$

Definição de propriedade euclidiana de uma relação.

Definição: Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A . Dizemos que R tem propriedade euclidiana, somente se:

$$\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \wedge (x, z) \in R \rightarrow (y, z) \in R$$

11.6 ATIVIDADES

Deixamos como atividade a demonstração de algumas propriedades acima.

ATIV. 11.1. Sejam A um conjunto e $R, S \subset A \times A$ duas relações sobre o conjunto A . Mostre que, se R e S são transitivas então $R \cup S$ é transitiva.

Comentário: Volte ao texto e reveja com atenção as demonstrações desta aula.

ATIV. 11.2. Sejam A, B conjuntos e $R, S \subset A \times B$ relações de A em B . Mostre que:

$$R^{-1} \cup S^{-1} = (R \cup S)^{-1}.$$

Comentário: Volte ao texto e reveja com atenção as demonstrações desta aula.

11.7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DOMINGUES, Higinio Hugueros. e IEZZI, Gelson. Álgebra Moderna. Atual Editora LTDA. São Paulo. 1979.

CASTRUCCI, Benedito. Elementos da Teoria de Conjuntos. São Paulo: GEEM, 1970.