2 LIVRO

12 AULA

Relações de Ordem

META:

Apresentar o conceito de relações de ordem e suas propriedades.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Determinar se uma dada relação é uma relação de ordem.

Determinar os elementos ninimais, mínimo, maximais e máximo de um dado conjunto.

PRÉ-REQUISITOS

Aula-11 os conhecimentos de relações binárias.

12.1 Introdução

O conceito de relação de ordem é bastante intuitivo. Podemos ver diariamente muitos exemplos de relações de ordem, como por exemplo: uma fila em uma sorveteria, a ordem de prioridades de execução das nossas tarefas diárias, a ordenação léxica de nomes em uma lista de presença, a ordenação numérica de itens a serem comprados ordenados pelos respectivos preços e outros. Nessa aula, faremos uma formalização das idéias por trás do conceito de ordem.

12.2 Relações de Ordem

Começaremos nossa aula conceituando (definindo) relação de ordem:

Definição 12.1. Sejam A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R é uma relação de ordem se, somente se:

PO1 $\forall x \in A, (x, x) \in R$

PO2 $\forall x, y \in A, (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow x = y$

PO3 $\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$.

OBS 12.1. Em outras palavras, dizemos que uma relação R sobre um conjunto A é uma relação de ordem se R for: reflexiva, anti-simétrica e transitiva. A relação de ordem como acima definida é conhecida também como "*relação de ordem parcial*".

Exemplo 12.1. Vejamos alguns exemplos de relações de ordem parciais.

- A relação "*maior ou igual*", ($\geq$) no conjunto dos reais $\mathbb{R}$.
- Dado um conjunto A a relação de "*incluso ou igual*", $\subseteq$ sobre $\mathscr{P}(A)$ o conjunto das partes de A.

Podemos definir em um conjunto A, parcialmente ordenado, uma relação de ordem estrita. A saber:

Definição 12.2. Seja $(A, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Definimos a relação $\prec \in A \times A$ por:
$\forall x, y \in A, x \prec y \leftrightarrow x \preceq y \wedge \neg(x = y)$.

OBS 12.2. O fato de que $x \prec y$ lê-se: "*x precede estritamente y*".

Um tipo particular de relação de ordem é a relação de ordem lexicográfica, definida por:

Definição 12.3. Sejam A e B conjuntos parcialmente ordenados e $\prec^A$ e $\prec^B$ suas relações de ordem estrita. Definimos uma relação de ordem $\prec$, denominada ordem lexicográfica sobre $A \times B$ por: $\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$, $(a_1, b_1) \prec (a_2, b_2)$, somente se:

- $a_1 \prec^A a_2$ ou
- $a_1 = a_2 \wedge b_1 \prec^B b_2$

Podemos definir também o conceito de quasi-ordem. A saber:

Definição 12.4. Sejam A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R é uma relação de quasi-ordem, somente se:

QO1 $\forall x \in A, (x, x) \in R$.

QO2 $\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \to (x, z) \in R$.

OBS 12.3. Em outras palavras, dizemos que uma relação R sobre um conjunto A é uma relação de quasi-ordem se R for: reflexiva e transitiva.

Exemplo 12.2. Vejamos alguns exemplos de relações de quasi-ordem.

- No conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, a relação "*divide*", $(|)$ em que $a|b$ lê-se a divide b.
- Dado um conjunto A a relação de "*incluso ou igual*", $\subseteq$ sobre $\mathscr{P}(A)$ o conjunto das partes de A.

Podemos definir também, o conceito de ordem total. A saber:

Definição 12.5. Sejam A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R é uma relação de ordem total, somente se:

TO1 $\forall x \in A, (x, x) \in R$

TO2 $\forall x, y \in A, (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow x = y$

TO3 $\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$.

TO4 $\forall x, y \in A, (x, y) \in R \vee (y, x) \in R$

OBS 12.4. Em outras palavras, dizemos que uma relação R sobre um conjunto A é uma relação de ordem total se R for: reflexiva, anti-simétrica, transitiva e total.

Exemplo 12.3. Vejamos alguns exemplos de relações de ordem total.

- Seja A o conjunto de todos os acontecimentos na vida de um cidadão. A relação "*aconteceu antes de ou ao mesmo tempo que*", $(\preceq)$ sobre A.

- A relação "*maior ou igual*" ($\geq$) no conjunto dos reais $\mathbb{R}$.

OBS 12.5. Uma relação de ordem total é também uma relação de ordem parcial. Um conjunto A com uma relação $R \in A \times A$ de ordem parcial é denominado "*conjunto parcialmente ordenado*", e o par (A, R) é dito um "*POSET*". Costuma-se, em uma relação de ordem, denotar o fato de $(x, y) \in R$ por $x \preceq y$ que se lê: x precede y na relação R.

Exemplo 12.4. Mais alguns exemplos de relações de ordem.

- Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c)\}$. R_1 é uma relação de ordem parcial pois, nem $(b, c) \in R_1$ nem $(c, b) \in R_1$ e as propriedades reflexiva, anti-simétrica são verificadas por testes diretos e transitiva é trivialmente satisfeita pois, nenhum par de elementos de R satisfaz a premissa da propriedade transitiva.

- Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$. R_2 é uma relação de quasi-ordem. Pois, todos os pares da forma (x, x), $x \in A$ pertence a R_2 o que garante a propriedade reflexiva e propriedade transitiva é trivialmente verificada.

- Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $R_3 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (a, c)\}$. R_3 é uma relação de ordem total. Pois, todos os pares da forma $(x, x), x \in A$ pertence a R_3, nenhum par da forma $(x, y), x, y \in A, x \neq y$ que pertence a relação $(x, y) \in R_3$ arrasta seu simétrico ou seja $(y, x) \notin R_3$. A propriedade transitiva pode ser verificada por exaustão $(a, a) \wedge (a, b) \rightarrow (a, b)$, $(b, b) \wedge (b, c) \rightarrow (b, c)$, $(a, a) \wedge (a, c) \rightarrow (a, c)$ e $(a, b) \wedge (b, c) \rightarrow (a, c)$ e a propriedade total é satisfeita pelos pares $(a,b),(b,c),(a,c)$ para os pares da forma $(x,y), x,y \in A, x \neq y$ e pelos pares $(a,a),(b,b),(c,c)$ para os pares da forma $(x,y), x,y \in A, x = y$.

12.2.1 Cotas Superiores e Cotas Inferiores

Veremos a seguir, algumas definições relativas a subconjuntos de conjuntos parcialmente ordenados. Começaremos pela definição de cota superior de um subconjunto de um conjunto parcialmente ordenado.

Definição 12.6. Sejam $(A, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $X \subset A$. Dizemos que um elemento $\bar{x} \in A$ é uma cota superior de X, se, somente se: $\forall x \in X, x \preceq \bar{x}$

De modo semelhante podemos definir cota inferior de um subconjunto de um conjunto parcialmente ordenado. A saber:

Definição 12.7. Sejam $(A, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $X \subset A$. Dizemos que um elemento $\bar{x} \in A$ é uma cota inferior de X, se, somente se: $\forall x \in X, \bar{x} \preceq x$

12.2.2 Elementos Maximal, Minimal, Máximo e Mínimo

Veremos a seguir, algumas definições relativas a conjuntos parcialmente ordenados. Começaremos pela definição de elemento minimal de um conjunto parcialmente ordenado.

Definição 12.8. Seja $(A, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que um elemento $a \in A$ é um elemento minimal, se, somente se: $\forall x \in A, x \preceq a \rightarrow x = a$

De modo semelhante podemos definir um elemento maximal em um conjunto parcialmente ordenado. A saber:

Definição 12.9. Seja $(A, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que um elemento $a \in A$ é um elemento maximal, se, somente se: $\forall x \in A, a \preceq x \rightarrow x = a$

Adicionalmente definiremos elemento mínimo e elemento máximo de um conjunto parcialmente ordenado. A saber:

Definição 12.10. Seja $(A, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que um elemento $a \in A$ é o elemento mínimo de A, se, somente se: $\forall x \in A, a \preceq x$

Definição 12.11. Seja $(A, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que um elemento $a \in A$ é o elemento máximo de$A$, se, somente se: $\forall x \in A, x \preceq a$

12.3 Algumas Demonstrações

Veremos agora algumas demonstrações envolvendo relações de ordem e suas propriedades.

Teorema 12.1. *Seja* $(A, \preceq)$ *um conjunto parcialmente ordenado então* $\forall x, y, z \in A, x \preceq y \wedge y \prec z \rightarrow x \prec z$

PROVA $\forall x, y, z \in A, x \preceq y \wedge y \prec z$.
Da definição de $y \prec z \leftrightarrow y \preceq z \wedge \neg(y = z)$ temos:
$x \preceq y \wedge (y \preceq z \wedge \neg(y = z))$.
Como $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ temos:
$(x \preceq y \wedge y \preceq z) \wedge \neg(y = z)$.
De PO3 $x \preceq y \wedge y \preceq z \rightarrow x \preceq z$ temos:

$(x \preceq z) \wedge \neg(y = z)$.

Como $p \vdash p \vee q$ temos:

$(x \preceq z) \wedge (\neg(x = y) \vee \neg(y = z))$.

Usando De Morgan temos:

$(x \preceq z) \wedge (\neg((x = y) \wedge (y = z)))$.

Da propriedade transitiva da igualdade $(x = y) \wedge (y = z) \rightarrow x = z$ temos:

$(x \preceq z) \wedge \neg(x = z)$.

Da definição da relação "*precede estritamente*", $(x \preceq z) \wedge \neg(x = z) \leftrightarrow x \prec z$ temos:

$x \prec z$.

Portanto:

$\forall x, y, z \in A, x \preceq y \wedge y \prec z \rightarrow x \prec z$. $\square$

Em seguida mostraremos que:

Teorema 12.2. *Sejam A um conjuntos e $R \subset A \times A$ uma relação de ordem parcial em A, então R^{-1} é uma relação de ordem parcial em A.*

PROVA É suficiente mostrar que R^{-1} satisfaz as propriedades PO1, PO2 e PO3.

a) Primeiramente mostraremos que R^{-1} satisfaz PO1.

Como R é uma relação de ordem parcial em A R satisfaz PO1 e temos:

$\forall x \in (x, x) \in R$.

Da definição de relação inversa $(x, x) \in R \rightarrow (x, x) \in R^{-1}$ e temos:

$\forall x \in A, (x, x) \in R^{-1}$.

b) Em segundo lugar mostraremos que R^{-1} satisfaz PO2.

$\forall x, y \in A, (x, y) \in R^{-1} \wedge (y, x) \in R^{-1}$.

Da definição de relação inversa $(x, y) \in R^{-1} \leftrightarrow (y, x) \in R$ e também $(y, x) \in R^{-1} \leftrightarrow (x, y) \in R$. Daí, temos:

$\forall x, y \in A, (y, x) \in R \wedge (x, y) \in R$.

Como R é uma relação de ordem parcial em A. Logo R satisfaz PO2 $(y, x) \in R \wedge (x, y) \in R \rightarrow y = x$ e temos:

$y = x$.

Como a igualdade tem propriedade comutativa $y = x \rightarrow x = y$ e temos:

$x = y$.

Portanto:

$\forall x, y \in A, (x, y) \in R^{-1} \wedge (y, x) \in R^{-1} \rightarrow x = y$.

c) Em terceiro lugar mostraremos que R^{-1} satisfaz PO3.

$\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R^{-1} \wedge (y, z) \in R^{-1}$.

Da definição de relação inversa $(x, y) \in R^{-1} \leftrightarrow (y, x) \in R$ e também $(y, z) \in R^{-1} \leftrightarrow (z, y) \in R$. Daí, temos:

$\forall x, y, z \in A, (y, x) \in R \wedge (z, y) \in R$.

Como $p \wedge q \equiv q \wedge p$ temos:

$\forall x, y, z \in A, (z, y) \in R \wedge (y, x) \in R$.

Como R é uma relação de ordem parcial em A. Logo R satisfaz PO3 $(z, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow (z, x) \in R$ e temos.

$(z, x) \in R$

Da definição de relação inversa $(z, x) \in R \leftrightarrow (x, z) \in R^{-1}$ e temos:

$\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R^{-1} \wedge (y, z) \in R^{-1} \rightarrow (x, y) \in R^{-1}$.

De a), b) e c) R^{-1} satisfaz PO1, PO2 e PO3 logo é também uma relação de ordem parcial sobre A. $\square$

12.4 CONCLUSÃO

As relações de ordem são constantes tanto na vida real, na natureza quanto na Matemática. E a classificação das relações de ordem em diversos tipos como ordem parcial, quasi-ordem e ordem total, também tem seus pares na vida real.

12.5 RESUMO

Nosso resumo hoje consta das seguintes definições:
Definição de relação de ordem parcial:
Definição: Sejam A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R é uma relação de ordem, se, somente se:

PO1 $\forall x \in A, (x, x) \in R$

PO2 $\forall x, y \in A, (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow x = y$

PO3 $\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$

Definição de relação de quasi-ordem:
Definição: Sejam A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R é uma relação de quasi-ordem, se, somente se:

QO1 $\forall x \in A, (x, x) \in R$

QO2 $\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$

Definição de relação de ordem total:
Definição: Sejam A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R é uma relação de ordem total, se, somente se:

TO1 $\forall x \in A, (x,x) \in R$

TO2 $\forall x, y \in A, (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \rightarrow x = y$

TO3 $\forall x, y, z \in A, (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \rightarrow (x,z) \in R.$

TO4 $\forall x, y \in A, (x,y) \in R \vee (y,x) \in R$

Definição de cota superior de um subconjunto de um conjunto parcialmente ordenado:

Definição: Sejam $(A, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $X \subset A$. Dizemos que um elemento $\bar{x} \in A$ é uma cota superior de X, se, somente se: $\forall x \in X, x \preceq \bar{x}$

Definição de cota inferior de um subconjunto de um conjunto parcialmente ordenado:

Definição: Sejam $(A, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $X \subset A$. Dizemos que um elemento $\bar{x} \in A$ é uma cota inferior de X, se, somente se: $\forall x \in X, \bar{x} \preceq x$

Definição elemento minimal de um subconjunto de um conjunto parcialmente ordenado:

Definição: Seja $(A, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que um elemento $a \in A$ é um elemento minimal, se, somente se: $\forall x \in A, x \preceq a \rightarrow x = a$

Definição de elemento maximal de um subconjunto de um conjunto parcialmente ordenado:

Definição: Seja $(A, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que um elemento $a \in A$ é um elemento maximal, se, somente se: $\forall x \in A, a \preceq x \rightarrow x = a$

Definição de elemento mínimo:

Definição: Seja $(A, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que um elemento $a \in A$ é o elemento mínimo de A, se, somente se: $\forall x \in A, a \preceq x$

Definição de elemento máximo:

Definição: Seja $(A, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que um elemento $a \in A$ é o elemento máximo de$A$, se, somente se: $\forall x \in A, x \preceq a$

12.6 ATIVIDADES

Deixamos como atividades algumas demonstrações sobre relações de ordem

ATIV. 12.1. Seja $(A, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado então $\forall x, y, z \in A, x \prec y \wedge y \prec z \rightarrow x \prec z$.

Comentário: Reveja a demonstração do teorema 12.1. Ela será seu ponto de partida. Com alguma modificação poderá ser usada para provar a proposição desta atividade.

ATIV. 12.2. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ e escreva a relação de ordem R dada por: $\forall x, y \in A, (x \preceq y \leftrightarrow x|y$ (x precede y se, somente se x divide y).

Comentário: Note que esta relação não é de ordem total. Por exemplo nem par $(3, 4)$ nem $(4, 3)$ está na relação já que nem 3 divide 4 nem 4 divide 3.

12.7 REFERÊNCIAS BIBLIOGÁFICAS

DOMINGUES, Higino Hugueros. e IEZZI, Gelson., Álgebra Moderna. Atual Editora LTDA. São Paulo. 1979.

CASTRUCCI, Benedito., Elementos da Teoria de Conjuntos. São

Fundamentos da Matemática: Livro 2

Paulo: GEEM, 1970.