2
LIVRO

13
AULA

Relações de Equivalência

META:

Introduzir o conceito de relações de equivalência e suas propriedades.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Identificar se uma dada relação é uma relação de equivalência.

Determinar as classes de equivalência de uma relação de equivalência.

Determinar a partição de um conjunto por uma relação de equivalência.

PRÉ-REQUISITOS

Aula-11 os conhecimentos de relações binárias.

13.1 Introdução

O conceito de relação de equivalência assim como o conceito de relação de ordem também é bastante intuitivo. Podemos ver diariamente muitos exemplos de relações de equivalência. Em uma farmácia podemos classificar como equivalentes os remédios que têm o mesmo princípio ativo; em uma biblioteca podemos classificar como equivalentes os livros que tratam do mesmo tema etc. Nessa aula, faremos uma formalização das idéias, por trás, do conceito de relação de equivalência.

13.2 Relações de Equivalência

Começaremos diretamente ao conceito (definição) de relação de equivalência:

Definição 13.1. Sejam A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R é uma relação de equivalência se, somente se:

E1 $\forall x \in A, (x, x) \in R$

E2 $\forall x, y \in A, (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$

E3 $\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R.$

OBS 13.1. Em outras palavras, dizemos que uma relação R sobre um conjunto A é uma relação de equivalência se R for: reflexiva, simétrica e transitiva.

Exemplo 13.1. Vejamos alguns exemplos de relações de equivalência.

- A relação "*igual a*", $(=)$ no conjunto dos reais $\mathbb{R}$.
  - $\forall x(x = x)$
  - $\forall x, y \in \mathbb{R}(x = y \to y = x)$
  - $\forall x, y, z \in \mathbb{R}(x = y \wedge y = z \to x = z)$.
- A relação de congruência módulo m sobre o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$ i.e. Dizemos que $x, y \in \mathbb{Z}$ são equivalentes, somente se $x \equiv y \mod m$ (o resto da divisão de $x - y$ por $m > 0$ é zero).
  - $\forall x \in \mathbb{Z}(x \equiv x \mod m)$
  - $\forall x, y \in \mathbb{Z}(x \equiv y \mod m \to y \equiv x \mod m)$
  - $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}(x \equiv y \mod m \wedge y \equiv z \mod m \to x \equiv z \mod m)$.
- Seja A o conjunto de todas as retas de um dado plano. A relação de paralelismo entre duas retas é uma relação de equivalência.
  - $\forall x \in A(x \parallel x)$
  - $\forall x, y \in A(x \parallel y \to y \parallel x)$
  - $\forall x, y, z \in A(x \parallel y \wedge y \parallel z \to x \parallel z)$.
- Seja $A = \{a, b, c\}$ é de equivalência a relação $R \in A \times A$ dada por:
  $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$.
  Para este caso temos:
  - Como $(a, a), (b, b), (c, c) \in R$ isto garante que $\forall x \in A, (x, x) \in R$

- Como $(a,a) \to (a,a)$, $(b,b) \to (b,b)$, $(c,c) \to (c,c)$, $(a,b) \to (b,a)$ e $(b,a) \to (a,b)$ isto garante que $\forall x,y \in A, (x,y) \in R \to (y,x) \in R$
- Como $(a,a) \wedge (a,a) \to (a,a)$, $(b,b) \wedge (b,b) \to (b,b)$, $(c,c) \wedge (c,c) \to (c,c)$, $(a,b) \wedge (b,b) \to (b,b)$, $(a,a) \wedge (a,b) \to (a,b)$, $(b,a) \wedge (a,a) \to (b,a)$ e $(b,b) \wedge (b,a) \to (b,a)$ isto garante que $\forall x,y,z \in A, (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \to (x,z) \in R$.

OBS 13.2. Relações de equivalência podem ser vistas como extensões do conceito de igualdade. De modo geral, sempre que não houver dúvidas quanto a relação de equivalência em um dado conjunto, denotaremos $x \equiv y$ para escrever que x é equivalente a y.

13.2.1 Partições e Classes de Equivalência

Existe uma forma alternativa de se pensar relações de equivalências. Para isto, precisamos de duas definições. A definição de partição de um conjunto não vazio e a definição de classes de equivalência. Começaremos pela definição de classes de equivalência

Definição 13.2. Sejam A um conjunto não vazio, $R \subset A \times A$ uma relação de equivalência em A e $a \in A$. Definimos a classe de equivalência do elemento $a \in A$, denotada $\bar{a}$, por:
$\bar{a} \overset{\text{def}}{=} \{x \in A | \, (x,a) \in R\}$

Exemplo 13.2. Seja A um cesto de frutas e peguemos sacolas plásticas e separemos as frutas nas sacola segundo a relação de equivalência: duas frutas são equivalentes se são da mesma espécie. Cada sacola, neste caso, comportará apenas frutas de mesma espécie. Cada sacola representa uma classe de equivalência.

Definimos o conjunto quociente por:

Definição 13.3. Sejam A um conjunto não vazio e $R \subset A \times A$ uma relação de equivalência em A. Definimos o conjunto quociente de A por R, denotado A/R, por:
$A/R \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{x}, \forall x \in A\}$

Exemplo 13.3. Seja $A = \{a, b, c\}$ e a relação de equivalência $R \subset A \times A$ dada por:
$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$.
Para este caso temos:

- $\bar{a} = \{a, b\}$
- $\bar{b} = \{a, b\}$
- $\bar{c} = \{c\}$
- $A/R = \{\{a, b\}, \{c\}\}$

Exemplo 13.4. Voltando ao exemplo do conjunto A, um cesto de frutas. O conjunto de sacolas plásticas com as frutas separadas por espécies e arrumadas dentro da cesta representa o conjunto quociente A/R.

Um teorema, só para relaxar, cujo conteúdo mostra que: elementos que estão relacionados em uma relação de equivalência têm mesma classe de equivalência.

Teorema 13.1. *Sejam A um conjunto não vazio e $R \subset A \times A$ uma relação de equivalência, $\forall a, b \in A, (a, b) \in R \rightarrow \bar{a} = \bar{b}$.*

PROVA: $\forall z \in \bar{a}$, da definição temos:
$(z, a) \in R$.

Da hipótese $(a, b) \in R$. Dai, temos:

$(z, a) \in R \wedge (a, b) \in R$.

Como R é uma relação de equivalência, vale a propriedade transitiva e temos:

$(z, a) \in R \wedge (a, b) \in R \rightarrow (z, b) \in R$.

Como $(z, b) \in R$, da definição de classe de equivalência temos:

$z \in \bar{b}$.

Daí, temos:

$\forall z \in \bar{a} \rightarrow z \in \bar{b}$.

Da definição de contido temos:

$\bar{a} \subset \bar{b}$.

Do mesmo modo, podemos mostrar que:

$\bar{b} \subset \bar{a}$.

Logo:

$(\bar{a} \subset \bar{b}) \wedge (\bar{b} \subset \bar{a})$.

Da igualdade de conjuntos temos:

$\bar{a} = \bar{b}$

E finalmente:

$\forall a, b \in A, (a, b) \in R \rightarrow \bar{a} = \bar{b}$. $\square$

Outro conceito importante é o de partição. A saber:

Definição 13.4. Sejam A um conjunto e $P \subset \mathscr{P}(A)$ um subconjunto das partes de A. Dizemos que P é uma partição de A, somente se:

i - $\forall X \in P, X \subset A \wedge X \neq \emptyset$

ii - $\forall X, Y \in P, X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \phi$

iii - $\cup P = A$

Exemplo 13.5. Seja $A = \{a, b, c, d, e\}$. $P = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d, e\}\}$ é uma partição de A.

OBS 13.3. A definição de partição não se restringe a conjuntos finitos. Conjuntos infinitos também podem ter partições. É o caso de tomarmos $A = [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ e $P = \{X_n = [n, n+1), \forall n \in \mathbb{N}\}$. Temos que $\forall X_n \in P, X_n \neq \emptyset$, $\forall X_n, X_k \in P, n \neq k, X_n \cap X_k = \emptyset$ e $A = \cup P$.

13.3 Algumas Demonstrações

Veremos agora, que uma relação de equivalência determina uma partição sobre um conjunto e que uma partição determina uma relação de equivalência sobre uma conjunto.
Primeramente vamos mostrar que:

Teorema 13.2. *Sejam A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de equivalência sobre A então, A/R é uma partição de A.*

PROVA:
a)$\forall \bar{a} \in A/R$.
Como R é uma relação de equivalência $(a, a) \in R$. Portanto:
$a \in \bar{a}$.
Daí, temos:
$\bar{a} \neq \emptyset$.
Logo:
$\forall \bar{a} \in A/R, \bar{a} \neq \emptyset$.
b) $\forall \bar{a}, \bar{b} \in A/R, \bar{a} \neq \bar{b}$.
Consideremos a hipótese nula:
HN $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$.
Daí, temos:

$\exists z \in \bar{a} \cap \bar{b}$.

Logo:

$z \in \bar{a} \wedge z \in \bar{b}$.

Da definição de classe de equivalência.

$(z, a) \in R \wedge (z, b) \in R$.

Como R é uma relação de equivalência tem propriedade simétrica

$(z, a) \in R \rightarrow (a, z) \in R$ e temos:

$(a, z) \in R \wedge (z, b) \in R$.

Como R é uma relação de equivalência tem propriedade transitiva

$(a, z) \in R \wedge (z, b) \in R \rightarrow (a, b) \in R$ e temos:

$(a, b) \in R$.

Do teorema **13.1** $(a, b) \in R \rightarrow \bar{a} = \bar{b}$ e temos:

$\bar{a} = \bar{b}$.

Daí, e da hipótese temos:

$(\bar{a} = \bar{b}) \wedge (\bar{a} \neq \bar{b})$.

Absurdo. Logo **HN** é falsa e $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$.

Portanto.

$\forall \bar{a}, \bar{b} \in A/R, \bar{a} \neq \bar{b} \rightarrow \bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$.

c) $\forall a \in A, \bar{a} \in A/R$.

Logo:

$$\bigcup_{a \in A} \bar{a} \subset A.$$

Por outro lado:

$\forall x \in A$.

Como R é uma relação de equivalência tem propriedade reflexiva e $(x, x) \in R$ e temos:

$x \in \bar{x}$.

Logo:

$x \in \bigcup_{a \in A} \bar{a}$.

Dai, temos:

$\forall x \in A \rightarrow x \in \bigcup_{a \in A} \bar{a}$.

Da definição de contido temos:

$A \subset \bigcup_{a \in A} \bar{a}$.

Como $(\bigcup_{a \in A} \bar{a} \subset A) \wedge (A \subset \bigcup_{a \in A} \bar{a})$, da igualdade de conjuntos temos:

$\bigcup_{a \in A} \bar{a} = A$ ou escrevendo de outra forma $\bigcup A/R = A$.

Juntando as proposições temos:

i - $\forall \bar{a} \in A/R, \bar{a} \neq \emptyset$

ii - $\forall \bar{a}, \bar{b} \in A/R, \bar{a} \neq \bar{b} \rightarrow \bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$

iii - $\bigcup A/R = A$

Logo A/R é uma partição de A. $\square$

Conversivelmente, uma partição determina uma relação de equivalência sobre um conjunto dado, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 13.3. *Sejam A uma conjunto e $P \subset \mathscr{P}(A)$ uma partição de A, então existe uma relação $R \subset A \times A$ de equivalência em A tal que $A/R = P$.*

PROVA:

Seja $R \subset A \times A$ a relação definida por:

$(x, y) \in R \leftrightarrow \exists X \in P | x \in X \wedge y \in X$.

Daí, temos:

a) $\forall x \in A$, como P é uma particão de A, $\exists X \in P | x \in X$.

Logo: $(x, x) \in R$.

Daí, temos:

$\forall x \in A, (x, x) \in R$.

b) $\forall x \in A \forall y \in A$.

Da definição da relação R temos:

$(x, y) \in R \leftrightarrow \exists X \in P |\, x \in X \wedge y \in X$.

Como $x \in X \wedge y \in X \equiv y \in X \wedge x \in X$ temos:

$(x, y) \in R \leftrightarrow \exists X \in P |\, y \in X \wedge x \in X$.

Da definição da relação R temos:

$\exists X \in P |\, y \in X \wedge x \in P \leftrightarrow (y, x) \in R$.

Portanto:

$(x, y) \in R \leftrightarrow (y, x) \in R$.

Portanto temos:

$\forall x, y \in A((x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R)$.

c) $\forall x \in A \forall y \in A \forall z \in A$.

Da definição da relação R temos:

$(x, y) \in R \leftrightarrow \exists X_1 \in P |\, x \in X_1 \wedge y \in X_1$.

$(y, z) \in R \leftrightarrow \exists X_2 \in P |\, y \in X_2 \wedge z \in X_2$.

Como $y \in X_1 \wedge y \in X_2$ temos:

$X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$.

Como $X_1, X_2 \in P$ e P é uma partição temos:

$X_1 \cap X_2 \neq \emptyset \rightarrow X_1 = X_2$.

Portanto:

$x \in X_1 \wedge z \in X_1$.

Daí, temos:

$\exists X_1 \in P |\, x \in X_1 \wedge z \in X_1$.

Da definição da relação R temos:

$\exists X_1 \in P |\, x \in X_1 \wedge z \in X_1 \leftrightarrow (x, z) \in R$.

Logo:

$\forall x, y, z \in A((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R)$.

Juntando as proposições temos:

i - $\forall x \in A, (x, x) \in R$

ii - $\forall x, y \in A((x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R)$

iii - $\forall x, y, z \in A((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R)$

Logo, $R \subset A \times A$ é uma relação de equivalência em A. $\square$

13.4 CONCLUSÃO

Concluímos que, assim como as relações de ordem, as relações de equivalência também são muito comuns. Na prática, as relações de equivalência são aquilo que definimos como igualdade de objetos.

13.5 RESUMO

Hoje, nosso resumo consta das seguintes definições:
Definição de relação de equivalência:
Definição: Sejam A um conjuntos e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R é uma relação de equivalência se, somente se:

E1 $\forall x \in A, (x, x) \in R$

E2 $\forall x, y \in A, (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$

E3 $\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$.

Definição de classe de equivalência:
Definição: Sejam A um conjunto não vazio, R uma relação de equivalência em A e $a \in A$. Definimos a classe de equivalência do

elemento $a \in A$, denotada $\bar{a}$, por:

$\bar{a} = \{x \in A | \, (x, y) \in R\}$

Definição de conjunto quociente:

Definição: Sejam A um conjunto não vazio e R uma relação de equivalência em A. Definimos o conjunto quociente de A por R, denotado A/R, por:

$A/R = \{\bar{x}, \forall x \in A\}$

Definição de partição de um conjunto:

Definição: Sejam A um conjunto e $P \subset \mathscr{P}(A)$ um conjunto de partes de A. Dizemos que P é uma partição de A, somente se:

i - $\forall X \in P, X \subset A \wedge X \neq \emptyset$

ii - $\forall X, X \in P, X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \phi$

iii - $\cup P = A$

13.6 ATIVIDADES

Deixamos como atividades a demonstração de alguma propriedades acima.

ATIV. 13.1. Seja A é um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de equivalência sobre A. Mostre que: $\forall a, b \in A, \bar{a} = \bar{b} \vee \bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$.

Comentário: Reveja a demonstração do teorema 13.1. Esta atividade é sua contrapositiva.

ATIV. 13.2. Sejam A um conjunto e $P \subset \mathscr{P}(A$ uma partição de A dados por:

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$ e

$P = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d, e, f\}\}$.

Determine a relação de equivalência $R \subset A \times A$ associada a P.

Comentário: Lembre-se que, cada elemento de cada elemento da partição estará na relação.

13.7 REFERÊNCIAS BIBLIOGÁFICAS

DOMINGUES, Higino Hugueros. e IEZZI, Gelson. Álgebra Moderna. Atual Editora LTDA. São Paulo. 1979.

CASTRUCCI, Benedito. Elementos da Teoria de Conjuntos. São Paulo: GEEM, 1970.