2
LIVRO

14
AULA

Funções

META:

Apresentar o conceitos de funções.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Identificar se uma dada relção é uma função.

Determinar a imagem direta e a imagem inversa de subconjuntos por uma função.

PRÉ-REQUISITOS

Aula-11 os conhecimentos de relações binárias.

14.1 Introdução

Caro aluno, o conceito de função, diferentemente do conceito de relação, não é intuitivo. Muito embora vejamos no dia a dia muitos exemplos de funções. Em uma sala de aula a altura associada a cada aluno é uma função (cada aluno só tem uma altura). Em uma cesta de frutas o peso de cada fruta é uma função do conjunto das frutas da cesta no conjunto dos números reais etc. Aqui faremos uma formalização das idéias do conceito de função.

14.2 Funções

Começaremos diretamente ao conceito (definição) de função:

Definição 14.1. Sejam A e B dois conjuntos e $F \subset A \times A$ uma relação. Dizemos que F é uma função de A em B, denotada $F : A \mapsto B$ se, somente se:

Func1 $\forall x \in A, \exists y \in B |\, (x, y) \in F$

Func2 $\forall x \in A, \forall y, z \in B, (x, y) \in F \wedge (x, z) \in F \rightarrow y = z$

OBS 14.1. Em outras palavras, dizemos que uma relação $F \subset A \times B$ do conjunto A sobre o conjunto B é uma função quando todos os elementos do conjunto A participam da relação e cada elemento do conjunto A está em relação com apenas um único elemento do conjunto B.

OBS 14.2. O conjunto A é denominado de domínio da função F e denotado $Dom(F) = A$ enquanto que o conjunto B é denominado de contradomínio de F e denotado $Cdom(F) = B$.

OBS 14.3. Dados A e B dois conjuntos, para denotar que uma relação $F \subset A \times B$ em particular é uma função e $x \in A$ e $y \in B$ estão relacionados pela função $(x, y) \in F$, escrevemos $y = F(x)$. O objeto x é denominado argumento da função e o objeto y é denominado imagem de x pela função F. Um conjunto importante é o denominado imagem da função e dado por: $Img(F) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in B|\, \exists x \in A, y = F(x)\}$.

Exemplo 14.1. Vejamos alguns exemplos de funções.

- Sejam A, B dois conjuntos dados por $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. A relação $F_1 \subset A \times B$ dada por $F_1 = \{(a, 1), (b, 3), (c, 2), (d, 2)\}$ é uma função **Fig 14.1**. Neste caso, o domínio de F_1 é $Dom(F_1) = A = \{a, b, c, d\}$ e o contradomínio de F_1 é $Cdom(F_1) = B = \{1, 2, 3\}$.

- Sejam A, B dois conjuntos dados por $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. A relação $F_2 \subset A \times B$ dada por $F_2 = \{(a, 2), (b, 1), (c, 1), (d, 1)\}$ é uma função **Fig 14.2**. Neste caso nem todos os elementos do conjunto B participam da relação. O domínio de F_2 é $Dom(F_2) = A = \{a, b, c, d\}$ e o contradomínio de F_2 é $Cdom(F_2) = \{1, 2\} \neq B$.

- Sejam A, B dois conjuntos dados por $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. A relação $F_3 \subset A \times B$ dada por $F_3 = \{(a, 1), (b, 1), (b, 3), (d, 2)\}$ não é uma função **Fig 14.3** pois, viola **Func1** o elemento $c \in A$ não participa da relação F_3 e viola **Func2** pois o elemento $b \in A$ está relacionado com dois elementos $1, 3 \in B$.

- Sejam A, B dois conjuntos dados por $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. A relação $F_4 \subset A \times B$ dada por $F_4 = \{(a, 2), (a, 3),$

$(b, 1), (c, 1)\}$ não é uma função **Fig 14.4**. pois viola **Func1** o elemento $d \in A$ não participa da relação F_4 e viola **Func2** pois, o elemento $a \in A$ está relacionado com dois elementos $2, 3 \in B$.

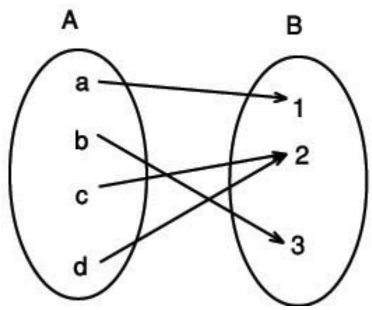

Figura 14.1: Função F_1

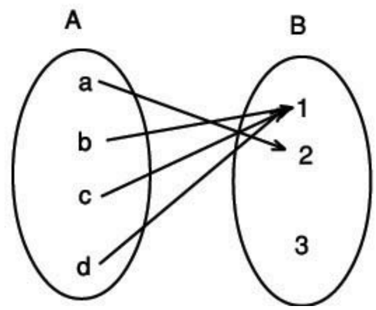

Figura 14.2: Função F_2

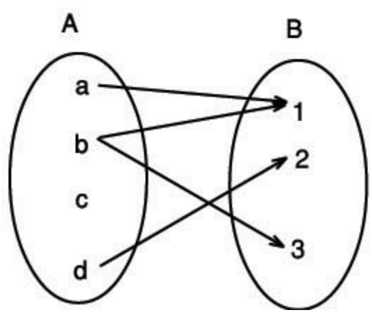

Figura 14.3: Não função F_3

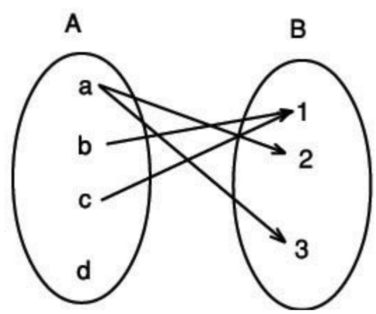

Figura 14.4: Não função F_4

14.2.1 Imagem Direta e Imagem Inversa

Neste momento, introduziremos dois conceitos importantes no estudo das funções. São os conceitos de imagem direta de um subconjunto do domínio e o de imagem inversa de um subconjunto do contradomínio. Começaremos pela definição de imagem direta.

Definição 14.2. Sejam A e B dois conjuntos não vazios, $F : A \mapsto B$ uma função de A em B e $X \subset A$ um subconjunto do domínio da função F. Definimos a imagem direta de X por F, denotada $F(X)$, por:
$F(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in B| \, \exists x \in X, y = F(x)\}$.

Exemplo 14.2. Seguindo o exemplo da função $F_1 : A \mapsto B$ com $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$ dada por $F_1 = \{(a, 1), (b, 3), (c, 2), (d, 2)\}$ **Fig 14.1** a imagem direta do conjunto $\{a, c, d\}$ é $F_1(\{a, c, d\}) = \{1, 2\}$ e a imagem direta do conjunto $\{a, b, c\}$ é $F_1(\{a, b, c\}) = \{1, 2, 3\}$.

A imagem direta de subconjuntos do domínio de uma função $F : A \mapsto B$ tem, entre outras, as seguintes propriedades:

i - $\forall X, Y \subset A, F(X \cup Y) = F(X) \cup F(Y)$

ii - $\forall X, Y \subset A, F(X \cap Y) \subset F(X) \cap F(Y)$

iii - $\forall X, Y \subset A, X \subset Y \rightarrow F(X) \subset F(Y)$

iv - $F(A) = Img(F)$

v - $F(\emptyset) = \emptyset$

Quanto a imagem inversa de subconjuntos do contradomínio de uma função, sua definição é:

Definição 14.3. Sejam A e B dois conjuntos não vazios, $F : A \mapsto B$ uma função de A em B e $Y \subset B$ um subconjunto do contradomínio da função F. Definimos a imagem inversa de Y por F, denotada $F^{-1}(Y)$, por:
$F^{-1}(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A| \, F(x) \in Y\}$.

Exemplo 14.3. Seguindo o exemplo da função $F_2 : A \mapsto B$ com $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$ dada por $F_2 = \{(a, 2), (b, 1), (c, 1), (d, 1)\}$, **Fig 14.2**, a imagem inversa do conjunto $\{1, 2\}$ é $F_2^{-1}(\{1, 2\}) = \{a, b, c, d\}$ e a imagem inversa do conjunto $\{3\}$ é $F_2^{-1}(\{3\}) = \emptyset$ pois $3 \in B$ não está relacionado com nenhum $x \in A$.

A imagem inversa de subconjuntos do contradomínio de uma função $F : A \mapsto B$ tem, entre outras, as seguintes propriedades:

i - $\forall X, Y \subset B, F^{-1}(X \cup Y) = F^{-1}(X) \cup F^{-1}(Y)$

ii - $\forall X, Y \subset B, F^{-1}(X \cap Y) = F^{-1}(X) \cap F^{-1}(Y)$

iii - $\forall X, Y \subset B, X \subset Y \rightarrow F^{-1}(X) \subset F^{-1}(Y)$

iv - $\forall X \subset B, F^{-1}(\complement_B(X)) = \complement_A(F^{-1}(X))$

v - $F^{-1}(B) = Dom(F)$

vi - $F^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

Um conceito importante no estudo das funções é o de composição de funções. A saber:

Definição 14.4. Sejam A, B, C três conjuntos e $F : A \mapsto B$ e $G : B \mapsto C$ duas funções. Definimos a função composta de G com F, denotada $G \circ F$, por:
$(G \circ F)(x) \stackrel{\text{def}}{=} G(F(x)), \forall x \in A$

Exemplo 14.4. Vejamos um exemplo de composição de funções: Sejam $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$ e $C = \{1, 2, 3\}$ três conjuntos e $F : A \mapsto B$ e $G : B \mapsto C$ duas funções dadas por $F = \{(a, x), (b, y), (c, x)\}$ e $G = \{(x, 1), (y, 3)\}$. A função composta $G \circ F : A \mapsto C$ é dada por $G \circ F = \{(a, 1), (b, 3), (c, 1)\}$ **Fig 14.5**.

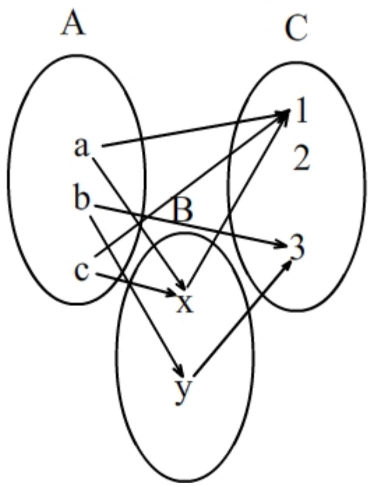

Figura 14.5: Função Composta

14.3 Algumas Demonstrações

Nesta seção, demonstraremos algumas das propriedades da imagem direta de subconjuntos do domínio de uma função e algumas das propriedades da imagem inversa de subconjuntos do contradomínio de uma função.

Primeiramente mostraremos que:

Teorema 14.1. *Sejam A, B dois conjuntos e $F : A \mapsto B$ uma função de A em B então $\forall X, Y \subset A, F(X \cup Y) = F(X) \cup F(Y)$.*

PROVA: É suficiente mostrar que: $F(X \cup Y) \subset F(X) \cup F(Y)$ e que $F(X) \cup F(Y) \subset F(X \cup Y)$.

a) Primeiramente vamos mostrar que $F(X \cup Y) \subset F(X) \cup F(Y)$

$\forall z \in F(X \cup Y)$.

Da definição de imagem direta temos:

$\exists x \in (X \cup Y) \wedge z = f(x)$.

Daí, temos:

$(\exists x \in X \wedge z = f(x)) \vee (\exists x \in Y \wedge z = f(x))$.

Da definição de imagem direta temos:

$(z \in F(X)) \vee (z \in F(Y))$.

Da definição de união de conjuntos temos:

$z \in F(X) \cup F(Y)$.

Portanto:

$\forall z \in F(X \cup Y) \rightarrow z \in F(X) \cup F(Y)$.

Da definição de contido:

$F(X \cup Y) \subset F(X) \cup F(Y)$.

b) Nesse segundo momento mostraremos que $F(X) \cup F(Y) \subset F(X \cup Y)$

$\forall z \in F(X) \cup F(Y)$.

Da definição de união de conjuntos temos:

$z \in F(X) \vee z \in F(Y)$.

Da definição de imagem direta temos:

$(\exists x_1 \in X \wedge z = f(x_1)) \vee (\exists x_2 \in Y \wedge z = f(x_1)$.

Logo: $\exists (x \in X \vee x \in Y) \wedge z = F(x)$.

Da definição de união de conjuntos temos:

$\exists x \in X \cup Y \wedge z = F(x)$.

Da definição de imagem direta temos:

$z \in F(X \cup Y)$.

Daí, temos:

$\forall z \in F(X) \cup F(Y) \rightarrow z \in F(X \cup Y)$.

Da definição de contido temos:

$F(X) \cup F(Y) \subset F(X \cup Y)$.

Das partes a) e b) temos:

$(F(X \cup Y) \subset F(X) \cup F(Y)) \wedge (F(X) \cup F(Y) \subset F(X \cup Y))$.

Finalmente, da igualdade de conjuntos temos:

$\forall X, Y \subset A, F(X \cup Y) = F(X) \cup F(Y)$. $\square$

Vamos agora a uma demonstração de uma das propriedades da imagem inversa de subconjuntos do contradomínio de uma função. A saber:

Teorema 14.2. *Sejam A, B dois conjuntos e $F : A \mapsto B$ uma função de A em B então $\forall X \subset B, F^{-1}(\complement_B(X)) = \complement_A(F^{-1}(X))$.*

PROVA: É suficiente mostrar que: $F^{-1}(\complement_B(X)) \subset \complement_A(F^{-1}(X))$ e $\complement_A(F^{-1}(X)) \subset F^{-1}(\complement_B(X))$.

a) Primeiramente, mostraremos que $F^{-1}(\complement_B(X)) \subset \complement_A(F^{-1}(X))$

$\forall x \in F^{-1}(\complement_B(X))$.

Da definição de imagem inversa temos:

$F(x) \in \complement_B(X)$.

Da definição de complementar temos:

$F(x) \in B \wedge F(x) \notin X$.

Como $F(x) \in B \rightarrow x \in A$ temos:

$x \in A \wedge \neg(F(x) \in X)$.

Da definição de imagem inversa temos:

$x \in A \wedge \neg(x \in F^{-1}(X))$.

Daí, temos:

$x \in A \wedge x \notin F^{-1}(X)$.

Da definição de complementar temos:

$x \in \complement_A(F^{-1}(X))$.

Logo:

$\forall x \in F^{-1}(\complement_B(X)) \rightarrow x \in \complement_A(F^{-1}(X))$.

Da definição de contido temos:

$F^{-1}(\complement_B(X)) \subset \complement_A(F^{-1}(X))$.

b) Em segundo lugar mostraremos que $\complement_A(F^{-1}(X)) \subset F^{-1}(\complement_B(X))$.

$\forall x \in \complement_A(F^{-1}(X))$.

Da definição de complementar temos:

$x \in A \wedge x \notin F^{-1}(X)$.

Como da definição de função $x \in A \rightarrow F(x) \in B$ temos:

$F(x) \in B \wedge x \notin F^{-1}(X)$.

De outro modo:

$F(x) \in B \wedge \neg(x \in F^{-1}(X))$.

Da definição de imagem inversa temos:

$F(x) \in B \wedge \neg(F(x) \in X)$.

Daí, temos:

$F(x) \in B \wedge F(x) \notin X$.

Da definição de complementar temos:

$F(x) \in \complement_B(X)$.

Da definição de imagem inversa temos:

$x \in F^{-1}(\complement_B(X))$.

Logo: $\forall x \in \complement_A(F^{-1}(X)) \rightarrow x \in F^{-1}(\complement_B(X))$.

Da definição de contido temos:

$\complement_A(F^{-1}(X)) \subset F^{-1}(\complement_B(X))$.

Das partes a) e b) temos:

$(F^{-1}(\complement_B(X)) \subset \complement_A(F^{-1}(X))) \wedge (\complement_A(F^{-1}(X)) \subset F^{-1}(\complement_B(X)))$.

Finalmente, da igualdade de conjuntos temos:

$\forall X \subset B, F^{-1}(\complement_B(X)) = \complement_A(F^{-1}(X))$. $\square$

14.4 CONCLUSÃO

Funções são menos intuitivas que as relações. Porém, nem por isto são menos importantes.

14.5 RESUMO

Nosso resumo consta das seguintes definições e propriedades:

Definição de função:

Definição: Sejam A e B dois conjuntos e $F \subset A \times A$ uma relação. Dizemos que f é uma função de A em B, denotada $F : A \mapsto B$ se, somente se:

Func1 $\forall x \in A, \exists y \in B | \, (x, y) \in F$

Func2 $\forall x \in A, \forall y, z \in B, (x, y) \in F \wedge (x, z) \in F \rightarrow y = z$

Definição de função composta:

Definição: Sejam A, B, C três conjuntos e $F : A \mapsto B$ e $G : B \mapsto C$ duas funções. Definimos a função composta de G com F, denotada $G \circ F$, por:

$(G \circ F)(x) \stackrel{\text{def}}{=} G(f(x)), \forall x \in A$

Definição de imagem direta de um subconjunto do domínio:

Definição: Sejam A e B dois conjuntos não vazios, $F \subset A \times B$ uma função de A em B e $X \subset A$ um subconjunto do domínio da função F. Definimos a imagem direta de X por F, denotada $F(X)$, por:

$F(X) = \{y \in B | \, \exists x \in X \wedge y = F(x)\}$.

Definição de imagem inversa de um subconjunto do contradomínio:

Definição: Sejam A e B dois conjuntos não vazios, $F \subset A \times B$ uma função de A em B e $Y \subset B$ um subconjunto do contradomínio da função F. Definimos a imagem inversa de Y por F, denotada $F^{-1}(Y)$, por:

$F^{-1}(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A | \, F(x) \in Y\}$.

Propriedades da imagem direta de subconjuntos do domínio de uma função $F : A \mapsto B$:

i - $\forall X, Y \subset A, F(X \cup Y) = F(X) \cup F(Y)$

ii - $\forall X, Y \subset A, F(X \cap Y) \subset F(X) \cap F(Y)$

iii - $\forall X, Y \subset A, X \subset Y \rightarrow F(X) \subset F(Y)$

iv - $F(A) = Img(F)$

v - $F(\emptyset) = \emptyset$

Propriedades da imagem inversa de subconjuntos do contradomínio de uma função $F : A \mapsto B$:

i - $\forall X, Y \subset B, F^{-1}(X \cup Y) = F^{-1}(X) \cup F^{-1}(Y)$

ii - $\forall X, Y \subset B, F^{-1}(X \cap Y) = F^{-1}(X) \cap F^{-1}(Y)$

iii - $\forall X, Y \subset B, X \subset Y \rightarrow F^{-1}(X) \subset F^{-1}(Y)$

iv - $\forall X \subset B, F^{-1}(\complement_B(X)) = \complement_A(F^{-1}(X))$

v - $F^{-1}(B) = Dom(F)$

vi - $F^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

14.6 ATIVIDADES

Deixamos como atividades a demonstração de algumas das propriedades acima.

ATIV. 14.1. Sejam A e B dois conjuntos não vazios, $F \subset A \times B$ uma função de A em B. Mostre que: $\forall X, Y \subset A, F(X \cap Y) \subset F(X) \cap F(Y)$.

Comentário: Reveja as demonstrações da seção 14.3. Note que basta provar a inclusão; a igualdade de modo geral não vale. Como na função $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $F : A \mapsto B$ dada por:

$F(a) = 1$, $F(b) = 1$ e $F(c) = 3$. Para esta função temos $F(\{a\}) = \{1\}$, $F(\{b\}) = \{1\}$ o que dá $F(\{a\}) \cap F(\{b\}) = \{1\} \neq \emptyset$ enquanto que $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$ e das propriedades $F(\{a\} \cap \{b\}) = F(\emptyset) = \emptyset$. Ou seja, para esta função $F(\{a\} \cap \{b\}) = \emptyset$ e $F(\{a\}) \cap F(\{b\}) \neq \emptyset$.

ATIV. 14.2. Sejam A e B dois conjuntos não vazios, $F \subset A \times B$ uma função de A em B. Mostre que: $\forall X, Y \subset B, X \subset Y \rightarrow F^{-1}(X) \subset F^{-1}(Y)$.

Comentário: Reveja as demonstrações da seção 14.3.

14.7 REFERÊNCIAS BIBLIOGÁFICAS

DOMINGUES, Higino Hugueros. e IEZZI, Gelson. Álgebra Moderna. Atual São Paulo: Editora LTDA. 1979.

CASTRUCCI, Benedito., Elementos da Teoria de Conjuntos. São Paulo: GEEM, 1970.

LIMA, Elon Lages, Curso de Análise. Volume 1, IMPA, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 8ª edição, 1995.