2
LIVRO

15
AULA

Tipos de Funções

META:

Introduzir os diversos tipos de funções.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Determinar se uma dada função é injetora, sobrejetora ou bijetora.

PRÉ-REQUISITOS

Aula-14 os conhecimentos de funções.

15.1 Introdução

Caro aluno, o conceito de função, que vimos na aula anterior, será explorado um pouco mais na aula de hoje, classificaremos o conjunto das funções de um dado conjunto em outro conjunto, segundo alguma de suas propriedades. Focaremos nossa atenção nas funções classificadas como injetoras , sobrejetoras e em bijetoras. Veremos também o conceito de função inversa. Teremos que cuidar para não confundir função inversa com o conceito de imagem inversa, visto na aula anterior. Boa aula!

15.2 Tipos de Funções

Começaremos diretamente ao conceito (definição) de função injetora. A saber:

Definição 15.1. Sejam A e B dois conjuntos e $F : A \mapsto B$ uma função. Dizemos que F é uma função injetora se, somente se:
$\forall x, y \in A, x \neq y \rightarrow F(x) \neq F(y)$.

OBS 15.1. Em outras palavras, dizemos que uma função $F : A \mapsto B$ do conjunto A no conjunto B é uma função injetora quando elementos diferentes do domínio são levados pela função em elementos diferentes na imagem da função.

OBS 15.2. Denotamos $Inj(A, B)$ o conjunto de todas as funções injetoras do conjunto A no conjunto B.

OBS 15.3. Levando-se em conta que $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$ podemos reformular a definição de função injetora para uma forma mais útil nas demonstrações. A saber:

Definição 15.2. Sejam A e B dois conjuntos e $F : A \mapsto B$ uma função. Dizemos que F é uma função injetora se, somente se:
$\forall x, y \in A, F(x) = F(y) \to x = y$.

Exemplo 15.1. Vejamos alguns exemplos de funções injetoras:

- Sejam A, B dois conjuntos dados por $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. A função $F_1 : A \mapsto B$ dada por $F_1 = \{(a, 2), (b, 1), (c, 3), (d, 4)\}$ é uma função injetora **Fig 15.1**.

- Sejam A, B dois conjuntos dados por $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. A função $F_2 : A \mapsto B$ dada por $F_2 = \{(a, 2), (b, 1), (c, 1), (d, 1)\}$ não é uma função injetora **Fig 15.2**. Neste caso, o elemento do contradomínio $1 \in B$ está relacionado com três elementos distintos $b, c, d \in A$ do domínio.

- A função $F : \mathbb{R} - \{1\} \mapsto \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ é uma função injetora.

  PROVA: $\forall x, y \in \mathbb{R} - \{1\}, F(x) = F(y)$.

  Substituindo a regra de associação de F temos:
  $\dfrac{2x+1}{x-1} = \dfrac{2y+1}{y-1}$.
  Da igualdade de frações temos:

  $(2x + 1)(y - 1) = (2y + 1)(x - 1)$.

  Desenvolvendo os produtos temos:

  $2xy + y - 2x - 1 = 2xy + x - 2y - 1$.

  Simplificando a expressão acima temos:

  $3y = 3x$.

  Daí, temos:

  $3(y - x) = 0$.

  Portanto $y - x = 0$ e temos:

  $x = y$.

Logo: $\forall x, y \in \mathbb{R} - \{1\}, F(x) = F(y) \rightarrow x = y$.

Portanto, F é uma função injetora. $\square$

- A função $F : [-b/2a, +\infty) \mapsto [-(b^2 - 4ac)/4a, +\infty)$ definida por $F(x) = ax^2 + bx + c$ em que: $a, b, c \in \mathbb{R}, a > 0$ é uma função injetora.

  PROVA: $\forall x, y \in [-b/2a, +\infty), F(x) = F(y)$.

  Substituindo a regra de associação de F temos:

  $ax^2 + bx + c = ay^2 + by + c$.

  Simplificando a expressão acima temos:

  $a(x^2 - y^2) + b(x - y) = 0$

  Como $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ temos:

  $a(x + y)(x - y) + b(x - y) = 0$.

  Colocando $x - y$ em evidência temos:

  $(a(x + y) + b)(x - y) = 0$.

  Por outro lado do domínio de F tiramos que:

  $\forall x, y \in [-b/2a, +\infty) \rightarrow x \geq -b/2a \wedge y \geq -b/2a$.

  Daí, somando temos:

  $x + y \geq -b/2a - b/2a$.

  Logo:

  $x + y \geq -b/a$.

  De que tiramos:

  $a(x + y) + b \geq 0$.

  Daí, temos:

  $(a(x+y)+b)(x-y) \wedge a(x+y)+b \geq 0 \rightarrow x-y = 0 \vee a(x+y)+b = 0$.

  Observemos que: no domínio da função $a(x + y) + b = 0 \leftrightarrow x = -b/2a \wedge y = -b/2a$ que leva também a $x = y$.

  Logo:

$\forall x, y \in [-b/2a, +\infty), F(x) = F(y) \rightarrow x = y.$

Portanto, F é uma função injetora. $\square$

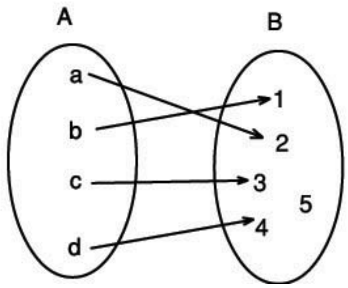

Figura 15.1: Injetora

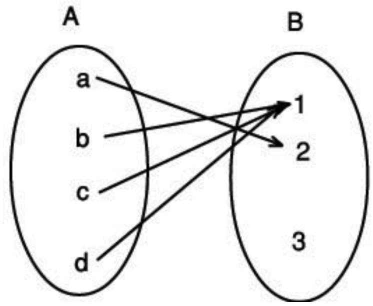

Figura 15.2: Não injetora

Em continuação vamos à definição de função sobrejetora:

Definição 15.3. Sejam A e B dois conjuntos e $F : A \mapsto B$ uma função. Dizemos que F é uma função sobrejetora, somente se:
$\forall y \in B, \exists x \in A |\, y = F(x)$.

OBS 15.4. Em outras palavras, dizemos que uma função $F : A \mapsto B$ do conjunto A no conjunto B é uma função sobrejetora quando todos os elementos do contradomínio entram na dança. E, o contradomínio e o conjunto imagem se confundem isto é $Cdom(F) = Img(F)$.

OBS 15.5. Denotamos $Sobre(A, B)$ o conjunto de todas as funções sobrejetoras do conjunto A no conjunto B.

Exemplo 15.2. Vamos à alguns exemplos de funções sobrejetoras:

- Sejam A, B dois conjuntos dados por $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. A função $F_1 : A \mapsto B$ dada por $F_1 = \{(a, 1), (b, 3), (c, 2), (d, 2)\}$ é uma função sobrejetora **Fig 15.3**.

- Sejam A, B dois conjuntos dados por $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. A função $F_2 : A \mapsto B$ dada por $F_2 = \{(a, 2), (b, 1), (c, 1), (d, 1)\}$ não é uma função sobrejetora **Fig 15.4**. Neste caso, o elemento do contradomínio $3 \in B$ não está relacionado com nenhum elemento do domínio.

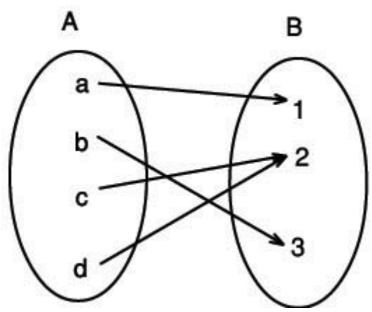

Figura 15.3: Sobrejetora

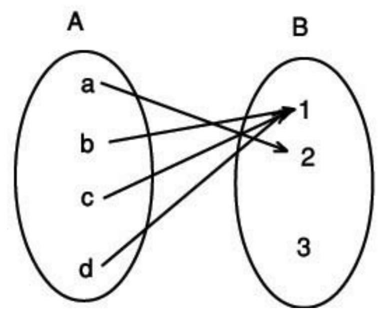

Figura 15.4: Não sobrejetora

- A função $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dada por $F(x) = ax + b$ em que $a \neq 0$ é uma função sobrejetora.

  PROVA: $\forall y \in \mathbb{R}$, procuraremos, caso exista, um $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = F(x)$.

  Substituindo a regra de associação de F temos:

  $y = ax + b$.

  Daí, como $x \in \mathbb{R}$ temos:

  $x = (y - b)/a$.

  Logo $x \in \mathbb{R}$ e:

  $F(x) = F((y - b)/a) = a(y - b)/a + b = y$.

  Portanto:

  $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} |\, y = F(x)$.

  E a função F é sobrejetora. $\square$

- A função $F : [-b/2a, +\infty) \mapsto [-(b^2 - 4ac)/4a, +\infty)$ definida por $F(x) = ax^2 + bx + c$ em que: $a, b, c \in \mathbb{R}, a > 0$, é uma função sobrejetora.

PROVA: $\forall y \in [-(b^2 - 4ac)/4a, +\infty)$, procuraremos, caso exista um $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = F(x)$.

Substituindo a regra de associação de F temos:

$y = ax^2 + bx + c$.

Daí, temos:

$ax^2 + bx + c - y = 0$.

Como $a > 0$, dividindo por a temos:

$x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c-y}{a} = 0$.

Adicionando o termos nulo $\dfrac{b^2}{4a} - \dfrac{b^2}{4a}$ temos:

$x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{b^2}{4a} - \dfrac{b^2}{4a} + \dfrac{c-y}{a} = 0$.

Completando o quadrado temos:

$\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a} + \dfrac{c-y}{a} = 0$.

Operando as frações temos:

$\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac + 4ay}{4a^2} = 0$.

De outro modo:

$\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2 - 4ac + 4ay}{4a^2}$.

Como $y \in [-(b^2 - 4ac)/4a, +\infty) \rightarrow y \geq -(b^2 - 4ac)/4a$.

Daí, temos:

$b^2 - 4ac + 4ay \geq 0$.

Portanto, podemos extrair a raiz quadrada e obter:

$x + \dfrac{b}{2a} = \sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac + 4ay}{4a^2}}$.

Daí, temos:

$x = -\dfrac{b}{2a} + \sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac + 4ay}{4a^2}}$.

Obviamente $x \in [-b/2a, +\infty)$.

Logo $x \in [-b/2a, +\infty)$ e $F(x) = y$.

Portanto:

$\forall y \in [-(b^2 - 4ac)/4a, +\infty), \exists x \in [-b/2a, +\infty) |\, y = F(x)$.

E a função F é sobrejetora. $\square$

Finalmente, vamos ao conceito de função bijetora:

Definição 15.4. Sejam A e B dois conjuntos e $F : A \mapsto B$ uma função. Dizemos que F é uma função bijetora, somente se:

1. $\forall x, y \in A, x \neq y \rightarrow F(x) \neq F(y)$

2. $\forall y \in B, \exists x \in A |\, y = F(x)$

OBS 15.6. Em outras palavras, dizemos que uma função $F : A \mapsto B$ do conjunto A no conjunto B é uma função bijetora quando for ao mesmo tempo injetora e sobrejetora. Cada elemento do domínio está associado a um único elemento do contradomínio e vice versa. Representamos o fato de uma função F ser bijetora dizendo que "*F é 1-1*".

OBS 15.7. Denotamos $Bij(A, B)$ o conjunto de todas as funções bijetoras do conjunto A no conjunto B.

Exemplo 15.3. Vamos à alguns exemplos de funções bijetoras:

- Sejam A, B dois conjuntos dados por $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. A função $F_1 : A \mapsto B$ dada por $F_1 = \{(a, 2), (b, 1), (c, 3), (d, 4)\}$ é uma função bijetora **Fig 15.5**.

- Sejam A, B dois conjuntos dados por $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. A função $F_2 : A \mapsto B$ dada por $F_2 = \{(a, 2), (b, 1), (c, 1), (d, 1)\}$ não é uma função bijetora **Fig 15.6**. Neste caso, o elemento do contradomínio $3 \in B$ não está relacionado com nenhum elemento do domínio é o bastante para a função não ser sobrejetora e portanto não ser também bijetora.

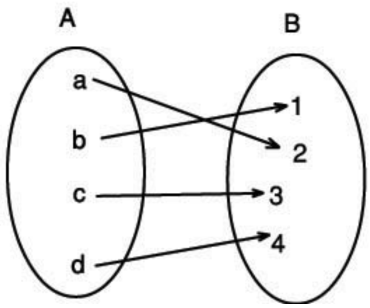

Figura 15.5: Bijetora

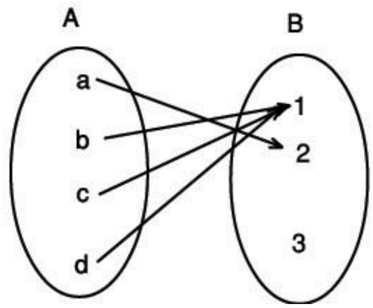

Figura 15.6: Não bijetora

- A função $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dada por $F(x) = ax + b$ em que $a \neq 0$ é uma função bijetora.

  PROVA: Temos que mostrar que $F(x)$ é ao mesmo tempo injetora e sobrejetora. Como já foi mostrado que $F(x)$ é sobrejetora, basta mostrar que $F(x)$ é injetora.

  $\forall x, y \in \mathbb{R},\ F(x) = F(y)$.

  Substituindo a regra de associação de F temos:

  $ax + b = ay + b$

  Portanto:

  $a.(x - y) = 0$

  Como $a \neq 0$ temos:

  $x - y = 0$

  Logo:

  $x = y$

  Logo temos:

  $\forall x, y \in \mathbb{R},\ F(x) = F(y) \to x = y$.

  E a função $F(x)$ é injetora. Como já mostramos que $F(x)$ é sobrejetora, concluimos que $F(x)$ é bijetora. $\square$

Para algumas funções é possível reverter seus efeitos e a função encarregada deste feito é denominada de função inversa. Sua definição é:

Definição 15.5. Sejam A e B dois conjuntos e $F : A \mapsto B$ uma função. Definimos a inversa de F, caso exista, e denotada por $F^{-1} : B \mapsto A$, por:

i - $F^{-1}(F(x)) = x, \forall x \in A$

ii - $F(F^{-1}(y)) = y, \forall y \in B$

Para outras funções não é possível a definição de uma inversa. Porém, pode ser possível a definição de uma inversa à esquerda ou de uma inversa à direita. Vamos aos conceitos:

Definição 15.6. Sejam A e B dois conjuntos e $F : A \mapsto B$ uma função. Definimos a inversa à esquerda de F, caso exista, e denotada por $F_e^{-1} : B \mapsto A$, por:
$F_e^{-1}(F(x)) = x, \forall x \in A$

Definição 15.7. Sejam A e B dois conjuntos e $F : A \mapsto B$ uma função. Definimos a inversa à direita de F, caso exista, e denotada por $F_d^{-1} : B \mapsto A$, por:
$F(F_d^{-1}(y)) = y, \forall y \in B$

Nossa aula encerra-se aqui. As propriedades das funções injetoras, sobrejetoras, bijetoras e inversa, bem como as demonstrações de algumas delas, serâo abordadas específicamente em nossa próxima aula.

15.3 CONCLUSÃO

As funções podem classificadas quanto as suas características em injetoras, sobrejetoras e bijetoras. Injetoras se cada elemento da imagem está associado a um só elemento do domínio. Sobrejetora se todos os elementos da imagem têm pelo menos um elemento do domínio a ele associado. E bijetora se é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

15.4 RESUMO

Nosso resumo de hoje consta das seguintes definições:
Definição de função injetora:
Definição: Sejam A e B dois conjuntos e $F : A \mapsto B$ uma função. Dizemos que F é uma função injetora, somente se:
$\forall x, y \in A, x \neq y \rightarrow F(x) \neq F(y)$.
Definição de função sobrejetora:
Definição: Sejam A e B dois conjuntos e $F : A \mapsto B$ uma função. Dizemos que F é uma função sobrejetora, somente se:
$\forall y \in B, \exists x \in A |\, y = F(x)$.
Definição de função bijetora:
Definição: Sejam A e B dois conjuntos e $F : A \mapsto B$ uma função. Dizemos que F é uma função bijetora, somente se:

1. $\forall x, y \in A, x \neq y \rightarrow F(x) \neq F(y)$
2. $\forall y \in B, \exists x \in A |\, y = F(x)$

Definição de função inversa:
Definição: Sejam A e B dois conjuntos e $F : A \mapsto B$ uma função. Definimos a inversa de F, caso exista, e denotada por $F^{-1} : B \mapsto A$, por:

i - $F^{-1}(F(x)) = x, \forall x \in A$

ii - $F(F^{-1}(y)) = y, \forall y \in B$

Definição de função inversa à esquerda:

Definição: Sejam A e B dois conjuntos e $F : A \mapsto B$ uma função. Definimos a inversa à esquerda de F, caso exista, e denotada por $F_e^{-1} : B \mapsto A$, por:

$F_e^{-1}(F(x)) = x, \forall x \in A$

Definição de função inversa à direita:

Definição: Sejam A e B dois conjuntos e $F : A \mapsto B$ uma função. Definimos a inversa à direita de F, caso exista, e denotada por $F_d^{-1} : B \mapsto A$, por:

$F(F_d^{-1}(y)) = y, \forall y \in B$

15.5 ATIVIDADES

Deixamos como atividades as seguintes questões:

ATIV. 15.1. Seja $f : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Mostre que f é injetora.

Comentário: Volte ao texto e reveja as demonstrações da aula. E lembre-se que $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$.

ATIV. 15.2. Seja $f : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ dada por $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Mostre que f é sobrejetora.

Comentário: Volte ao texto e reveja as demonstrações da aula. E lembre-se que se $x \in [0, 1]$ então $o \leq x \leq 1$ e que $0 \leq x \leq 1 \rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$.

15.6 REFERÊNCIAS BIBLIOGÁFICAS

DOMINGUES, Higino Hugueros. e IEZZI, Gelson. Álgebra Moderna. Atual Editora LTDA. São Paulo. 1979.

Fundamentos da Matemática: Livro 2

CASTRUCCI, Benedito. Elementos da Teoria de Conjuntos. São Paulo: GEEM, 1970.

Funções Injetoras, Funçoes Sobrejetoras. Disponível em: www.fund 198.ufba. br/apos_cnf/funcinsob.pdf. Acessado em 20 mai. 2007