Propriedades das Funções

META:

Demonstrar algumas propriedades das funções.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de

Demonstrar propriedades das funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras.

PRÉ-REQUISITOS

Aula-14 os conhecimentos de funções.

16.1 Introdução

O conceito de função que vimos nas aulas anterior será explorado um pouco mais aqui demonstrando-se algumas de suas propriedades. Focaremos nossa atenção nas funções classificadas como injetoras, como sobrejetoras e como bijetoras. Esta aula, devido ao seu contudo técnico, será, em número de páginas, mais curta que as anteriores. Ném por isso deverá ser dedicado menos tempo para absorver seu conteúdo. Bom mão a obra.

16.2 Propriedades das Funções Injetoras

Para começar, vale a pena ver de novo a definição de função injetora. A saber:

Definição 16.1. Sejam A e B dois conjuntos e $F : A \mapsto B$ uma função. Dizemos que F é uma função injetora se, somente se:
$\forall x, y \in A, x \neq y \to F(x) \neq F(y)$.

Vamos diretamente às propriedades das funções injetoras:

- Sejam $f : A \mapsto B$ e $g : B \mapsto C$ duas funções. Se f e g são injetoras então $g \circ f : A \mapsto C$ é injetora.

- Sejam $f : A \mapsto B$ e $g : B \mapsto C$ duas funções. Se $g \circ f : A \mapsto C$ é injetora então f é injetora.

- Sejam $f : A \mapsto B$ uma função e $X \subset A$. Se f é injetora então $f^{-1}(f(X)) = X$.

- Sejam $f : A \mapsto B$ uma função e $X, Y \subset A$. Se f é injetora então $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

- Sejam $f : A \mapsto B$ e $g, h : C \mapsto A$ funções então f é injetora se, somente se $f \circ g = f \circ h \rightarrow g = h$.

16.3 Propriedades das Funções Sobrejetoras

Aqui começaremos também, revendo a definição de função sobrejetora. A saber:

Definição 16.2. Sejam A e B dois conjuntos e $F : A \mapsto B$ uma função. Dizemos que F é uma função sobrejetora se, somente se: $\forall y \in B, \exists x \in A |\, y = F(x)$.

Em continuação vamos às propriedades das funções sobrejetoras:

- Sejam $f : A \mapsto B$ e $g : B \mapsto C$ duas funções. Se f e g são sobrejetoras então $g \circ f : A \mapsto C$ é sobrejetora.
- Sejam $f : A \mapsto B$ e $g : B \mapsto C$ duas funções. Se $g \circ f : A \mapsto C$ é sobrejetora então g é sobrejetora.
- Sejam $f : A \mapsto B$ uma função e $X \subset B$. Se f é sobrejetora então $f(f^{-1}(X)) = X$.
- Sejam $f : A \mapsto B$ uma função. Se f é sobrejetora $\exists g : B \mapsto A |\, f \circ g = I_B$.
- Sejam $f : A \mapsto B$ e $g, h : B \mapsto C$ funções então f é sobrejetora se, somente se $g \circ f = h \circ f \rightarrow g = h$.

16.4 Propriedades das Funções Bijetoras

Começaremos também, revendo a definição de função bijetora. A saber:

Propriedades das Funções

Definição 16.3. Sejam A e B dois conjuntos e $F : A \mapsto B$ uma função. Dizemos que F é uma função bijetora se, somente se:

1. $\forall x, y \in A, x \neq y \rightarrow F(x) \neq F(y)$

2. $\forall y \in B, \exists x \in A |\, y = F(x)$

Finalmente as propriedades das funções bijetoras:

- Sejam $f : A \mapsto B$ e $g : B \mapsto C$ duas funções. Se f e g são bijetoras então $g \circ f : A \mapsto C$ é bijetora.

- Seja $f : A \mapsto B$ uma função. Se f é sobrejetora então $\exists g : B \mapsto A |\, g = f^{-1}$.

- Sejam $f : A \mapsto B$ e $g, h : B \mapsto C$ funções então f é bijetora se, somente se $g \circ f = h \circ f \rightarrow g = h$.

16.5 Algumas Demonstrações

Vamos, aqui, demonstrar algumas das propriedades das funções injetoras, sobrejetoras e injetoras. As demais podem ficar como excelentes exercícios. Vamos lá.

Primeiramente vamos demonstrar uma das propriedades das funções injetoras. Mais precisamente.
Propriedade1: Sejam $f : A \mapsto B$ uma função e $X \subset A$. Se f é injetora então $f^{-1}(f(X)) = X$.
PROVA: Precisamos de um resultado intermediário, que vale para qualquer função. A saber:
Resultado A: $f : A \mapsto B$ uma função e $X \subset A$ então $X \subset f^{-1}(f(X))$.

PROVA: $\forall x \in X$.

Da definição de imagem direta de uma função temos:

$f(x) \in f(X)$

Da definição de imagem inversa de uma função temos:

$x \in f^{-1}(f(X))$

Logo:

$\forall x \in X \rightarrow x \in f^{-1}(f(X))$

Portanto, da definição de contido:

$X \subset f^{-1}(f(X))$. $\square$

Voltemos à prova propriamente dita.

$\forall x \in f^{-1}(f(X)) \rightarrow f(x) \in f(X)$

Como f é injetora temos:

$f(x) \in f(X) \rightarrow x \in X$.

Caso contrario, $\exists y \notin X | f(x) = f(y)$ e como $x \in X \wedge y \notin X$ temos $x \neq y \wedge f(x) = f(y)$ o que contraria o fato de f ser injetora. Logo:

$\forall x \in f^{-1}(f(X)) \rightarrow x \in X$.

Portanto da definição de contido temos:

$f^{-1}(f(X)) \subset X$.

Juntando isto ao **Resultado A** temos:

$(f^{-1}(f(X)) \subset X) \wedge (X \subset f^{-1}(f(X)))$.

Da definição de igualdade de conjuntos temos:

$f^{-1}(f(X)) = X$.

Portanto:

Se f é injetora então $f^{-1}(f(X)) = X$. $\square$

Continuando, vamos agora a uma propriedade das funções sobrejetoras. A seguinte:

Propriedade2: Sejam $f : A \mapsto B$ uma função e $Y \subset B$. Se f é sobrejetora então $f(f^{-1}(Y)) = Y$.

PROVA: Precisamos de um resultado intermediário, que vale para qualquer função. A saber:

Resultado B: $f : A \mapsto B$ uma função e $Y \subset B$ então $f(f^{-1}(Y)) \subset Y$.

PROVA: $\forall y \in f(f^{-1}(Y))$

Da definição de imagem direta de uma função temos:

$\exists x \in f^{-1}(Y) |\, y = f(x)$

Daí, temos:

$y = f(x) \wedge f(x) \in Y$

Logo:

$y \in Y$.

Daí, temos:

$\forall y \in f(f^{-1}(Y)) \rightarrow y \in Y$

Portanto, da definição de contido temos:

$f(f^{-1}(Y)) \subset Y$. $\square$

Voltemos à prova propriamente dita.

$\forall y \in Y$

Como f é sobrejetora temos:

$\exists x \in f^{-1}(Y) |\, y = f(x)$.

E neste caso temos:

$y = f(x) \wedge f(x) \in f(f^{-1}(Y))$.

Logo:

$y \in f(f^{-1}(Y))$.

Daí, temos:

$\forall y \in Y \rightarrow y \in f(f^{-1}(Y))$

Da definição de contido temos:

$Y \subset f(f^{-1}(Y))$.

Juntando isto ao **Resultado B** temos:

$(Y \subset f(f^{-1}(Y))) \wedge (f(f^{-1}(Y)) \subset Y)$.

Da definição de igualdade de conjuntos temos:

$f(f^{-1}(Y)) = Y$.

Portanto:

Se f é sobrejetora então $f(f^{-1}(Y)) = Y$. $\square$

Vamos concluir esta seção com uma demonstração de uma propriedade das funções bijetoras.

Propriedade3: Sejam $f : A \mapsto B$ e $g : B \mapsto C$ duas funções. Se f e g são bijetoras então $g \circ f : A \mapsto C$ é bijetora.

PROVA Dividiremos a prova em duas partes:

a) Primeiramente vamos provar que $g \circ f$ é injetora.

$\forall x, y \in A$

$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$.

Da definição de composição de funções temos:

$g(f(x)) = g(f(y))$.

Fazendo $u = f(x)$ e $w = f(y)$ temos:

$g(u) = g(w)$.

Como g é bijetora é também injetora. Daí, temos:

$u = w$.

$f(x) = f(y)$.

Como f é bijetora é também injetora. Daí, temos:

$x = y$.

Juntando tudo.

$\forall x, y \in A, (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \rightarrow x = y$.

Portanto $g \circ f$ é injetora.

b) Em segundo vamos provar que $g \circ f$ é sobrejetora.

$\forall z \in C$.

Como g é bijetora é também sobrejetora. Daí,

$\exists y \in B |\, g(y) = z$.

Por outro lado, como f é bijetora:

$\exists x \in A |\, y = f(x)$.

Daí, temos:

$z = g(y) \wedge y = f(x) \rightarrow g(f(x)) = z \rightarrow (g \circ f)(x) = z$.

Combinando tudo temos:

$\forall z \in C, \exists x \in A |\, (g \circ f)(x) = z$.

Portanto $g \circ f$ é sobrejetora.

Das partes a) e b) temos que $g \circ f$ é portanto bijetora. $\square$

16.6 CONCLUSÃO

Concluímos que a operação de composição de funções preserva a característica das mesmas. Assim, a composição de funções injetora é injetora, a composição de funções sobrejetoras é sobrejetora e a composição de funções bijetoras é bijetora.

16.7 RESUMO

Nosso resumo hoje consta das seguintes propriedades:

Propriedades das funções injetoras:

- Sejam $f : A \mapsto B$ e $g : B \mapsto C$ duas funções. Se f e g são injetoras então $g \circ f : A \mapsto C$ é injetora.
- Sejam $f : A \mapsto B$ e $g : B \mapsto C$ duas funções. Se $g \circ f : A \mapsto C$ é injetora então f é injetora.
- Sejam $f : A \mapsto B$ uma função e $X \subset A$. Se f é injetora então $f^{-1}(f(X)) = X$.

- Sejam $f : A \mapsto B$ uma função e $X, Y \subset A$. Se f é injetora então $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.
- Sejam $f : A \mapsto B$ e $g, h : C \mapsto A$ funções então f é injetora se, somente se $f \circ g = f \circ h \rightarrow g = h$.

Propriedades das funções sobrejetoras:

- Sejam $f : A \mapsto B$ e $g : B \mapsto C$ duas funções. Se f e g são sobrejetoras então $g \circ f : A \mapsto C$ é sobrejetora.
- Sejam $f : A \mapsto B$ e $g : B \mapsto C$ duas funções. Se $g \circ f : A \mapsto C$ é sobrejetora então g é sobrejetora.
- Sejam $f : A \mapsto B$ uma função e $X \subset B$. Se f é sobrejetora então $f(f^{-1}(X)) = X$.
- Seja $f : A \mapsto B$ uma função. Se f é sobrejetora então $\exists g : B \mapsto A |\, f \circ g = I_B$.
- Sejam $f : A \mapsto B$ e $g, h : B \mapsto C$ funções então f é sobrejetora se, somente se $g \circ f = h \circ f \rightarrow g = h$.

Propriedades das funções bijetoras:

- Sejam $f : A \mapsto B$ e $g : B \mapsto C$ duas funções. Se f e g são bijetoras então $g \circ f : A \mapsto C$ é bijetora.
- Seja $f : A \mapsto B$ uma função. Se f é bijetora então $\exists g : B \mapsto A |\, g = f^{-1}$.
- Sejam $f : A \mapsto B$ e $g, h : B \mapsto C$ funções então f é bijetora se, somente se $g \circ f = h \circ f \rightarrow g = h$.

16.8 ATIVIDADES

Deixamos como atividades a demonstração de algumas das propriedades acima.

ATIV. 16.1. Prove as seguintes propriedades das funções injetoras:

- Sejam $f : A \mapsto B$ e $g : B \mapsto C$ duas funções. Se $g \circ f : A \mapsto C$ é injetora então f é injetora.
- Sejam $f : A \mapsto B$ e $g, h : C \mapsto A$ funções então f é injetora se, somente se $f \circ g = f \circ h \to g = h$.

Comentário: Reveja as demonstrações acima.

ATIV. 16.2. Prove as seguintes propriedades das funções sobrejetoras:

- Sejam $f : A \mapsto B$ e $g : B \mapsto C$ duas funções. Se f e g são sobrejetoras então $g \circ f : A \mapsto C$ é sobrejetora.
- Sejam $f : A \mapsto B$ e $g : B \mapsto C$ duas funções. Se $g \circ f : A \mapsto C$ é sobrejetora então g é sobrejetora.

Comentário: Reveja as demonstrações acima.

16.9 REFERÊNCIAS BIBLIOGÁFICAS

DOMINGUES, Higino Hugueros. e IEZZI, Gelson., Álgebra Moderna. Atual Editora LTDA. São Paulo. 1979.

CASTRUCCI, Benedito., Elementos da Teoria de Conjuntos. São Paulo: GEEM, 1970.

Fundamentos da Matemática: Livro 2

FIFS:Funções Injetoras, Funçoes Sobrejetoras. http://www.fund 198.ufba.br/ funcinsob.pdf. Acessado em 20 mai. 2007