2
LIVRO

17
AULA

Números Naturais: Axiomas de Peano

META:

Introduzir o conceito de números naturais através dos axiomas de Peano.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de

Definir o conjunto dos números naturais, usando para isto os axiomas de Peano e demonstrar algumas de suas propriedades.

PRÉ-REQUISITO: Aula-05 e Aula-15 os conhecimentos de sistemas axiomáticos e de tipos de funções

17.1 Introdução

O conceito de conjunto dos números naturais é fundamental para a Matemática. Ele serve de base para a definição dos demais conjuntos numéricos. Desde os tempos mais antigos o homem tem usado os números naturais, mas só no século XIX é que surgiu a idéia de axiomatizar esta teoria. O primeiro a fazer isto foi Grassman, depois Peano que completou e sistematizou os axiomas de Grassman, e seus axiomas são os usados até hoje para construir a teoria dos números naturais.

17.2 Axiomas de Peano

O conjunto dos números naturais, como idealizado por Peano, é um sistema axiomático com trés termos indefinidos:

Termos Indefinidos:

- $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais
- $s : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ a função sucessor e
- $1 \in \mathbb{N}$ um número natural especial denominado "*um*".

três axiomas envolvendo os termos indefinidos:

Axiomas

A1 $\exists! 1 \in \mathbb{N} | \, 1 \notin s(\mathbb{N})$

A2 $\forall m, n \in \mathbb{N}, s(m) = s(n) \rightarrow m = n$

A3 $X \subset \mathbb{N} \wedge 1 \in X \wedge s(X) \subset X \rightarrow X = \mathbb{N}$

Vejamos algumas observações sobre os axiomas:

OBS 17.1. O primeiro axioma $\exists! 1 \in \mathbb{N} | \, 1 \notin s(\mathbb{N})$ diz que o número natural especial é único e que não é sucessor de nenhum número natural. Em outras palavras, a função s sucessor não é sobrejetora.

OBS 17.2. O segundo axioma $\forall m, n \in \mathbb{N}, s(m) = s(n) \rightarrow m = n$ diz que a função s sucessor é injetora. Equivale também a definição de igualdade no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Pois, como s é uma função temos: $m = n \rightarrow s(m) = s(n)$ e portanto: $\forall m, n \in \mathbb{N}, s(m) = s(n) \leftrightarrow m = n$

OBS 17.3. O terceiro axioma $X \subset \mathbb{N} \wedge 1 \in X \wedge s(X) \subset X \rightarrow X = \mathbb{N}$ é também conhecido como "*Princípio da Indução Finita*", gerando uma técnica de demonstração de proposições definida sobre o conjunto dos números naturais denominada "*Demonstração por Indução*".

Há uma pergunta que não quer calar. Será que os axiomas **A1**, **A2** e **A3** são realmente independentes? A resposta é positiva e seguiremos dando exemplos de três conjuntos, cada um munido de uma função sucessor que satisfaz a um par de axiomas sem satisfazer ao terceiro.

MODELO 1 tomaremos $\{1^*, \mathbb{N}^*, s^*\}$ em que $1^* = 1$, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}$ e $s^* : \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{N}^*$ dada por $\forall n^* \in \mathbb{N}^*, n^* = n, s^*(n^*) = s(s(n))$. Este modelo satisfaz os axiomas **A1** e **A2** e não satisfaz **A3**.

PROVA: Dividiremos a prova em três partes:

a) **HN** $\exists n^* \in \mathbb{N}^* | s^*(n^*) = 1^*$.

Das definições de 1^* e s^* temos:

$s(s(n)) = 1$ e portanto 1 é sucessor de $s(n)$ o que viola **A1** para o modelo $\{1, \mathbb{N}, s\}$.

Portanto **HN** é falsa e para o modelo $\{1^*, \mathbb{N}^*, s^*\}$ temos:

$1^* \notin s^*(\mathbb{N}^*)$

Logo $\{1^*, \mathbb{N}^*, s^*\}$ satisfaz o axioma **A1**.

b) $\forall m^*, n^* \in \mathbb{N}^*, s^*(m^*) = s^*(n^*)$.

Da definição do modelo temos:

$s(s(m)) = s(s(n))$.

Como s é injetora temos:

$s(m) = s(n)$.

Novamente, como s é injetora temos:

$m = n$.

Da definição do modelo $m^* = m$ e $n^* = n$. Daí, temos:

$\forall m^*, n^* \in \mathbb{N}^*, s^*(m^*) = s^*(n^*) \rightarrow m^* = n^*$.

Portanto, para o modelo $\{1^*, \mathbb{N}^*, s^*\}$ **A2** é satisfeita.

c) Seja $X = \mathbb{N} - \{s(1)\}$.

Pela construção de X^* e do modelo temos:

$X \subset \mathbb{N}^*$.

Por outro lado como $1 \in \mathbb{N} \wedge 1 \notin \{s(1)\}$ temos:

$1 \in X \wedge 1^* = 1$

Portanto:

$1^* \in X$.

Por sua vez,

$\forall m^* \in X$, temos:

casso 1 $m^* = 1^*$.

Da definição do modelo temos:

$s^*(m^*) = s^*(1^*) = s(s(1))$.

Daí, temos:

$s^*(m^*) \in \mathbb{N}^*$.

Como $s(s(1)) \neq s(1)$ temos:

$s^*(m^*) \neq s(1) \rightarrow s^*(m^*) \notin \{s(1)\}$.

Logo: $s^*(m^*) \in \mathbb{N} \wedge s^*(m^*) \notin \{s(1)\} \rightarrow s^*(m^*) \in X$.

caso 2 $m^* \neq 1^*$.

Da definição do modelo e como s é injetora temos:

$m^* \neq 1 \rightarrow s^*(m^*) \neq s(1) \rightarrow s^*(m^*) \notin \{s(1)\}$.

E também:

$s^*(m^*) \in \mathbb{N}$.

Daí, temos também neste caso:

$s^*(m^*) \in \mathbb{N} \wedge s^*(m^*) \notin \{s(1)\} \rightarrow s^*(m^*) \in X$.

Portanto:

$\forall m^* \in X \rightarrow s^*(m^*) \in X$

Logo:

$s^*(X) \subset X$.

Daí, temos:

$1^* \in X \wedge s^*(X) \subset X$.

No entanto $X \neq \mathbb{N}^*$.

Portanto, **A3** não é satisfeito para este modelo. $\square$

MODELO 2 Tomaremos $\{1^*, \mathbb{N}^*, s^*\}$ em que $1^* = 1$, $N^* = \{1^*\}$ e $s^* : \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{N}^*$ dada por $s^*(1^*) = 1^*$. Este modelo satisfaz os axiomas **A2** e **A3** e não satisfaz **A1**.

PROVA: Dividiremos a prova em três partes:

a) $\forall m^*, n^* \in \mathbb{N}^*, s^*(m^*) = s^*(n^*)$.

Da definição do modelo, temos:

$\forall m^*, n^* \in \mathbb{N}^* \rightarrow m^* = 1^* \wedge n^* = 1^*$

Daí, temos::

$m^* = n^*$.

Portanto:

$\forall m^*, n^* \in \mathbb{N}^*, s^*(m^*) = s^*(n^*) \rightarrow m^* = n^*$.

Logo s^* é injetora e **A2** é satisfeito.

b) Como, da definição do modelo, $N^* = \{1^*\}$ temos:

$X \subset \mathbb{N}^* \to X = \emptyset \vee X = \{1^*\}$

Daí, temos:

$X \subset \mathbb{N}^* \wedge 1^* \in X \to X = \{1^*\}$

Como do modelo, $N^* = \{1^*\}$ temos:

$X \subset \mathbb{N}^* \wedge 1^* \in X \to X = \mathbb{N}^*$

Daí, podemos construir a proposição (tautologia):

$X \subset \mathbb{N}^* \wedge 1^* \in X, s^*(X) \subset X \to X = \mathbb{N}^*$

E o axioma **A3** é satisfeito.

c) Como, da definição do modelo:

$s^*(1^*) = 1^*$.

Temos que:

$1^* \in s^*(\mathbb{N}^*)$.

Logo o axioma **A1** não é satisfeito. $\square$

MODELO 3 Tomaremos $\{1^*, \mathbb{N}^*, s^*\}$ em que $1^* = 1$, $N^* = \{1^*, n^*\}$, $n^* = n = s(1)$ e $s^* : \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{N}^*$ dada por $s^*(1^*) = n^* \wedge s^*(n^*) = n^*$. Este modelo satisfaz os axiomas **A1** e **A3** e não satisfaz **A2**.

PROVA: Dividiremos a prova em três partes:

a) Da definição do modelo temos:

$\mathbb{N}^* = \{1^*, n^*\}$ e $s^*(1^*) = n^* \wedge s^*(n^*) = n^*$.

Daí, temos:

$s^*(\mathbb{N}^*) = \{n^*\}$.

Portanto:

$1^* \notin s^*(\mathbb{N}^*)$.

E o axioma **A1** é satisfeito.:

b) Da definição do modelo $\mathbb{N}^* = \{1^*, n^*\}$.

Daí, temos:

$X \subset \mathbb{N}^* \to X = \emptyset \vee X = \{1^*\} \vee X = \{n^*\} \vee X = \{1^*, n^*\}$.

Por outro lado:

$X \subset \mathbb{N}^* \wedge 1^* \in X \rightarrow X = \{1^*\} \vee X = \{1^*, n^*\}$.

Como, da definição do modelo, $s^*(1^*) = n^* \wedge s^*(n^*) = n^*$. Daí, temos:

$X \subset \mathbb{N}^* \wedge 1^* \in X \wedge s^*(X) \subset X \rightarrow X = \{1^*, n^*\}$.

Como, da definição do modelo, $N^* = \{1^*, n^*\}$. Daí, temos:

$X \subset \mathbb{N}^* \wedge 1^* \in X \wedge s^*(X) \subset X \rightarrow X = \mathbb{N}^*$.

E o axioma **A3** é satisfeito.

c) Como, da definição do modelo, $s^*(1^*) = n^* \wedge s^*(n^*) = n^*$. Daí, temos:

$s^*(1^*) = s^*(n^*) \wedge 1^* \neq n^*$.

De outra forma:

$\neg(\forall m^*, n^* \in \mathbb{N}^*, s^*(m^*) = s^*(n^*) \rightarrow m^* = n^*)$.

Logo o axioma **A2** não é satisfeito. □

Finalizaremos nossa aula com um teorema que ilustrará o método de demonstração conhecido como "*Indução Finita*":

Teorema 17.1. $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq s(n)$.

PROVA: Definimos o subconjunto de $X \subset \mathbb{N}$ dado por:

$X = \{n \in \mathbb{N} | n \neq s(n)\}$.

Mostraremos que $X = \mathbb{N}$ usando o axioma **A3**.

Do axioma **A1** temos:

$1 \notin s(\mathbb{N})$.

Logo:

$1 \neq s(1)$.

Daí, temos:

$1 \in X$.

Por outro lado:

$\forall n \in X \to n \neq s(n)$.

Como s é injetora temos:

$n \neq s(n) \to s(n) \neq s(s(n)) \to s(n) \in X$.

Portanto:

$\forall n \in X \to s(n) \in X$.

Da definição de contido temos:

$s(X) \subset X$.

Juntando tudo:

$X \subset \mathbb{N} \land 1 \in X \land s(X) \subset X$.

Do axioma **A3** temos que:

$X \subset \mathbb{N} \land 1 \in X \land s(X) \subset X \to X = \mathbb{N}$.

Portanto:

$\forall n \in \mathbb{N}, n \neq s(n)$. $\square$

17.3 CONCLUSÃO

Do conteúdo visto nessa aula concluímos que: os três axiomas de Peano são independentes e nenhum número natural é sucessor de si mesmo.

17.4 RESUMO

O conjunto dos números naturais pode ser definido através do uso de trés termos indefinidos e três axiomas. Na forma proposta por Peano temos:

Termos Indefinidos:

- $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais
- $s : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ a função sucessor e
- $1 \in \mathbb{N}$ um número natural especial denominado "*um*".

três axiomas envolvendo os temos indefinidos:

Axiomas

A1 $\exists! 1 \in \mathbb{N} |\, 1 \notin s(\mathbb{N})$

A2 $\forall m, n \in \mathbb{N}, s(m) = s(n) \rightarrow m = n$

A3 $X \subset \mathbb{N} \wedge 1 \in X \wedge s(X) \subset X \rightarrow X = \mathbb{N}$

17.5 ATIVIDADES

Hoje, deixaremos as seguintes atividades:

ATIV. 17.1. Mostre que existem três elementos diferentes entre si em $\mathbb{N}$.

Comentário: Construa os mesmos usando a função sucessor e reveja o **teorema 17.1**.

ATIV. 17.2. Construa um modelo em que $\mathbb{N}^*$ seja finito satisfazendo os axiomas **A1** e **A2** porém, não satisfazendo o axioma **A3**. Prove.

Comentário: Reveja os modelos apresentados nesta aula.

17.6 REFERÊNCIAS BIBLIOGÁFICAS

CARAÇA, Bento de Jesus. Conceitos Fundamentais da Matemática. Livraria Sá da Costa. Editora Lisboa, 1984.

Números Naturais: Axiomas de Peano

COELHO, Sonia Pitta, MILIES, Francisco César Polcino. Números - Uma Introdução à Matemática. Editora EDUSP, terceira edição 2006.