2
LIVRO

18
AULA

Operações em $\mathbb{N}$

META:

Definir as operações de soma e produto e uma relação de ordem no conjnto dos números naturais.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de

Demonstrar propriedades da soma e do produto no conjunto dos números naturais,

Demonstrar propriedades da relação de ordem no conjunto dos números naturais.

PRÉ-REQUISITOS

Aula-04 e Aula-17 os conhecimentos de regras de inferência e regras de equivalência e dos axiomas de Peano.

18.1 Introdução

Em nossa aula anterior, tivemos nosso primeiro contato com os axiomas de Peano na definição do conjunto dos números naturais e provamos a independência deles. Hoje, definiremos uma soma, um produto e uma relação de ordem no conjunto dos números naturais e provaremos alguma de suas propriedades. Devido ao seu conteúdo mais técnico, a aula de hoje é mais curta que as anteriores. Espero que você tenha cumprido o pré requisito solicitado, pois ele ajudará na compreensão e no bom andamento dessa aula. Concentre-se e tenha uma ótima aula.

18.2 Soma no Conjunto dos Números Naturais

Em nada adiantaria definir axiomaticamente o conjunto dos números naturais se não fosse possível, partindo dos axiomas, definir e provar as propriedades de operações como a soma e o produto no conjunto dos números naturais. Algumas destas propriedades foram provadas inicialmente por Grassmam em seus trabalhos sobre a axiomática dos números naturais; outras foram por Peano, que consolidou a definição dos números naturais com seus axiomas. Além das operações citadas, complementaremos o assunto definindo uma relação de ordem no conjunto dos naturais e suas propriedades. Começaremos então pela definição de soma.

Definição 18.1. Definimos a soma $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, de modo recorrente, por:

i - $\forall n \in \mathbb{N}, n + 1 = s(n)$

ii - $\forall m, n \in \mathbb{N}, m + s(n) = s(m + n)$

18.3 Propriedades da soma

A soma, acima definida tem, entre outras, as seguintes propriedades:

S1 $\forall m, n, p \in \mathbb{N}, m + (n + p) = (n + m) + p$ (propriedade associativa).

S2 $\forall m, n \in \mathbb{N}, m + n = n + m$ (propriedade comutativa).

S3 $\forall m, n, p \in \mathbb{N}, m + p = n + p \rightarrow m = n$ (lei do corte).

S4 $\forall m, n \in \mathbb{N}$ apenas uma das condições ocorre:

i - $m = n$

ii - $\exists p \in \mathbb{N} | m = n + p$

iii - $\exists q \in \mathbb{N} | n = m + q$ (tricotomia).

18.4 Produto no Conjunto dos Números Naturais

Prosseguindo definiremos aqui, um produto no conjunto dos números naturais. A saber:

Definição 18.2. Definimos o produto $\bullet : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, de modo recorrente, por:

i - $\forall n \in \mathbb{N}, n \bullet 1 = n$

ii - $\forall m, n \in \mathbb{N}, m \bullet s(n) = (m \bullet n) + n$

18.5 Propriedades do Produto

O produto, acima definido tem, entre outras, as seguintes propriedades:

P1 $\forall m, n, p \in \mathbb{N}, m \bullet (n \bullet p) = (n \bullet m) \bullet p$ (propriedade associativa).

P2 $\forall m, n \in \mathbb{N}, m \bullet n = n \bullet m$ (propriedade comutativa).

P3 $\forall m, n, p \in \mathbb{N}, m \bullet p = n \bullet p \rightarrow m = n$ (lei do corte).

P4 $\forall m, n, p \in \mathbb{N}, (m + n) \bullet p = (m \bullet p) + (n \bullet p)$ (propriedade distributiva).

18.6 Relação de Ordem no Conjunto dos Números Naturais

Para finalizar, definiremos uma relação de ordem no conjunto dos números naturais. A saber:

Definição 18.3. Definimos uma relação de ordem no conjunto dos números naturais, $\geq \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por:
$\forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \leftrightarrow (m = n) \vee (\exists p \in \mathbb{N} | m = n + p)$

OBS 18.1. Podemos definir uma relação de ordem estrita $> \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por:
$\forall m, n \in \mathbb{N}, m > n \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} |\, m = n + k$.

18.7 Propriedades da Relação de Ordem

A Relação de Ordem, acima definida, tem entre outras, as seguintes propriedades:

O1 $\forall m, n, p \in \mathbb{N}, m \geq n \rightarrow m + p \geq n + p$ (compatibilidade com a soma).

O2 $\forall m, n, p \in \mathbb{N}, m \geq n \rightarrow m \bullet p \geq n \bullet p$ (compatibilidade com o produto).

O3 $\forall m, n, p \in \mathbb{N}, m + p = n + p \rightarrow m = n$ (transitividade).

O4 $\forall m, n \in \mathbb{N}$ apenas uma das condições ocorre:

i - $m = n$

ii - $m > n$

iii - $n > m$ (tricotomia).

18.7.1 Demonstração de Algumas Propriedades

Neste momento, demonstraremos três das propriedades listadas acima. As demais ficam como excelentes exercícios.

Começaremos demonstrando a propriedade associativa da soma. A saber:

Propriedade 1 $\forall m, n, p \in \mathbb{N}, m + (n + p) = (m + n) + p$.

PROVA: Começamos definindo o conjunto $X \subset \mathbb{N}$ dado por:

$X = \{p \in \mathbb{N} | \forall m, n \in \mathbb{N}, m + (n + p) = (m + n) + p\}$.

a)Da segunda parte da definição de soma temos:

$\forall m, n \in \mathbb{N}, m + s(n) = s(m + n)$.

Da primeira parte da definição de soma temos:

$s(n) = n + 1 \wedge s(m + n) = (m + n) + 1$.

Daí, temos:

$\forall m, n \in \mathbb{N}, m + (n + 1) = (m + n) + 1$.

Portanto:

$1 \in X$.

b) Por outro lado,

$\forall p \in X$.

$\forall m, n \in \mathbb{N}, m + (n + p) = (m + n) + p$.

Como s é uma função temos:

$s(m + (n + p)) = s((m + n) + p)$.

Da segunda parte da definição de soma temos:

$s(m + (n + p)) = m + s(n + p)$.

Da segunda parte da definição de soma temos:

$s(m + (n + p)) = m + (n + s(p))$.

Por outro lado, da segunda parte da definição de soma temos:

$s((m + n) + p) = (m + n) + s(p)$.

Como $s(m+(n+p)) = s((m+n)+p)$, $s(m+(n+p)) = m+s(n+s(p))$ e $s((m + n) + p) = (m + n) + s(p)$ temos:

$m + (n + s(p)) = (m + n) + s(p)$

Da definição de X temos:

$s(p) \in X$.

Logo: $\forall p \in X \to s(p) \in X$.

Da definição de contido temos:

$s(X) \subset X$.

Juntando tudo:

$X \subset \mathbb{N} \wedge 1 \in X \wedge s(X) \subset X$.

Do axioma **A3** temos:

$X = \mathbb{N}$.

Portanto:

$\forall m, n, p \in \mathbb{N}, m + (n + p) = (m + n) + p$. $\square$

Partimos agora à demonstração da propriedade distributiva do produto sobre a soma. Admitiremos como provadas, pois serão necessárias, as propriedades: associativa **S1** e comutativa **S2** da soma. Vejamos:

Propriedade 2 $\forall m, n, p \in \mathbb{N}, (m + n) \bullet p = (m \bullet p) + (n \bullet p)$.

PROVA: Começamos por definir o conjunto $X \subset \mathbb{N}$ dado por:

$X = \{p \in \mathbb{N} | \forall m, n \in \mathbb{N}, (m + n) \bullet p = (m \bullet p) + (n \bullet p)\}$.

a) Da primeira parte da definição de produto temos:

$\forall m, n \in \mathbb{N}, (m + n) \bullet 1 = m + n$.

Também, da primeira parte da definição de produto $m = m \bullet 1 \wedge n = n \bullet 1$. Dai, temos:

$(m + n) \bullet 1 = (m \bullet 1) + (n \bullet 1)$.

Portanto:

$1 \in X$.

b) Por outro lado:

$\forall p \in X$.

$\forall m, n \in \mathbb{N}, (m + n) \bullet p = (m \bullet p) + (n \bullet p)$.

Da segunda parte da definição de produto temos:

$(m + n) \bullet s(p) = (m + n) \bullet p + (m + n)$.

Daí, temos:

$(m + n) \bullet s(p) = ((m \bullet p) + (n \bullet p)) + (m + n)$.

Da propriedade associativa da soma **S1** temos:

$(m + n) \bullet s(p) = (m \bullet p) + ((n \bullet p) + (m + n))$.

Da propriedade comutativa da soma **S2** temos:

$(m + n) \bullet s(p) = (m \bullet p) + ((n \bullet p) + (n + m))$.

Da propriedade associativa da soma **S1** temos:

$(m + n) \bullet s(p) = (m \bullet p) + (((n \bullet p) + n) + m)$.

Como da segunda parte da definição de produto $(n \bullet p) + n = n \bullet s(p)$ temos:

$(m + n) \bullet s(p) = (m \bullet p) + ((n \bullet s(p)) + m)$.

Da propriedade comutativa da soma **S2** temos:

$(m+n) \bullet s(p) = (m \bullet p) + (m + (n \bullet s(p)))$.

Da propriedade associativa da soma **S1** temos:

$(m+n) \bullet s(p) = ((m \bullet p) + m) + (n \bullet s(p))$.

Como da segunda parte da definição de produto $(m \bullet p) + m = m \bullet s(p)$ temos:

$(m+n) \bullet s(p) = (m \bullet s(p)) + (n \bullet s(p))$.

Da definição de X temos:

$s(p) \in X$.

Logo: $\forall p \in X \rightarrow s(p) \in X$.

Da definição de contido temos:

$s(X) \subset X$.

Juntando tudo:

$X \subset \mathbb{N} \wedge 1 \in X \wedge s(X) \subset X$.

Do axioma **A3** temos:

$X = \mathbb{N}$.

Portanto:

$\forall m, n, p \in \mathbb{N}, (m+n) \bullet p = (m \bullet p) + (n \bullet p)$. $\square$

Para finalizar, faremos a demonstração da propriedade transitiva da relação de ordem. Admitiremos como provadas, pois serão necessária, as propriedades associativa **S1**, comutativa **S2** e a lei do corte da soma **S3**.

Propriedade 3 $\forall m, n, p \in \mathbb{N}, m \geq n \wedge n \geq p \rightarrow m \geq p$.

PROVA: para: $\forall m, n, p \in \mathbb{N}, m \geq n \wedge n \geq p$ temos:

$((m = n) \vee (m > n)) \wedge ((n = p) \vee (n > p))$.

Distinguimos quatro casos:

Caso 1 $(m = n) \wedge (n = p)$.

Neste caso, usando a propriedade transitiva da igualdade temos:

$m = p$.

Como $m = p \vdash (m = p) \vee (m > p)$. Regra de inferência adição.

Logo:

$m \geq p$.

Caso 2 $(m = n) \wedge (n > p)$.

Do axioma da substituição da Lógica Matemática.

$(m = n) \wedge (n > p) \rightarrow m > p$.

Por outro lado da regra de inferência adição temos:

$m > p \vdash (m = p) \vee (m > p)$.

Logo:

$m \geq p$.

Caso 3 $(m > n) \wedge (n = p)$.

Do axioma da substituição da Lógica Matemática.

$(m > n) \wedge (n = p) \rightarrow m > p$.

Por outro lado da regra de inferência adição temos:

$m > p \vdash (m = p) \vee (m > p)$.

Logo:

$m \geq p$.

Caso 4 $(m > n) \wedge (n > p)$ o mais complicadinho.

Como $m > n \wedge n > p$ da definição da relação de ordem no conjunto dos números naturais temos:

$\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N} | m = n + k_1 \wedge n = p + k_2$.

Do axioma da substituição da Lógica Matemática temos:

$m = (p + k_2) + k_1$.

Da propriedade associativa da soma **S1** temos:

$m = p + (k_2 + k_1)$.

Daí, temos:

$\exists k \in \mathbb{N}, k = k_2 + k_1 | m = p + k$.

Portanto:

$m > p$.

Da regra de inferência adição temos:

$m > p \vdash (m = p) \vee (m > p)$.

Portanto:

$m \geq p$.

Em todos os casos temos:

$m \geq n \wedge n \geq p \rightarrow m \geq p$.

Daí, finalmente temos:

$\forall m, n, p \in \mathbb{N}, m \geq n \wedge n \geq p \rightarrow m \geq p$. $\square$

18.8 CONCLUSÃO

Concluímos que, embora, feita de forma interativa, as definições de soma e de números naturais pareçam artificiais, elas têm as mesmas propriedades intuitivas a que estamos acostumados.

18.9 RESUMO

Resumiremos nossa aula com as seguintes definições e propriedades:

Definição da soma no conjunto dos números naturais:

Definição:

Definimos a soma $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, de modo recorrente, por:

i - $\forall n \in \mathbb{N}, n + 1 = s(n)$

ii - $\forall m, n \in \mathbb{N}, m + s(n) = s(m + n)$

A soma no conjunto dos números naturais tem, entre outras, as seguintes propriedades:

S1 $\forall m, n, p \in \mathbb{N}, m + (n + p) = (n + m) + p$ (propriedade associativa).

S2 $\forall m, n \in \mathbb{N}, m + n = n + m$ (propriedade comutativa).

S3 $\forall m, n, p \in \mathbb{N}, m + p = n + p \rightarrow m = n$ (lei do corte).

S4 $\forall m, n \in \mathbb{N}$ apenas uma das condições ocorre:

i - $m = n$

ii - $\exists p \in \mathbb{N} | m = n + p$

iii - $\exists q \in \mathbb{N} | n = m + q$ (tricotomia).

Definição do produto no conjunto dos números naturais:
Definição:
Definimos o produto $\bullet : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, de modo recorrente, por:

i - $\forall n \in \mathbb{N}, n \bullet 1 = n$

ii - $\forall m, n \in \mathbb{N}, m \bullet s(n) = (m \bullet n) + n$

O produto no conjunto dos números naturais tem, entre outras, as seguintes propriedades:

P1 $\forall m, n, p \in \mathbb{N}, m \bullet (n \bullet p) = (n \bullet m) \bullet p$ (propriedade associativa).

P2 $\forall m, n \in \mathbb{N}, m \bullet n = n \bullet m$ (propriedade comutativa).

P3 $\forall m, n, p \in \mathbb{N}, m \bullet p = n \bullet p \rightarrow m = n$ (lei do corte).

P4 $\forall m, n, p \in \mathbb{N}, (m + n) \bullet p = (m \bullet p) + (n \bullet p)$ (propriedade distributiva).

Operações em $\mathbb{N}$

Definição de uma relação de ordem no conjunto dos números naturais:

Definição:

Definimos uma relação de ordem $\geq \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por:

$\forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \leftrightarrow (m = n) \vee (\exists p \in \mathbb{N} | m = n + p)$

A relação de ordem no conjunto dos números naturais, acima definida, tem, entre outras, as seguintes propriedades:

O1 $\forall m, n, p \in \mathbb{N}, m \geq n \rightarrow m + p \geq n + p$ (compatibilidade com a soma).

O2 $\forall m, n, p \in \mathbb{N}, m \geq n \rightarrow m \bullet p \geq n \bullet p$ (compatibilidade com o produto).

O3 $\forall m, n, p \in \mathbb{N}, m + p = n + p \rightarrow m = n$ (transitividade).

O4 $\forall m, n \in \mathbb{N}$ apenas uma das condições ocorre:

i - $m = n$

ii - $m > n$

iii - $n > m$ (tricotomia).

18.10 ATIVIDADES

Deixamos como atividades a demonstração de algumas propriedades acima.

ATIV. 18.1. Prove a propriedade comutativa da soma $\forall m, n \in \mathbb{N}, m + n = n + m$.

Comentário: Primeiramente mostre que a soma de 1 com qualquer número natural $n \in \mathbb{N}$ é comutativa, partindo do conjunto $X = \{n \in \mathbb{N} | n + 1 = 1 + n\}$. Em seguida, defina o subconjunto dos números naturais $Z = \{m \in \mathbb{N} |\, m + n = n + m, \forall n \in \mathbb{N}\}$ e mostre então que $Z = \mathbb{N}$.

ATIV. 18.2. Prove a propriedade comutativa do produto $\forall m, n \in \mathbb{N}, m \bullet n = n \bullet m$.

Comentário: Primeiramente mostre que o produto de 1 com qualquer número natural $n \in \mathbb{N}$ é comutativo, partindo do conjunto $X = \{n \in \mathbb{N} |\, n \bullet 1 = 1 \bullet n\}$. Em seguida, defina o subconjunto dos números naturais $Z = \{m \in \mathbb{N} |\, m \bullet n = n \bullet m, \forall n \in \mathbb{N}\}$ e mostre então que $Z = \mathbb{N}$.

18.11 REFERÊNCIAS BIBLIOGÁFICAS

CARAÇA, Bento de Jesus. Conceitos Fundamentais da Matemática. Livraria Sá da Costa. Editora Lisboa, 1984.

COELHO, Sonia Pitta, MILIES, Francisco César Polcino. Números - Uma Introdução à Matemática. Editora EDUSP, terceira edição 2006.