Princípio da Boa Ordem

META

Introduzir o princípio da boa ordem nos números naturais e algumas de suas conseqüências.

OBJETIVOS

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Aplicar o princípio da boa ordem na demonstração de algumas proposições envolvendo números naturais.

PRÉ-REQUISITOS

Aula-18 os conhecimentos das operações no conjunto dos números naturais.

19.1 Introdução

A relação de ordem, definida na aula anterior no conjunto dos números naturais, é uma relação de ordem total e como veremos em nesta aula, ela garante no conjunto dos números naturais o Princípio da Boa Ordem, isto é, todo subconjunto dos naturais possui um menor elemento. Este fato será provado como base para o segundo princípio da indução finita.

19.2 Alguns Teoremas

Para começar, veremos o seguinte teorema:

Teorema 19.1. $\forall n \in \mathbb{N}, s(n) > n$. *Todo número natural é menor que seu sucessor.*

PROVA: Da primeira parte da definição de soma no conjunto dos números naturais temos:
$\forall n \in \mathbb{N}, n + 1 = s(n)$.
Da propriedade comutativa da igualdade temos:
$\forall n \in \mathbb{N}, s(n) = n + 1$.
Que podemos reescrever como:
$\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, k = 1|(n) = n + k$.
Da definição da relação de ordem estrita temos:
$\forall n \in \mathbb{N}, s(n) > n$. $\square$

Teorema 19.2. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

PROVA: $\forall n \in \mathbb{N}$, distinguimos dois casos:
Caso 1 $n = 1$.
Da regra de inferência adição temos:

$n = 1 \vdash (n = 1) \vee (n > 1)$.

Portanto:

$n \geq 1$.

Caso 2 $\neg(n = 1)$.

E usamos a hipótese nula:

HN $1 > n$.

Da definição de $>$ temos:

$\exists p \in \mathbb{N} | 1 = n + p$.

Da propriedade comutativa da soma **S2** temos:

$1 = p + n$.

Como $\neg(n = 1)$ do axioma **A1** temos:

$\exists m \in \mathbb{N} | n = s(m)$.

Daí, temos:

$1 = p + s(m)$.

Da segunda parte da definição de soma temos:

$1 = s(p + m)$.

Do axioma **A1** isto é um absurdo (1 não é sucessor de nenhum número natural). Portanto a hipótese nula é falsa e:

$\neg(n < 1)$.

Como $\neg(n = 1) \wedge \neg(n < 1)$, da tricotomia da relação de ordem temos que a única opção é:

$n > 1$.

Dos dois casos temos:

$(n = 1) \vee (n > 1)$.

Portanto, da definição da relação de ordem temos:

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. $\square$

OBS 19.1. O **teorema 19.1** diz que o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é limitado inferiormente e seu elemento mínimo é o 1.

Princípio da Boa Ordem

Uma conseqüência do **teorema 19.2** é que não existe um número natural entre um número natural e seu sucessor, como veremos no próximo teorema. A saber:

Teorema 19.3. $\forall n \in \mathbb{N}, \nexists m \in \mathbb{N} | n < m < s(n)$.

PROVA: Consideremos a seguinte hipótese nula:

HN $\exists n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} | n < m < s(n)$.

Como $n < m$ temos:

$\exists k \in \mathbb{N} | m = n + k$ e,

Como $m < s(n)$ temos:

$\exists p \in \mathbb{N} | s(n) = m + p$.

Daí, temos:

$s(n) = (n + k) + p$.

Da propriedade associativa da soma **S1** temos:

$s(n) = n + (k + p)$.

Da primeira parte da definição de soma temos:

$n + 1 = n + (k + p)$.

Da lei do cancelamento da soma temos:

$1 = k + p$.

Logo:

$1 > k$.

Do **teorema 19.2** temos:

$k > 1$.

Da tricotomia temos que:

$1 > k \wedge 1 < k$ é um absurdo, pois apenas uma das possibilidade é verdadeira. Logo **HN** é falsa e:

$\forall n \in \mathbb{N}, \nexists m \in \mathbb{N} | n < m < s(n)$. $\square$

Os teoremas a seguir darão sentido à relação de ordem no conjunto dos números naturais. A saber:

Teorema 19.4. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n$. *(propriedade reflexiva)*

PROVA: Como do axioma da igualdade da Lógica Matemática
$\forall n \in \mathbb{N}, n = n$.
Da regra de inferência adição temos:
$n = n \vdash n = n \vee n > n$.
Portanto:
$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n$. $\square$

Teorema 19.5. $\forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq m \wedge m \geq n \rightarrow m = n$. *(propriedade anti-simétrica)*

PROVA: Da hipótese do teorema temos:
$n \geq m \wedge m \geq n$.
Da definição da relação de ordem temos:
$(n = m \vee n > m) \wedge (m = n \vee m > n)$.
Da regra de equivalência distributiva da conjunção sobre a disjunção temos:
$(n = m \wedge (m = n \vee m > n)) \vee (n > m \wedge (m = n \vee m > n))$.
Novamente da regra de equivalência distributiva da conjunção sobre a disjunção temos:
$((n = m \wedge m = n) \vee (n = m \wedge m > n)) \vee ((n > m \wedge m = n) \vee (n > m \wedge m > n))$.
Como a disjunção tem propriedades associativa e comutativa, são desnecessários parênteses para indicar a ordem de precedência deste modo temos:
$(n = m \wedge m = n) \vee (n = m \wedge m > n) \vee (n > m \wedge m = n) \vee (n >$

$m \wedge m > n)$.

A propriedade de tricotomia diz que as opções 2, 3 e 4 não são possíveis isto é, $n = m \wedge m > n \equiv \perp$, $n > m \wedge m = n \equiv \perp$ e $n > m \wedge m > n \equiv \perp$ e temos:

$(n = m \wedge m = n) \vee \perp \vee \perp \vee \perp$.

Portanto:

$m = n$.

Logo:

$\forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq m \wedge m \geq n \rightarrow m = n$. $\square$

Desta forma a nossa relação $\geq \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por $\forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \leftrightarrow (m = n \vee \exists p \in \mathbb{N} | m = n + p)$ possui as seguintes propriedades:

1. $\forall m \in \mathbb{N}, m \geq m$.

2. $\forall m, n, \in \mathbb{N}, m \geq n \wedge n \geq m \rightarrow m = n$.

3. $\forall m, n, p \in \mathbb{N}, m \geq n \wedge n \geq p \rightarrow m \geq p$.

4. $\forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \vee n \geq m$

Portanto nossa relação $\geq$ é uma relação de ordem total no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. As propriedades 3 e 4 ficam como exercícios.

19.3 Princípio da Boa Ordem

Veremos agora, o Princípio da Boa Ordem que diz que qualquer subconjunto não vazio do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais tem um menor elemento, isto leva à definição:

Definição 19.1. Sejam A um conjunto e $\geq A \times A$ uma relação de ordem total em A. Dizemos que A é bem ordenado, somente se: $\forall X \subset A | X \neq \emptyset, \exists x \in X, z \geq x, \forall z \in X$.

A seguir, um teorema de fácil demonstração porém, útil na demonstração do princípio da boa ordem no conjunto N dos números naturais.

Teorema 19.6. $\forall n \in \mathbb{N}, \neg(a > a)$.

PROVA: Do axioma da igualdade da Lógica Matemática temos:
$a = a$.
Portanto, da tricotomia temos:
$\neg(a > a)$. $\square$
Agora ao teorema da boa ordem. A saber:

Teorema 19.7. $\forall A \subset \mathbb{N}, A \neq \emptyset, \exists a \in A | x \geq a, \forall x \in A$.

PROVA: Como $A \neq \emptyset$, dois casos são possíveis:
Caso 1 $1 \in A$.
Neste caso, como $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ temos:
$\exists a \in A, a = 1 | x \geq 1, \forall x \in A$.
E $a = 1$ é o menor elemento de A e está provado o teorema.
Caso 2 $1 \notin A$.
Neste caso, definimos o conjunto $X \subset \mathbb{N}$ dado por:
$X = \{x \in \mathbb{N} | z > x \forall z \in A\}$.
Vamos a alguns fatos:
Primeiramente como $\forall n \in \mathbb{N}, \neg(n > n)$ temos:
$\forall a \in A \neg(a > a)$.

Portanto:

$\forall a \in A \to a \notin X$.

Desta forma:

$A \cap X = \emptyset$

E como $A \neq \emptyset$ temos:

$X \neq \mathbb{N}$.

Em segundo como $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ temos:

$\forall z \in A, z \geq 1$.

Como $1 \notin A$ da tricotomia temos:

$\forall z \in A, z > 1$.

Daí, temos:

$1 \in X$.

Vamos agora a uma hipótese nula:

HN $\forall x \in X \to s(x) \in X$.

Da **HN** temos:

$s(X) \subset X$.

Logo:

$X \subset \mathbb{N} \wedge 1 \in X \wedge s(X) \subset X$.

Do axioma da indução **A3** temos:

$X = \mathbb{N}$.

Daí, temos:

$X \neq \mathbb{N} \wedge X = \mathbb{N}$.

Absurdo. Logo **HN** é falsa e sua negativa verdadeira:

$\exists x \in X | x \in X \wedge s(x) \notin X$.

Como $x \in X$ temos:

$z > x \forall z \in A$.

Por outro lado como $s(x) \notin X$ temos:

$\exists a \in A | s(x) \geq a$.

Mais uma hipótese nula:

HN1 $s(x) > a$.

Neste caso temos:

$s(x) > a > x$.

Do **teorema 19.3** temos:

$\neg(s(x) > a > x) \wedge s(x) > a > x$.

Absurdo. Logo **HN1** é falsa e temos:

$\neg(s(x) > a)$.

Daí, temos:

$s(s) \geq a \wedge \neg(s(x) > a)$.

Da definição de $\geq$ temos:

$((s(x) = a) \vee (s(x) > a)) \wedge \neg(s(x) > a)$.

Portanto, temos:

$s(x) = a$.

Vamos à última hipótese nula.

HN2 $\exists z \in A | a > z$.

Como $x \in X \wedge z \in A$ temos:

$z > x$.

Como de **HN2** $a > z \wedge s(x) = a$ temos:

$s(x) > z > x$.

Do **teorema 19.3** temos:

$\neg(s(x) > z > x) \wedge s(x) > z > x$.

Absurdo. Logo **HN2** é falsa e temos:

$\forall z \in A, \neg(a > z)$.

Da tricotomia temos:

$\forall z \in A, z \geq a$.

E $a \in A$ é o menor elemento.

Juntando os **caso 1** e **caso2** temos:

Princípio da Boa Ordem

$\forall A \subset \mathbb{N}, A \neq \emptyset, \exists a \in A | x \geq a, \forall x \in A.$ $\square$

19.4 Primeiro Princípio da Indução Finita

O Primeiro Princípio da Indução Finita nada mais é que uma reinterpretação do terceiro axioma de Peano reescrito da seguinte forma:

Primeiro Princípio da Indução Finita Seja $p(n)$ uma proposição aberta satisfazendo:

i - $p(1)$

ii - $p(n) \rightarrow p(s(n))$

então $\forall n \in \mathbb{N}, p(n)$.

O Primeiro Princípio da Indução Finita pode ser ilustrado com o seguinte raciocínio:

Tendo como exemplo uma fileira de pedras de dominó:

a) a primeira pedra cai.

b) se n-ésima pedra cai então a $(n+1)$-ésima pedra cai.

Conclusão: todas as pedras do dominó caem.

19.5 Segundo Princípio da Indução Finita

Usaremos aqui o teorema da boa ordem para provar o Segundo Princípio da Indução. Um princípio mais elaborado que o primeiro e tão útil quanto este.

Segundo Princípio da Indução Finita Seja $p(n)$ uma proposição aberta satisfazendo:

i - $p(1)$

ii - $(\forall z \in \mathbb{N}, 1 < z < n, p(z)) \rightarrow p(n)$

então $\forall n \in \mathbb{N}, p(n)$

PROVA: Vamos supor, por absurdo, a hipótese nula de que sejam válidos o ítem i e a hipótese do ítem ii porém, a conclusão do ítem ii seja falsa para alguma proposição $p(n)$ aberta no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais isto é:

HN

i - $p(1)$

ii - $(\forall n \in \mathbb{N}, (\forall z \in \mathbb{N}, 1 < z < n, p(z)) \rightarrow p(n)) \wedge \neg(\forall n \in \mathbb{N}, p(n))$

e definimos o conjunto:

$X = \{n \in \mathbb{N} | \neg p(n)\}$.

Como assumimos a hipótese nula:

$X \neq \emptyset$.

Primeiro fato:

Como $p(1)$ temos:

$1 \notin X$. Do **teorema 19.7** X tem um menor elemento:

$\exists m \in X | m \leq z, \forall z \in X$.

Como $1 \notin X$ temos:

$m \neq 1$.

Portanto, como m é o menor elemento de X temos:

$\forall z \in \mathbb{N}, 1 \leq z < m, z \notin X$.

De outra forma:

$\forall z \in \mathbb{N}, 1 \leq z < m, p(z)$.

Portanto, do item ii da suposição temos:

$(\forall z \in \mathbb{N}, 1 \leq z < m, z, p(z)) \rightarrow p(m)$.

Porém, como $m \in X$ temos:

$\neg p(m)$.

Daí, temos:

$p(m) \wedge \neg p(m)$.

Absurdo. Logo **HN** é falsa e:

i - $p(1)$

ii - $(\forall n \in \mathbb{N}, (\forall z \in \mathbb{N}, 1 < z < n, p(z)) \rightarrow p(n)) \rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, p(n))$. $\square$

19.6 Algumas Demonstrações

Aqui vermos algumas demonstrações que ilustraram aplicações do Princípio da Indução Finita. Nas atividades serão propostas também alguns problemas, cuja solução envolve a aplicação do Princípio da Indução Finita.

PROBLEMA 1: $\forall n \in \mathbb{N}, n < 2^n$.

PROVA: Considerando a proposição aberta:

$p(n) \equiv n < 2^n$.

a) A proposição é verdade para $n = 1$ pois,

$p(1) \equiv 1 < 2^1$ é verdade.

b) Supondo que a desigualdade vale para um número natural n temos:

$p(n) \equiv n < 2^n$.

Para $n+1$, do axioma da igualdade da Lógica Matemática, temos:

$n + 1 = n + 1$.

Como, $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq n$ temos:

$n + 1 \leq n + n$.

De outra forma:

$n + 1 \leq 2n$.

Como, por suposição, $n < 2^n$ temos:

$n + 1 < 2.2^n$.

Usando propriedade das potências de mesma base temos:

$n + 1 < 2^{n+1}$.

Daí, temos:

$p(n+1) = p(s(n)) \equiv n + 1 < 2^{n+1}$ é verdade.

Portanto:

1. $p(1)$

2. $p(n) \to p(s(n))$

Do Primeiro Princípio da Indução Finita temos:

$\forall n \in \mathbb{N}, p(n)$.

De outra forma:

$\forall n \in \mathbb{N}, n < 2^n$. $\square$

PROBLEMA 2: $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

PROVA: Considerando a proposição aberta:

$p(n) \equiv 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

a) A proposição é verdade para $n = 1$ pois,

$p(1) \equiv 1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$, é verdade.

b) Supondo que a fórmula vale para o natural $n \in \mathbb{N}$ temos:

$p(n) \equiv 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Para $n + 1$ podemos escrever:

$1 + 2 + 3 + \cdots + (n+1) = (1 + 2 + 3 + \cdots + n) + (n+1)$.

Como supomos que a proposição vale para o natural $n \in \mathbb{N}$ temos:

$1 + 2 + 3 + \cdots + (n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1)$.

Operando a fração do lado direito da expressão temos:

$1 + 2 + 3 + \cdots + (n+1) = \dfrac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$.

Simplificando temos:

$1 + 2 + 3 + \cdots + (n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Que pode ser reescrita como:

$1 + 2 + 3 + \cdots + (n+1) = \dfrac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$.

Ou seja $p(n+1) = p(s(n))$ é verdade.

Daí, temos:

$p(n) \to p(s(n))$.

Como:

i - $p(1)$

ii - $p(n) \to p(s(n))$

Do Princípio da Indução Finita temos:

$\forall n \in \mathbb{N}, p(n)$.

Ou seja:

$\forall n \in \mathbb{N}, 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. $\square$

Para finalizar, vamos a um problema em que, para sua solução, é necessário o segundo princípio da indução finita.

PROBLEMA 3: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, n = p_1.p_2 \cdots p_m$ em que $m \in \mathbb{N}$ e $p_1, p_2, \ldots, p_m$ são primos possivelmente repetidos.

PROVA: Considerando a proposição aberta:

$p(n) \equiv n = p_1.p_2 \cdots p_m$

a) A proposição é verdade para $n = 2$ pois,

$p(2) \equiv 2 = 2$

em que $m = 1$ e $p_1 = 2$.

b) Supondo que $\forall k \in \mathbb{N}, 2 \leq k \leq n, p(n)$ vale temos, para $n+1$ dois casos:

Caso 1: $n+1$ é primo. Neste caso:

$p(n+1) \equiv n+1 = p_1$

E a proposição vale para $n+1$.

Caso 2 $n+1$ não é primo. Neste caso:

$n+1 = a.b$ em que $2 \leq a \leq n$ e $2 \leq b \leq n$.

Como $\forall k \in \mathbb{N}, 2 \leq k \leq n, p(n)$ temos:

$a = p_1 \cdots p_m$ e $b = p_{m+1} \cdots p_s$.

Daí, temos:

$p(m+1) = p_1 \cdots p_m p_{m+1} \cdots p_s$.

Ou seja $p(n+1) = p(s(n))$ é verdade.

Daí, temos:

$(\forall k \in \mathbb{N}, 2 \leq k \leq n, p(n)) \rightarrow p(s(n))$.

Como:

i - $p(2)$

ii - $(\forall k \in \mathbb{N}, 2 \leq k \leq n, p(n)) \rightarrow p(s(n))$

Do Segundo Princípio da Indução Finita temos:

$\forall n \in \mathbb{N}, p(n)$.

Ou seja:

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, n = p_1.p_2 \cdots p_m$ em que $m \in \mathbb{N}$ e $p_1, p_2, \ldots, p_m$ são primos. $\square$

19.7 CONCLUSÃO

Concluímos que o Princípio da Boa Ordem corresponde a mossa experiência do dia a dia, em qualquer conjunto de números naturais um deles será o menor de todos.

19.8 RESUMO

Nosso resumo hoje consta dos seguintes teoremas:

TEOREMA 1 $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$

TEOREMA 2 $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$

TEOREMA 3 $\forall n \in \mathbb{N}, \nexists m \in \mathbb{N} | n < m < s(n).$

TEOREMA 4 $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n.$

TEOREMA 5 $\forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq m \wedge m \geq n \rightarrow m = n.$

TEOREMA 6 $\forall n \in \mathbb{N}, \neg(a > a).$

TEOREMA 7 $\forall A \subset \mathbb{N}, A \neq \emptyset, \exists a \in A | x \geq a, \forall x \in A.$

19.9 ATIVIDADES

Deixamos como atividades a demonstração de algumas proposições definidas sobre o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais.

ATIV. 19.1. Mostre que: $\forall n \in \mathbb{N}, 7^n - 1$ é divisível por 6.

Comentário: Escreva a proposição aberta $p(n) \equiv 6 | 7^n - 1$ (seis divide $7^n - 1$) e use o princípio da indução finita.

ATIV. 19.2. Mostre que: $\forall n \in \mathbb{N}, 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Comentário: Escreva a proposição aberta $p(n) \equiv 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ e use o princípio da indução finita.

19.10 REFERÊNCIAS BIBLIOGÁFICAS

CARAÇA, Bento de Jesus. Conceitos Fundamentais da Matemática. Livraria Sá da Costa. Editora Lisboa, 1984.

COELHO, Sonia Pitta, MILIES, Francisco César Polcino. Números - Uma Introdução à Matemática. Editora EDUSP, terceira edição 2006.