2

LIVRO

20

AULA

Cardinalidade e Conjuntos Enumeráveis

META:

Estabelecer os conceitos de cardinalidade e de conjuntos enumeráveis.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Conceituar cardinalidade de conjuntos.

Conceituar conjuntos enumeráveis.

PRÉ-REQUISITOS

Aula-16 os conhecimentos de funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras.

20.1 Introdução

Caro aluno, chegamos à nossa última aula e para ercerrarmos nossa disciplina veremos cardinalidade e conjuntos enueráveis. Trata portanto, de forma analítica, do problema da contagem, isto é, um problema de comparação entre conjuntos. Este é, na verdade, um dos problemas mais antigos que aguçaram a imaginação dos seres humanos. Desde o tempo das cavernas a humanidade percebeu a necessidade de contar: contar seus parentes, os animais no rebanho etc. No bojo, o problema da cardinalidade arrasta o problema da comparação de conjuntos infinitos. Vamos lá e boa aula.

20.2 Cardinalidade de um Conjunto

Cardinalidade é a medida do tamanho de um conjunto, e se tratando de um conjunto finito é o número de elementos do conjunto. A saber:

Definição 20.1. Sejam A e B dois conjuntos. Dizemos que A e B são equinumerosos, denotado $A \sim B$, somente se existe uma bijeção $f : A \mapsto B$.

OBS 20.1. Se dois conjuntos são finitos e equinumerosos eles têm o mesmo tamanho, no sentido em que podemos podemos emparelhar seus elementos. Mesmo conjuntos infinitos é possível, em alguns casos, emparelhar seus elementos, como veremos mais adiante no conceito de conjuntos enumeráveis.

Uma característica importante da equinumerosidade entre conjuntos é que a mesma trata-se de uma relação de equivalência, visto que:

a) Para todo conjunto A, a função identidade $I : A \mapsto A$, tal que $\forall a \in A, I(a) = a$ é uma função bijetora. Logo $A \sim A$ e a equinumerosidade de conjuntos tem propriedade reflexiva.

b) Para todos conjuntos A e B, se $A \sim B$, existe uma bijeção $f : A \mapsto B$. Daí, como f é uma bijeção possui uma inversa $f^{-1} : B \mapsto A$ que também é uma bijeção de B em A. Portanto, $B \sim A$. Logo $A \sim B \rightarrow B \sim A$ e a equinumerosidade de conjuntos possui propriedade simétrica.

c) Para todos conjuntos A, B e C, se $A \sim B$ e $B \sim C$, então existem bijeções $f : A \mapsto B$ e $g : B \mapsto C$. Daí, a composta $h : A \mapsto C$, dada por $\forall a \in A, h(a) = g(f(a))$, é uma bijeção de A em C. Portanto, $A \sim C$. Logo, $A \sim B \wedge B \sim C \rightarrow A \sim C$ e a equinumerosidade de conjuntos tem propriedade transitiva.

Dos ítens a) b) e c) acima concluimos que a equinumerosodade de conjuntos é uma relação de equivalência.

Georg Cantor fez uma definição genial: dois conjuntos seriam de mesma cardinalidade quando houvesse alguma bijeção entre eles. E, a aparente obviedade deste conceito fica por conta de tudo parecer extraordinário. A saber:

Definição 20.2. Sejam A e B dois conjuntos. Dizemos que A e B são cardinalmente equivalentes isto é, têm mesma cardinalidade, denotado $|A| = |B|$ somente se: $A \sim B$.

OBS 20.2. A definição acima diz apenas quando dois conjuntos tem a mesma cardinalidade, sem no entanto, definir a cardinalidade em si. Isto será feito em partes. Primeiramente definiremos classes de equivalência de conjuntos.

A classe de equivalência de conjuntos equinumerosos pode ser definida por:

Definição 20.3. Seja A um conjunto. Definimos a classe de equivalência de A, denotada $\bar{A}$ por:
$\bar{A} = \{X | A \sim X\}$.

agora, podemos definir a cardinalidade de um conjunto como sua classe de equivalência. Formalmente temos:

Definição 20.4. Seja A um conjunto. Definimos a cardinalidade de A por:
$|A| \overset{\text{def}}{=} \bar{A}$.

OBS 20.3. Os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c\}$ têm mesma cardinalidade, já que a função $f : A \mapsto B$ dada por $f(1) = a$, $f(2) = b$ e $f(3) = c$ é uma bijeção de A em B.

A **definição 20.2** pode parecer prematura, no entanto, isto reflete apenas formas diferentes de encarar o conceito de cardinalidade. A primeira definição é um modo funcional de encarar a cardialidade, enquanto que, a definição em si da cardinalidade incorpora a noção de número cardinal (que mede o tamanho de um conjunto). Normalmente só pensamos em conjuntos finitos e estas diferenças podem parecer sem sentido.

20.2.1 Conjuntos Enumeráveis

Para conjuntos finitos o conceito de cardinalidade é excelente e constitui-se em uma das noções comuns mais intuitivas. Intuitiva a ponto de ser compartilhada com muitos animais. Afinal, experiências têm mostrado que alguns animais possuem a noção de contagem embora limitada a um máximo de 6 (caso do macaco). Porém, somente o homem concebe conjuntos infinitos. Quanto a isto, a noção predominante de quantidade que vinha dos primórdios da civilização, acenava haver mais números naturais que números pares. Um dos axiomas admitidos por Aristóteles dizia que o todo é sempre maior que suas partes. Galileu Galilei contudo, conhecia o fato de que existem tantos pares quantos os naturais, postos emparelhados pela bijeção: $f(n) = 2n$, o que derrubava a crença de que o todo é sempre maior que suas partes, isto, como vemos, não vale para conjuntos infinitos. No entanto, coube a Cantor ser o primeiro Matemático a conceituar com precisão a noção de conjunto infinito bem como, tratar da comparação de conjuntos infinitos, introduzindo o conceito de conjunto enumerável.

Definição 20.5. Seja A um conjunto. Dizemos que A é um conjunto enumerável, somente se A é vazio ou $\exists \varphi \in Sobre(\mathbb{N}, A)$.

OBS 20.4. A denominação "*enumerável*", justifica-se pois, se A não é vasio então $\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \ldots$ é uma enumeração dos elementos de A.

Um outro conceito importante é o de numeração, definido da seguinte forma:

Definição 20.6. Seja A um conjunto. Dizemos que $\varphi : A \mapsto \mathbb{N}$ é uma numeração de A, somente se: $\varphi \in Inj(A, \mathbb{N})$.

OBS 20.5. Veremos adiante, na forma do **teorema 17.1** que, se um conjunto é numerável então ele é enumerável. Muitas vezes é mais fácil mostrar que um determinado conjunto é numerável.

Com base na observação acima, vejamos alguns exemplos de conjuntos enumeráveis:

Exemplo 20.1. O conjunto $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Basta mostrar (veja as atividades) que a numeração de Göedel $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ dada por $\varphi(k, n) = 2^k 3^n$ é uma função injetora de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$.

Exemplo 20.2. O conjunto $A = \mathbb{Z}$ dos números inteiros é enumerável. Basta mostrar que a função $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}$ dada por:

$$\varphi(n) = \begin{cases} k, & n = 2k+1, k = 0, 1, 2, \ldots \\ -k, & n = 2k, k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

é injetora. Os primeiros valores de $\varphi(n)$ são: $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1, \varphi(2) = -1, \varphi(3) = 2, \varphi(4) = -2, \cdots$.

20.2.2 Algumas Demonstrações

Veremos agora, algumas demonstrações de propriedades de conjuntos enumeráveis.

Teorema 20.1. *Seja A uma conjunto infinito. A é enumerável se, somente se, existe $\varphi \in Inj(A, \mathbb{N})$.*

PROVA: Dividimos a demonstração em duas partes.

a) Primeiramente vamos mostrar que se A é enumerável então existe uma função injetora de A em $\mathbb{N}$. Faremos isso, definindo uma tal função.

Da definição de conjunto enumerável, existe $\varphi \in Sobre(\mathbb{N}, A)$.

Seja $h : A \mapsto \mathbb{N}$, dada por:

$\forall a \in A,\ h(a) = k$ em que $\varphi(k) = a \wedge \forall n \in \mathbb{N} | \varphi(n) = a, k \leq n$.

Isto é, k é o menor número natural associado a cada $a \in A$. Como φ é sobrejetora, a função h está portanto bem definida.

Por outro lado, da definição de h temos:

$\forall a, b \in A,\ h(a) = h(b) \rightarrow \varphi(h(a)) = \varphi(h(b)) \rightarrow a = b$.

Daí, $\forall a, b \in A, h(a) = h(b) \rightarrow a = b$.

Portanto, $h \in Inj(A, \mathbb{N})$.

Logo, se A é enumerável então existe $h \in Inj(A, \mathbb{N})$.

b) Em segundo lugar vamos mostrar que se existe uma função injetora de a em $\mathbb{N}$ então A é um conjunto enumerável.

Seja $h \in Inj(A, \mathbb{N})$ uma função injetora. Como $A \neq \emptyset$ então $\exists b \in A$. Vamos então definir uma outa função $\varphi : \mathbb{N} \mapsto A$ dada por:

$$\varphi(n) = \begin{cases} a, & \exists a \in A | h(a) = n \\ b, & \nexists a \in A | h(a) = n \end{cases}$$

Como h é injetora, para cada $a \in A$ existe no máximo um $n \in \mathbb{N}$ tal que $h(a) = n$. Daí, a função φ está bem definida.

Por outro lado, como h está definida para todo $a \in A$, a função φ é naturalmente uma função sobrejetora.

Daí, A é um conjunto enumerável.

Logo, se existe $h \in Inj(A, \mathbb{N})$ então A é enumerável.

Dos ítens a) e b) temos que: A é enumerável, somente se existe $h \in Inj(A, \mathbb{N})$. $\square$

Como conseqüência do teorema acima temos dois corolários. O primeiro deles pode ser usado como uma definição alternativa de conjuntos enumeráveis. A saber:

Corolário 20.1. *Seja A uma conjunto infinito. A é enumerável se, somente se, existe $\varphi \in Bij(A, \mathbb{N})$.*

Corolário 20.2. *Sejam A e B conjuntos infinitos e enumeráveis então existe $\varphi \in Bij(A, B)$.*

O teorema a seguir, consideramos uma obra prima de Georg Cantor, trata da comparação entre qualquer conjunto e o conjunto de suas partes.

Teorema 20.2. *Seja A um conjunto então* $|A| < |\mathscr{P}(A)|$.

PROVA: Este teorema equivale a dizer que não existe nenhuma função sobrejetora de A em $\mathscr{P}(A)$. Portanto, vamos tomar a hipótese nula:

HN $\exists \varphi \in Sobre(A, \mathscr{P}(A))$.

Definindo o conjunto:

$X \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A | x \notin \varphi(x)\}$.

Como pela definição $X \subset A$ temos:

$X \in \mathscr{P}(A)$.

Daí, como de **HN** φ é sobrejetora temos:

$\exists m \in A | X = \varphi(m)$.

Consideraremos então dois casos:

Caso 1 $m \in X$.

Neste caso:

$m \in X \rightarrow m \notin \varphi(m) \rightarrow m \notin X$.

Logo:

$(m \in X) \wedge (m \notin X)$.

Absurdo.

caso 2 $m \notin X$.

Nste caso:

$m \notin X \rightarrow \neg(m \notin \varphi(m) \rightarrow m \in \varphi(m) \rightarrow m \in X$.

Logo:

$(m \in X) \wedge (m \notin X)$.

Absurdo.

Portanto, **HN** é falsa e:

$\nexists \varphi \in Sobre(A, \mathscr{P}(A))$.

Concluimos que:

$|A| < |\mathscr{P}(A)|$. $\square$

OBS 20.6. O teorema acima mostra que a cardinalidade de um conjunto é sempre menor que a cardinalidade do conjunto das parte do conjunto. Em particular, isto quer dizer que $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ é um conjunto infinito maior que $\mathbb{N}$. Coisa impensável antes de Cantor. O teorema acima, também nos dá uma forma de construir conjuntos infinitos com cardinalidades cada vez maior. Como exemplo $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$ tem cardinalidade maior que $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, que por sua vez tem cardinalidade maior que $\mathbb{N}$.

Teorema 20.3. *O conjunto $X = (0,1) \subset \mathbb{R}$ não é enumerável.*

PROVA: Suponhamos por absurdo que X seja um conjunto enumerável e que $\varphi : \mathbb{N} \mapsto X$ seja uma enumeração de X. Como $X = (0,1)$ são os reais entre zero e um, podemos usar representação decimal para escrever todos os elementos de X. Deste modo:

$$\begin{aligned}
\varphi(0) &= 0, x_{01}x_{02}x_{03}x_{04}\cdots \\
\varphi(1) &= 0, x_{11}x_{12}x_{13}x_{14}\cdots \\
\varphi(2) &= 0, x_{21}x_{22}x_{23}x_{24}\cdots \\
\varphi(3) &= 0, x_{31}x_{32}x_{33}x_{34}\cdots \\
\vdots \quad & \qquad \vdots
\end{aligned}$$

Aqui, x_{kn} representa a n-ésima casa decimal de $\varphi(k)$. Podemos agora, criar um número decimal $x \in X$ de modo que: $x = 0, a_1a_2a_3 a_4a_5a_6\cdots$ em que a_n é a e-ésima casa decimal de x e que escolhemos

$a_n = \begin{cases} 0, x_{nn} \neq 0 \\ 1, x_{nn} = 0 \end{cases}$ Construido deste modo temos que $x \in X$ e também que $\varphi(n) \neq x, \forall n \in \mathbb{N}$ e portanto x escapa da enumeração de X, não importando que seja a função φ, o que representa um absurdo. Logo X é não enumerável. $\square$

Terminaremos nossa aula com o seguinte teorema:

Teorema 20.4. *O conjunto* $\mathbb{R}$ *dos números reais é não enumerável.*

PROVA: Basta ver que a função $f : (0,1) \mapsto \mathbb{R}$ dada por:
$f(x) = \tan(\pi(x - 1/2))$
é uma bijeção de $X = (0,1)$ em $\mathbb{R}$.
Daí, se $\mathbb{R}$ fosse enumerável X também o sería. $\square$.
Chegamos ao fim de nosso curso. Espero que você tenha gostado e que nossas aulas tenham possibilitado a você uma idéia, ainda que superficial, do que são os Fundamentos da Matemática.

20.3 CONCLUSÃO

Caro aluno, na aula de hoje, podemos cuncluir que conjuntos infinitos também podem ser comparados. Existem conjuntos infinitos maiores que outros; infinitos mais infinitos que outros por assim dizer. O conjunto das partes de um conjuto é maior que o conjunto, seja ele infinito ou não. Agora completamos 100% do curso de Fundamentos da Matemática. Até breve.

20.4 RESUMO

Nosso resumo consta das seguintes definições e teoremas:

Definição de equinumerosidade:
Definição: Sejam Ae B dois conjuntos. Dizemos que A e B são equinumerosos, denotado $A \sim B$,somente se existe uma bijeção $f : A \mapsto B$.

Definição de equivalência de conjuntos por equinumerosidade:

Definição: Sejam A e B dois conjuntos. Dizemos que A e B são cardinalmente equivalentes isto é, têm mesma cardinalidade, denotado $|A| = |B|$ somente se: $A \sim B$.

Definição de classes de equivalência de conjuntos por equinumerosidade:

Definição: Seja A um conjunto. Definimos a classe de equivalência de A, denotada $\bar{A}$ por:

$\bar{A} = \{X | A \sim X\}$.

Definição de cardinalidade:

Definição: Seja A um conjunto. Definimos a cardinalidade de A por:

$|A| \stackrel{\text{def}}{=} \bar{A}$.

Definição de conjunto enumerável:

Definição: Seja A um conjunto. Dizemos que A é um conjunto enumerável, somente se A é vasio ou $\exists \varphi \in Sobre(\mathbb{N}, A)$.

Definição de numeração:

Definição: Seja A um conjunto. Dizemos que $\varphi : A \mapsto \mathbb{N}$ é uma numeração de A, somente se: $\varphi \in Inj(A, \mathbb{N})$.

Teorema:

Seja A uma conjunto infinito. A é enumerável, somente se, existe $\varphi \in Inj(A, \mathbb{N})$.

Corolário:

Seja A uma conjunto infinito. A é enumerável, somente se, existe $\varphi \in Bij(A, \mathbb{N})$.

Corolário:

Sejam A e B conjuntos infinitos e enumeráveis então existe $\varphi \in Bij(A, B)$.

Teorema:

Seja A um conjunto então $|A| < |\mathscr{P}(A)|$.

Teorema:

O conjunto $X = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ não é enumerável.

Teorema:

O conjunto $\mathbb{R}$ não é enumerável.

20.5 ATIVIDADES

Deixamos como atividades a demonstração dos seguintes problemas:

ATIV. 20.1. Seja $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Q}$ dada por: $\varphi(n) = \dfrac{n}{1+n}$. Mostre que φ é injetora e portanto $A = \{z \in \mathbb{Q} | z = \dfrac{n}{1+n}, \forall n \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto infinito enumerável de $\mathbb{Q}$.

Comentário: Reveja a aula-15 sobre tipos de funções. Especialmente a parte de demonstrações de que certas funções são injetoras.

ATIV. 20.2. Mostre que numeração de Göedel dada por $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ dada por $\varphi(k, n) = 2^k 3^n$ é uma função injetora de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ e conclua que o conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

Comentário: Reveja a aula-15 sobre tipos de funções. Especialmente a parte de demonstrações de que certas funções são injetoras. Notem também que $3^a 2^b = 1 \leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$.

20.6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARAÇA, Bento de Jesus. Conceitos Fundamentais da Matemática. Livraria Sá da Costa. Editora Lisboa, 1984.

Fundamentos da Matemática: Livro 2

COELHO, Sonia Pitta, MILIES, Francisco César Polcino. Números - Uma Introdução à Matemática. Editora EDUSP, terceira edição 2006.