Aula

4

Funções Beta e Gama

METAS

Apresentar a definição e propriedades das funções especiais gama e beta. Explorar o uso dessas funções no cálculo de integrais de uso frequente em mecânica estatística e em física quântica.

OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de: aplicar propriedades das funções gama e beta para simplificar o cálculo de integrais úteis em Física, como integrais de exponenciais ou Gaussianas moduladas por polinômios, ou integrais envolvendo potências das funções trigonométricas seno e cosseno.

PRÉ-REQUISITOS

Nenhum.

INTRODUÇÃO

As funções especiais Eulerianas gama (Γ) e beta (B) tornam simples os cálculos de algumas integrais definidas de uso frequente em física estatística, como as que surgem na obtenção de momentos associados à distribuição Gaussiana, e em mecânica quântica, particularmente em cálculos envolvendo o potencial do oscilador harmônico.

Aula 4

4.1 Função Gama

Há várias formas de definir a função gama. Adotaremos aqui a seguinte integral como definição, e deixaremos outras formas possíveis como teoremas, que podem ser deduzidos a partir desta definição.

Definição A função gama é dada por:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$$

para qualquer $z \in \mathbf{C}$ tal que $\mathrm{Re}(z) > 0$, isto é, a integral é convergente se a parte real de z for positiva.

Listaremos a seguir algumas propriedades básicas da função gama. Demonstraremos apenas algumas delas.

É bom frisar que nosso objetivo não é <u>calcular</u> explicitamente integrais complicadas, pelo contrário: será utilizando as propriedades seguintes que obteremos, de modo indireto, resultados de integrais que têm um aspecto semelhante ao da função gama.

(i)

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{\infty} = 1\,;$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{z}\, dt \\
&= \underbrace{\left[-t^{z}\, e^{-t}\right]_0^{\infty}}_{0} + z \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt \\
&= z\,\Gamma(z)
\end{aligned}$$

onde efetuamos uma integração por partes. Dando o devido destaque a esse resultado, que usaremos bastante,

$$\boxed{\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)}$$

(iii)

$$\Gamma(n+1) = n!$$

(para $n = 0, 1, 2, \ldots$).

Exemplo Calcule a seguinte integral, com o auxílio da função gama,

$$I = \int_0^\infty t^2\, e^{-t}\, dt\,.$$

A ideia aqui é comparar esta expressão com a definição da função gama; notamos que se $z - 1 = 2$, as duas integrais ficam iguais. Logo, $z = 3$, e pela propriedade (iii) a integral vale:

$$I = \Gamma(3) = 2! = 2\,.$$

Assim, vimos como se pode calcular integrais de funções exponenciais decrescentes multiplicadas por potências de t. O mesmo se aplicaria a integrais de exponenciais vezes polinômios de t. Diz-se: a função gama auxilia no cálculo de funções exponenciais decrescentes "moduladas" por polinômios.

Vamos explorar agora a integral da Gaussiana e^{-x^2} modulada por polinômios. Para tanto, fazemos uma mudança de variável na definição de $\Gamma(z)$, $t = u^2$,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u^2}\, u^{2z-2}\, 2u du = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\, u^{2z-1}\, du\,.$$

Aqui, também, devemos ter $\mathrm{Re}(z) > 0$. Vamos destacar também esse resultado, que pode ser visto como uma forma alternativa de introduzir $\Gamma(z)$, agora na forma de uma integral envolvendo uma função Gaussiana,

$$\boxed{\Gamma(z) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\, u^{2z-1}\, du}$$

Em particular,

$$\Gamma(1/2) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}\,.$$

Este último resultado pode ser mostrado da seguinte forma.

$$\begin{aligned} [\Gamma(1/2)]^2 &= 4\int_0^\infty e^{-u^2}\, du \int_0^\infty e^{-v^2}\, dv \\ &= 4\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty r e^{-r^2} dr \\ &= 4\frac{\pi}{2}\left[\frac{e^{-r^2}}{-2}\right]_0^\infty = \pi\,. \end{aligned}$$

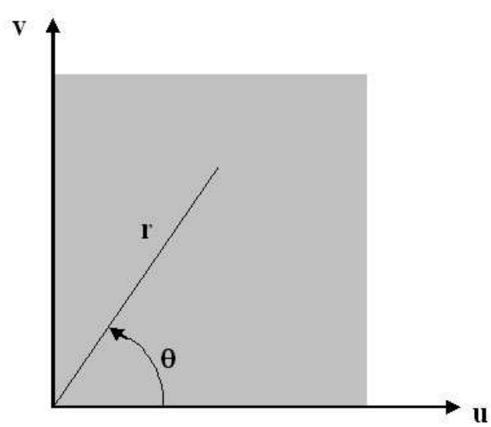

Figura 4.1: Uma mudança de variáveis no plano, passando de coordenadas cartesianas u, v para polares r, θ.

Neste cálculo envolvendo uma integral dupla, em u e v, fizemos uma mudança de variável, sugerida na figura 4.1: encarando u e v como dois eixos ortogonais, a integral cobre um quadrante do plano uv, correspondente a valores positivos de u e v. Alternativamente, podemos cobrir o mesmo quadrante usando as coordenadas polares r, θ, tais que:

$$u = r\,\cos\theta\,, \quad v = r\,\text{sen}\,\theta\,.$$

Só é necessário certo cuidado com os limites de integração. Para cobrir (apenas) o primeiro quadrante do plano referido, basta fazer θ variar entre 0 e 90 graus, e r varia entre zero e infinito. Também,

$$u^2 + v^2 = r^2 \, .$$

Observe também que o elemento de área da integral dupla, ao mudarmos para coordenadas polares, fica:

$$du\, dv = r\, dr\, d\theta \, .$$

Exemplo Calcule $\Gamma(5/2)$.

Usando a propriedade $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, repetidamente, temos:

$$\Gamma(5/2) = \frac{3}{2}\,\Gamma(3/2) = \frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\Gamma(1/2) = \frac{3}{4}\,\sqrt{\pi}\, .$$

Outras propriedades, que podem ser deduzidas combinando a propriedade (ii) com o valor obtido para $\Gamma(1/2)$, são as seguintes:

(iv)

$$\Gamma(n + 1/2) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^{2n}}\sqrt{\pi}$$

($(2n-1)!! = 1.3.5.\ldots(2n-1)$ é o fatorial duplo);

(v)

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z} \qquad z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

(vi) (Teorema)

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1.2.\ldots n}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}\, n^z \right\}$$

(vii)

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\, e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$$

onde $\gamma = 0,577216$ é a constante de Euler-Mascheroni. O símbolo Π nós o chamamos "produtória", é similar ao de somatória, e indica que há um produto dos termos à direita do símbolo, com n variando de um até o infinito.

Exemplo Calcule a seguinte integral, com o auxílio da função gama,

$$I = \int_0^\infty x^3\, e^{-x^2}\, dx\,.$$

Comparando esta expressão com a integral de gaussiana modulada por polinônio, notamos que se $2z-1=3$, as duas integrais ficam iguais (é irrelevante se a variável de integração é "u" ou "x"). Tem-se $z=2$, e a integral vale:

$$I = \frac{1}{2}\,\Gamma(2) = 1/2\,;$$

o fator $1/2$ apareceu porque, na definição de gama em termos da integral de gaussiana, havia um fator dois antes da integral.

4.2 Função Beta

A função beta (indicaremos pela letra grega beta maiúscula que, aliás, é igual ao nosso B maiúsculo) pode ser definida assim:

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}\,(1-t)^{q-1}\,dt$$

sendo $\mathrm{Re}(p) > 0$, $\mathrm{Re}(q) > 0$.

Listaremos agora algumas propriedades, ou teoremas (note que eles poderiam ser usados, alternativamente, para definir a função beta).

(i)

$$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2p-1}\,(\operatorname{sen}\theta)^{2q-1}\,d\theta$$

(fazendo $t=\cos^2\theta$ na definição, chegamos nesta expressão);

(ii)

$$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}\,du$$

(obtida fazendo $t = u/(1+u)$ na definição de beta).

A propriedade, no entanto, mais importante no sentido das aplicações é a que discutiremos agora, e relaciona as funções beta e gama. Escrevemos:

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = 4\int_0^\infty e^{-u^2}\,u^{2p-1}\,du \int_0^\infty e^{-v^2}\,v^{2q-1}\,dv$$

e fazemos a mudança de variáveis:

$$u = r\ \cos\theta\,, \qquad v = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

com o que a expressão acima do produto dos gamas fica:

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\,\Gamma(q) &= 2\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2p-1}\,(\mathrm{sen}\,\theta)^{2q-1}\,d\theta\,\times \\ &\quad \times 2\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r^{2(p+q)-1}\,dr \\ &= B(p,q)\,\Gamma(p+q)\,.\end{aligned}$$

Assim,

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\,.$$

Desta expressão decorre a seguinte propriedade útil de simetria:

$$B(p,q) = B(q,p)\,.$$

ATIVIDADES

1. Calcule as integrais seguintes, com o auxílio da função gama:

(i)

$$I_1 = \int_0^{\infty} x^6 e^{-x} dx\,;$$

(ii)

$$I_2 = \int_0^{\infty} r^{3/2} e^{-r} r^2 dr\,;$$

(iii)

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} R^2 e^{-R^2} dR\,;$$

(iv)

$$I_4 = \int_0^{\infty} y^3 e^{-y^2} dy\,.$$

2. Mostre que
$$\frac{(2n)!}{2^n\, n!} = (2n-1)!!$$
sendo que $(2n-1)!! = 1.3.5.\ldots(2n-1)$ (fatorial duplo).

3. Segundo a Mecânica Estatística clássica, para um gás contido numa caixa em equilíbrio térmico à temperatura T, as velocidades das partículas do gás (átomos ou moléculas) obedecem à distribuição estatística de Maxwell: a probabilidade de que uma partícula tenha velocidade v é dada por
$$P(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k T}\right)^{3/2} v^2\, e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\,.$$
Encontre, com o auxílio da função gama, a velocidade média das partículas,
$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v\, P(v)\, dv\,.$$

4. Mostre que
$$\Gamma(1/2-n)\,\Gamma(1/2+n) = (-1)^n\,\pi$$
(para n inteiro).

5. Calcule, com a ajuda da função gama, a integral:
$$I_5 = \int_0^1 x^n\, ln\, x\, dx\,.$$

6. Verifique que
$$B(a,b) = \frac{a+b}{b}\, B(a,b+1)\,.$$

7. Calcule as integrais seguintes, com o auxílio das funções gama e beta:

   (i)
$$I_6 = \int_0^{\pi/2} \cos^{1/2}\theta \, d\theta \, ;$$

   (ii)
$$I_7 = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n \theta \, d\theta$$

   (n inteiro).

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Você deve, no caso do problema 1, verificar para que valor de z cada integral fica igual à expressão da definição da função gama. Se você achou, por exemplo, que para I_1, $z = 7$, então a integral vale $\Gamma(7) = 6! = 720$, pela propriedade (iii). Algo parecido deve ser usado no problema 7, agora comparando as expressões das integrais com as propriedades da função beta. Se você obtiver, por exemplo, que $I_1 = B(3/4, 1/2)/2$ então escreva essa função beta em termos de funções gama, e terá a resposta. No problema 3, você precisará efetuar uma mudança de variável para fazer a integral ficar mais parecida com a expressão de gama em termos da integral de uma função Gaussiana. No problema 4, use a propriedade (v) da função gama. No problema 5, tente usar algo como $x = e^{-t}$. As respostas dos problemas, para você conferir: (1) (i) 720; (ii) $105\sqrt{\pi}/16$; (iii) $\sqrt{\pi}/4$; (iv) $1/2$; (3) $\sqrt{8kT/(m\pi)}$; (5) $(-1)/(n+1)^2$; (7) (i) $\sqrt{\pi}\Gamma(3/4)/\Gamma(5/4)$; (ii) $\sqrt{\pi}\Gamma((n+1)/2)/n\Gamma(n/2)$.

CONCLUSÃO

A função gama, por ser definida como certa integral particular envolvendo a função exponencial, e a função beta, a ela relacionada, possuem propriedades muito interessantes, possibilitando o cálculo indireto de várias integrais de interesse em física.

RESUMO

Nesta aula você tomou contato com as funções gama e beta, que são particularmente úteis no cálculo de certas integrais presentes nas mecânicas estatística e quântica.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula estudaremos os polinômios de Legendre e os harmônicos esféricos, funções especiais que aparecem sempre que estudamos problemas de contorno envolvendo as equações de Laplace, Poisson e outras.

REFERÊNCIAS

ARFKEN, George; WEBER, Hans. Física Matemática. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.

BRAGA, Carmen. Notas de Física Matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.