

Funções de Bessel

METAS

Introduzir funções de Bessel de diferentes espécies, estudar suas propriedades e aplicações a problemas físicos.

OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de: reconhecer as equações diferenciais que têm como solução as funções de Bessel; propor soluções para tais equações, aplicando as condições de contorno adequadas a cada problema físico considerado.

PRÉ-REQUISITOS

Espaços vetoriais e métricos, equações diferenciais ordinárias, teoria de Sturm-Liouville, separação de variáveis, funções de Legendre.

INTRODUÇÃO

Em alguns problemas das físicas clássica e quântica, as equações diferenciais parciais que regem os fenômenos, quando tratadas por separação de variáveis, acabam levando às equações diferenciais ordinárias de Bessel e de Bessel modificada. Assim, problemas de eletromagnetismo, propagação de calor, oscilações e espalhamento quântico têm como soluções as funções de Bessel, que se apresentam em diversas espécies, e devem ser escolhidas por seu comportamento próximo à origem do sistema de coordenadas ou por seu comportamento assintótico.

Vimos anteriormente que a equação de Laplace,

$$\nabla^2 \Psi = 0,$$

pode ser separada em coordenadas esféricas, levando às funções de Legendre. Nesta aula, efetuaremos uma separação de variáveis desta equação em coordenadas cilíndricas,

$$\Psi(\rho, \varphi, z) = R(\rho) \Phi(\varphi) Z(z),$$

sendo que nessas coordenadas o Laplaciano é escrito:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

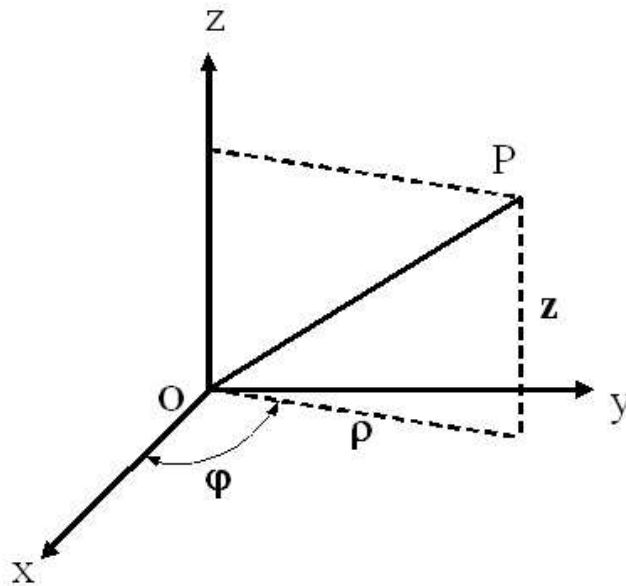


Figura 6.1: As coordenadas cilíndricas ρ, φ, z .

Com isso,

$$\Phi Z \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) R + RZ \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \Phi + R\Phi \frac{d^2}{dz^2} Z = 0$$

e dividindo por $R\Phi Z$,

$$\frac{1}{R} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) R + \frac{1}{\Phi} \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \Phi + \frac{1}{Z} \frac{d^2}{dz^2} Z = 0.$$

A separação de variáveis fica evidenciada colocando:

$$\frac{1}{R} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) R + \frac{1}{\Phi} \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \Phi = -\frac{1}{Z} \frac{d^2}{dz^2} Z = \pm \mu^2.$$

Segue que

$$\ddot{Z} \pm \mu^2 Z = 0,$$

e trabalhamos com a equação diferencial parcial restante,

$$\frac{1}{R} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) R \mp \mu^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \Phi.$$

Multiplicando por ρ^2 , teremos mais uma condição de separação, e introduziremos a constante $+\nu^2$,

$$\frac{\rho^2}{R} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) R \mp \mu^2 \rho^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2}{d\varphi^2} \Phi = \nu^2$$

Obteremos daí mais duas equações diferenciais ordinárias,

$$\ddot{\Phi} + \nu^2 \Phi = 0,$$

$$\rho^2 \ddot{R} + \rho \dot{R} + (\mp \mu^2 \rho^2 - \nu^2) R = 0.$$

A solução para Φ será:

$$\Phi(\varphi) = A \cos \nu\varphi + B \sin \nu\varphi.$$

No caso de escolhermos $-\mu^2$ na equação para $Z(z)$, a solução para $Z(z)$ será:

$$Z(z) = C e^{+\mu z} + D e^{-\mu z},$$

Para obter a solução radial, mudamos a variável de ρ para $x = \mu\rho$, e passamos de $R(\rho)$ para $y(x)$. A equação radial transforma-se em:

$$x^2 \ddot{y} + x \dot{y} + (x^2 - \nu^2) y = 0,$$

chamada equação diferencial de Bessel de ordem ν , que resolveremos na próxima seção.

Por outro lado, se escolhermos $+\mu^2$ na equação de $Z(z)$, a solução será:

$$Z(z) = F \cos \mu z + G \sin \mu z,$$

e seremos levados à equação de Bessel modificada de ordem ν ,

$$x^2 \ddot{y} + x \dot{y} - (x^2 + \nu^2) y = 0.$$

6.1 Função de Bessel J_ν

Considere a equação de Bessel de ordem ν , sendo ν um número real,

$$x^2 \ddot{y} + x \dot{y} + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$

Retomaremos a solução da equação de Bessel que foi feita em nossa primeira aula. Lá, utilizamos o método de Frobenius,

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{k+i};$$

chegamos às equações indiciais seguintes,

$$a_0 [k(k-1) + k - \nu^2] = 0,$$

$$a_1 [(k+1)k + (k+1) - \nu^2] = 0,$$

de onde se conclui que $k = \nu$ ou $k = -\nu$, com $a_1 = 0$.

Obtivemos, também, a relação de recorrência ($i \geq 2$):

$$a_i = \frac{-1}{(k+i)^2 - \nu^2} a_{i-2}.$$

Como $a_1 = 0$, a série de potências possuirá unicamente termos com valores pares de i .

Adotando $k = \nu$, $a_0 \neq 0$ e $a_1 = 0$,

$$a_i = \frac{-1}{(\nu+i)^2 - \nu^2} a_{i-2}.$$

O próximo passo que seguimos, naquela primeira aula, foi especificar os valores de a_2 , a_4 , e tirar uma fórmula genérica,

$$a_2 = \frac{-1}{(2+\nu)^2 - \nu^2} a_0 = \frac{-1}{4(\nu+1)} a_0.$$

Usaremos desta vez a propriedade da função gama:

$$\Gamma(\nu+1) = \nu \Gamma(\nu),$$

$$\Gamma(\nu+2) = (\nu+1) \Gamma(\nu+1),$$

e, tirando o valor de $(\nu + 1)$, o termo a_2 pode ser escrito:

$$a_2 = \frac{(-1) a_0 \Gamma(\nu + 1)}{1 \cdot 2^2 \cdot \Gamma(\nu + 2)}.$$

De modo semelhante, fazemos para a_4 ,

$$a_4 = \frac{-1}{(\nu + 4)^2 - \nu^2} a_2 = \frac{-1}{8(\nu + 2)} a_2,$$

e como

$$\Gamma(\nu + 3) = (\nu + 2) \Gamma(\nu + 2),$$

vem

$$a_4 = \frac{(-1) \Gamma(\nu + 2)}{2^3 \Gamma(\nu + 3)} a_2.$$

Inserindo o valor encontrado de a_2 ,

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{(-1) \Gamma(\nu + 2)}{2^3 \Gamma(\nu + 3)} \frac{(-1) a_0 \Gamma(\nu + 1)}{2^2 \Gamma(\nu + 2)} \\ &= \frac{(-1)^2 a_0 \Gamma(\nu + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 2^4 \cdot \Gamma(\nu + 3)}. \end{aligned}$$

Generalizando esse resultado,

$$a_{2j} = \frac{(-1)^j a_0 \Gamma(\nu + 1)}{j! 2^{2j} \Gamma(\nu + j + 1)}.$$

Note que o primeiro termo da soma, a_0 , também poderia ser colocado numa forma similar,

$$a_0 = \frac{(-1)^0 a_0 \Gamma(\nu + 1)}{0! 2^0 \Gamma(\nu + 1)}.$$

Lembramos que a série de Frobenius era:

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{k+i}$$

com $k = +\nu$; os coeficientes ímpares eram nulos, restando os do tipo a_{2j} . Então,

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j a_0 \Gamma(\nu + 1)}{j! 2^{2j} \Gamma(\nu + j + 1)} x^{\nu+2j}.$$

Escolhendo um valor conveniente para a_0 ,

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}$$

ficamos com:

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (x/2)^{\nu+2j}}{j! \Gamma(\nu + j + 1)} = J_\nu(x)$$

Tal série é chamada *função de Bessel de primeira espécie* de ordem ν , e denotada $J_\nu(x)$. Ela é convergente para qualquer ν real.

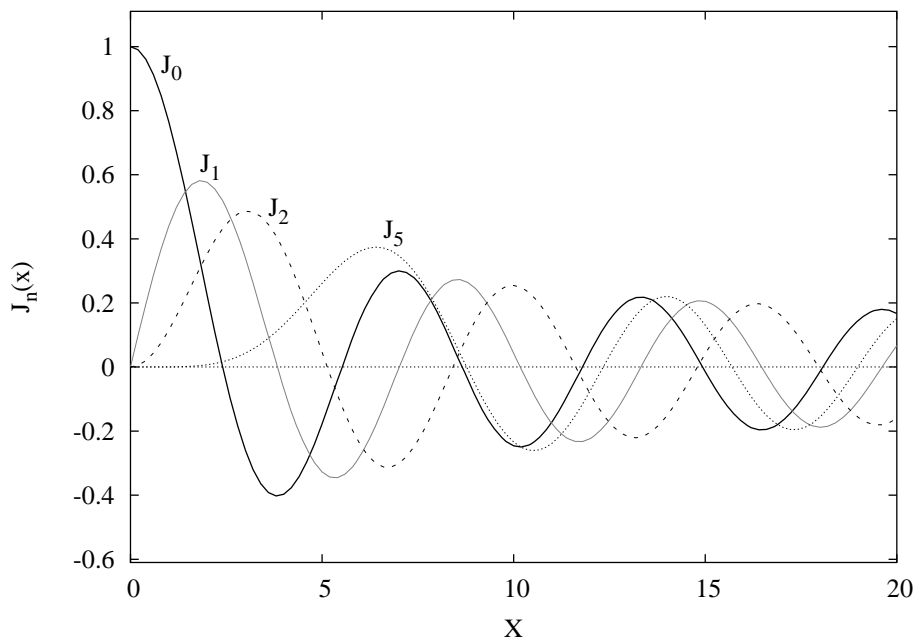


Figura 6.2: Funções de Bessel $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ e $J_5(x)$.

A figura 6.2 mostra um gráfico de algumas funções de Bessel J_n para n inteiro. Estes gráficos foram feitos com valores de $J_n(x)$ obtidos numericamente, isto quer dizer, com o auxílio de rotinas computacionais que calculam as somas das séries infinitas, até um ponto em que os termos fiquem muito pequenos para serem considerados. J_0 se parece um pouco com um cosseno, mas sua amplitude vai diminuindo à

medida que x cresce, além do que as distâncias entre máximos consecutivos variam um pouco. J_1, J_2, \dots se parecem com a função seno, com amplitude decrescente. Os zeros das funções de Bessel (pontos em que o gráfico corta o eixo) não guardam as mesmas distâncias entre si. Um outro aspecto dessas funções de Bessel $J_n(x)$ é que, para valores muito grandes de x , elas se comportam como funções seno ou cosseno, isto é, a amplitude se mantém aproximadamente constante. Dizemos que o limite assintótico dessas funções são funções harmônicas.

Se tomarmos $k = -\nu$, $a_0 \neq 0$, $a_1 = 0$, podemos obter de modo inteiramente análogo a solução:

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (x/2)^{-\nu+2j}}{j! \Gamma(-\nu + j + 1)}.$$

$J_{-\nu}(x)$ não é regular na origem. Ela é linearmente independente (l.i.) com relação a $J_\nu(x)$, exceto quando $\nu = m$ for um inteiro, caso em que são linearmente dependentes (l.d.),

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x).$$

No caso particularíssimo de $\nu = 1/2$, pode-se achar a seguinte forma para a função de Bessel:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x.$$

A função geratriz para as funções de Bessel de primeira espécie é:

$$g_1(x, t) = e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})}$$

que, expandida em série de Laurent de t (isto é, em série de potências positivas e negativas de t), fornece:

$$e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x) t^m.$$

Observe que tal procedimento fornece como coeficientes da expansão as funções de Bessel associadas a valores m inteiros.

Com o auxílio das funções geratrizes das funções de Bessel é possível obter relações para derivadas dessas funções, e outras relações de recorrência.

Exemplo Vamos ilustrar o processo de obtenção de uma relação de recorrência. Tomaremos a derivada em relação a x , nos dois lados da expansão da função geratriz de J_m ,

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} J_m(x) t^m.$$

A derivada fornece:

$$\frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J'_m(x) t^m$$

(a linha em J denota derivada em relação a x); usando novamente a expansão da função geratriz,

$$\frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x) t^m = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J'_m(x) t^m;$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x) t^{m+1} - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x) t^{m-1} = 2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J'_m(x) t^m.$$

Mudando o índice da primeira soma, $m+1 = n$ (isto é, $m = n - 1$), e na segunda fazendo $m - 1 = n$ (ou $m = n + 1$), vem:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{n-1}(x) t^n - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{n+1}(x) t^n = 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J'_n(x) t^n,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) - 2J'_n(x)\} t^n = 0$$

e como as potências de t formam um conjunto l.i., os coeficientes são nulos, e assim achamos

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x).$$

Outras relações podem ser obtidas de modo semelhante. Listamos algumas relações de recorrência a seguir.

$$J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x);$$

$$J_{m-1}(x) - \frac{m}{x} J_m(x) = J'_m(x);$$

$$J_{m+1}(x) - \frac{m}{x} J_m(x) = -J'_m(x);$$

$$\frac{d}{dx} [x^m J_m(x)] = x^m J_{m-1}(x);$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-m} J_m(x)] = -x^{-m} J_{m+1}(x).$$

As relações de recorrência apresentadas valem também para valores não inteiros dos índices, isto é, para um ν não inteiro no lugar de m .

A relação de ortogonalidade para as funções de Bessel é bastante diferente das relações que obtivemos até então. Por exemplo, para os polinômios de Legendre tínhamos:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m}$$

o que quer dizer que duas funções $P_n(x)$ e $P_m(x)$ são ortogonais (seu produto escalar é nulo) se $n \neq m$.

Para obter a relação de ortogonalidade para as funções $J_\nu(x)$, partimos da equação diferencial de Bessel,

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

(a notação com linha para a derivada é mais conveniente aqui) que pode ser escrita alternativamente

$$x(xy')' + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$

Fazemos a mudança de variável $x \rightarrow bx$,

$$x(xy')' + (b^2 x^2 - \nu^2)y = 0.$$

Sabemos que uma solução de tal equação é $y = J_\nu(bx)$. Escrevemos uma segunda equação semelhante, resultado da mudança $x \rightarrow cx$,

$$x(xw')' + (c^2 x^2 - \nu^2)w = 0$$

com solução $w = J_\nu(cx)$. Multiplicando a equação em y por w e a equação em w por y , e subtraindo, obtemos

$$\frac{d}{dx} [wxy' - yxw'] + (b^2 - c^2)xyw = 0.$$

Integrando em relação a x , entre 0 e 1,

$$[wxy' - yxw']_0^1 + (b^2 - c^2) \int_0^1 xyw dx = 0;$$

note que o termo entre colchetes, calculado no limite inferior, fornece o valor zero, devido à presença de x . Suponha por um instante que $b \neq c$, e

$$y(1) = J_\nu(b \times 1) = J_\nu(b) = 0$$

$$w(1) = J_\nu(c \times 1) = J_\nu(c) = 0$$

isto é, suponha que b e c sejam zeros distintos de J_ν . Nessas condições, decorre que

$$\int_0^1 xyw dx = 0$$

ou que

$$\int_0^1 J_\nu(bx)J_\nu(cx) x dx = 0,$$

que pode ser interpretada da seguinte maneira: as funções $J_\nu(bx)$ e $J_\nu(cx)$, soluções da equação de Bessel, são ortogonais entre si, no intervalo $(0, 1)$, com o produto escalar incluindo a função peso x . É preciso enfatizar que b e c devem ser dois zeros distintos de J_ν .

O procedimento acima pode ser generalizado, e se $m \neq n$,

$$\int_0^a J_\nu(\mu_{\nu m}x)J_\nu(\mu_{\nu n}x) x dx = 0,$$

onde $\mu_{\nu m}, \mu_{\nu n}$ são tais que

$$J_\nu(\mu_{\nu m}a) = J_\nu(\mu_{\nu n}a) = 0.$$

Já para o caso $m = n$, que nos fornece a integral de normalização de J_ν , usando uma relação de recorrência para J'_ν pode-se chegar a

$$\int_0^a [J_\nu(\mu_{\nu m}x)]^2 x dx = \frac{a^2}{2} [J'_\nu(\mu_{\nu m}a)]^2$$

e, juntando as duas expressões,

$$\int_0^a J_\nu(\mu_{\nu m} x) J_\nu(\mu_{\nu n} x) x dx = \frac{a^2}{2} [J'_\nu(\mu_{\nu m} a)]^2 \delta_{m,n}.$$

Ainda relacionado com essa expressão, é possível fazer uma expansão de uma função $f(r)$, integrável em $(0, a)$, na forma de uma série infinita, chamada série de Bessel ou série de Fourier-Bessel,

$$f(r) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{\nu,m} J_\nu \left(\mu_{\nu m} \frac{r}{a} \right),$$

onde os coeficientes da expansão são dados em termos de $\mu_{\nu m}$, os zeros de J_ν ,

$$a_{\nu,m} = \frac{2}{a^2 [J'_\nu(\mu_{\nu m})]^2} \int_0^a J_\nu \left(\mu_{\nu m} \frac{r}{a} \right) f(r) r dr.$$

Às vezes é útil ter uma ideia de como a função considerada se comporta para grandes valores do argumento, ou seja, é importante conhecer seu comportamento assintótico.

Como exemplo do procedimento para se determinar tal comportamento, considere a equação de Bessel,

$$x^2 \ddot{y} + x \dot{y} + (x^2 - \nu^2) y = 0,$$

sobre a qual fazemos a mudança $y(x) = z/\sqrt{x}$, para obter

$$\ddot{z} + \left[1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} \right] z = 0.$$

Mas, se estamos interessados apenas em valores muito grandes de x , ou seja $x \gg \nu$, podemos tomar a equação aproximada,

$$\ddot{z} + z = 0,$$

que é a equação do MHS, com solução conhecida,

$$z = A \cos x + B \sin x,$$

e assim

$$y \simeq A \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + B \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

Usando portanto tal linha de raciocínio, é possível obter a expansão assintótica seguinte:

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{2\nu + 1}{4} \pi \right).$$

6.2 Função de Neumann N_ν

Como as equações diferenciais de Bessel são de segunda ordem, e o operador associado é do tipo Sturm-Liouville, elas devem possuir duas soluções linearmente independentes.

O fato de que J_ν e $J_{-\nu}$ nem sempre são l.i. motiva a definição de um segundo tipo de função de Bessel, esta sim, linearmente independente com relação à função de Bessel J_ν sempre: qualquer que seja o índice ν .

Define-se as funções de Bessel de segunda espécie, também chamadas de funções de Neumann, através de:

$$N_\nu = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen} \nu\pi}.$$

É preciso apontar aqui que alguns autores utilizam a notação Y_ν para esta função, o que não faremos aqui para não causar confusão com os harmônicos esféricos $Y_{\ell,m}$.

Como J_ν e $J_{-\nu}$ são soluções da equação de Bessel, a combinação linear delas, N_ν , também será uma solução. Lembrando que $J_{-\nu}$ era singular em $x = 0$, notamos que N_ν também terá singularidade nesse ponto.

Porém, a relação de definição fica indeterminada para $\nu = m$ inteiro; neste caso, devemos aplicar a regra de L'Hospital, para achar

$$\begin{aligned} N_n &= \lim_{\nu \rightarrow n} N_\nu \\ &= \left\{ \frac{(\partial/\partial\nu) [\cos \nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)]}{(\partial/\partial\nu) \operatorname{sen} \nu\pi} \right\}_{\nu=n} \\ &= \frac{-\pi \operatorname{sen} n\pi J_n(x) + [\cos n\pi \partial J_\nu(x)/\partial\nu - \partial J_{-\nu}(x)/\partial\nu]_{\nu=n}}{\pi \cos n\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu} \right]_{\nu=n}. \end{aligned}$$

Como $J_\nu(x)$ e $N_\nu(x)$ serão l.i. sempre, a solução mais geral da equação de Bessel é escrita

$$y = A J_\nu(x) + B N_\nu(x).$$

A figura 6.3 mostra os gráficos de algumas funções de Neumann; observe a divergência para $x = 0$. Estes gráficos foram elaborados com valores de $N_i(x)$ obtidos por computador.

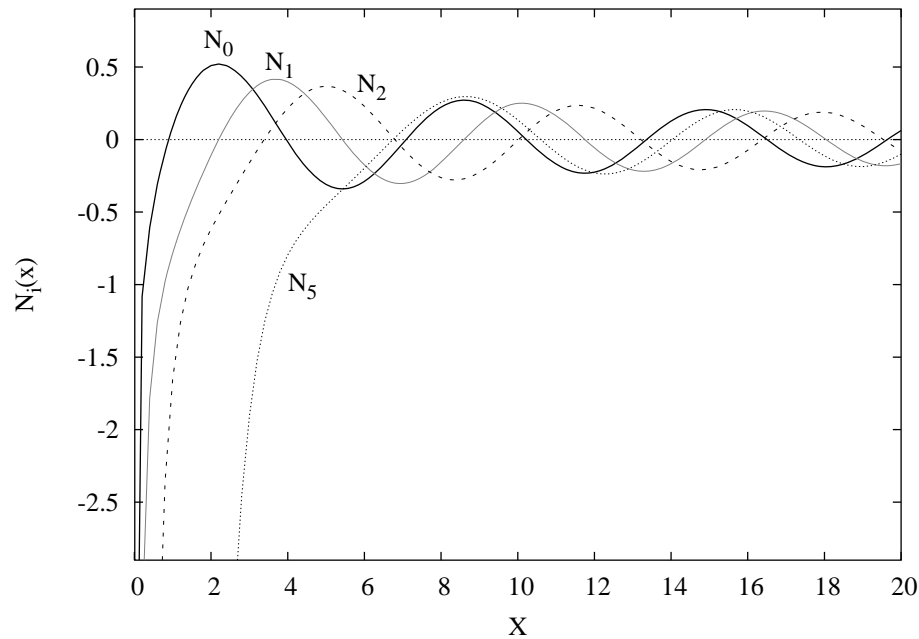


Figura 6.3: Funções de Neumann $N_0(x)$, $N_1(x)$, $N_2(x)$ e $N_5(x)$.

É possível obter o seguinte desenvolvimento em série de potências para a função de Neumann $N_0(x)$,

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x) \ln \left(\frac{x}{2} \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \psi(m+1) \left(\frac{x}{2} \right)^{2m}$$

onde

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

(e uma expansão semelhante para $N_n(x)$, com $n > 0$). Isto explica aquele comportamento das funções de Neumann próximo da origem $x = 0$, já que o logaritmo tende a $(-\infty)$ nesse limite.

Há uma expressão analítica simples para a função de Neumann no caso particular $\nu = 1/2$:

$$N_{1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

A expansão assintótica para N_ν é:

$$N_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} \left(x - \frac{2\nu + 1}{4} \pi \right).$$

6.3 Outras Funções de Bessel

No caso da equação de Bessel modificada,

$$x^2 \ddot{y} + x \dot{y} - (x^2 + \nu^2)y = 0,$$

a aplicação do método de Frobenius leva à seguinte solução em série de potências:

$$I_\nu(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i! \Gamma(i + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2i+\nu}.$$

I_ν é a função de Bessel modificada de primeira espécie de ordem ν .

Compare isso com a série que obtivemos para a função $J_\nu(x)$: você achará muita semelhança. De fato, I_ν se relaciona com a função de Bessel J_ν através de:

$$I_\nu(x) = e^{-i\nu\pi/2} J_\nu(x).$$

Introduz-se também a função $I_{-\nu}$,

$$I_{-\nu}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i! \Gamma(i - \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2i-\nu}.$$

Da mesma forma que ocorria para as funções de Bessel J_ν , as soluções $I_\nu(x)$ e $I_{-\nu}(x)$ serão l.i. somente se ν não for um inteiro. No caso em que $\nu = m$ (inteiro), vale:

$$I_{-m}(x) = I_m(x).$$

Como $I_\nu(x)$ e $I_{-\nu}(x)$ não são l.i. sempre, efetua-se um procedimento semelhante ao realizado quando da introdução da função de Neumann N_ν . Define-se a função de Bessel modificada de segunda espécie, ou função de Neumann modificada K_ν ,

$$K_\nu(x) = \frac{\pi [I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)]}{2 \operatorname{sen} \nu\pi}$$

e, com o auxílio da regra de L'Hospital,

$$K_n = \frac{(-1)^n}{2} \left[\frac{\partial I_{-\nu}(x)}{d\nu} - \frac{\partial I_\nu(x)}{d\nu} \right]_{\nu=n}.$$

Igualmente ao caso de J_ν e N_ν , as funções I_ν e K_ν serão l.i. sempre, e assim, a solução geral da equação de Bessel modificada escreve-se (para ν inteiro ou não),

$$y = A I_\nu(x) + B K_\nu(x).$$

$J_\nu(x)$ e $N_\nu(x)$ formam uma base para o espaço das funções que são soluções da equação de Bessel. Uma base alternativa é formada pelas funções de Hankel (ou funções de Bessel de terceira espécie), definidas por

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x),$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x).$$

Portanto, não se trata de novas soluções, mas sim de combinações lineares de J_ν e N_ν .

Propriedades adicionais das funções de Bessel modificada, I_ν , de Neumann modificada, K_ν , assim como das funções de Hankel podem ser encontradas nos textos constantes da bibliografia, no final das notas desta aula, em particular no livro de Arfken, sempre muito completo em termos das mais variadas fórmulas, ou da tabela de Abramowitz-Stegun.

6.4 Funções de Bessel Esféricas

No início desta aula, separamos a equação de Laplace em coordenadas cilíndricas, chegando à equação de Bessel.

Consideremos agora a equação de Helmholtz,

$$\nabla^2 \Psi + \lambda \Psi = 0$$

e façamos a separação em *coordenadas esféricas*, que consiste em adotar a forma

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$$

na equação de Helmholtz, que nessas coordenadas se escreve

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \lambda \Psi = 0.$$

Note que quando $\lambda = 0$, a equação de Helmholtz se reduz à equação de Laplace, que já foi separada em aula anterior (as soluções, para as coordenadas θ e φ , eram os harmônicos esféricos, e para a coordenada radial, as funções associadas de Legendre).

Obtém-se, para a parte radial

$$(r^2 R')' + [\lambda r^2 - l(l+1)] R = 0,$$

$$r^2 \ddot{R} + 2r \dot{R} + [\lambda r^2 - l(l+1)] R = 0;$$

é importante observar que esta equação em r não é exatamente igual à equação de Bessel.

Porém, efetuando as mudanças de variáveis,

$$y = \sqrt{r} R,$$

$$x = \sqrt{\lambda} r,$$

a equação radial toma a forma

$$x^2 \ddot{y} + x \dot{y} + [x^2 - l(l+1) - 1/4] y = 0$$

que é a equação de Bessel, com soluções J_ν e N_ν , sendo ν dado por

$$\nu^2 = l(l+1) + 1/4 = (l+1/2)^2.$$

Para a parte angular,

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + l(l+1)Y = 0,$$

a solução Y é dada pelos harmônicos esféricos, exatamente como no caso da equação de Laplace separada em coordenadas esféricas.

Com isso, escreve-se a solução geral da equação de Helmholtz como

$$\Psi_{l,\lambda,m}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}} \left[A J_{l+1/2}(\sqrt{\lambda}r) + B N_{l+1/2}(\sqrt{\lambda}r) \right] Y_l^m(\theta, \varphi).$$

É costume introduzir-se as chamadas *funções de Bessel esféricas* através de

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x),$$

$$\eta_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{l+1/2}(x) = (-1)^{l+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-l-1/2}(x),$$

sendo l um inteiro. η_l também é chamada função de Neumann esférica.

Com isso, expressa-se a solução geral Ψ na forma mais simples,

$$\Psi_{l,\lambda,m}(r, \theta, \varphi) = [A j_l(x) + B \eta_l(x)] Y_l^m(\theta, \phi).$$

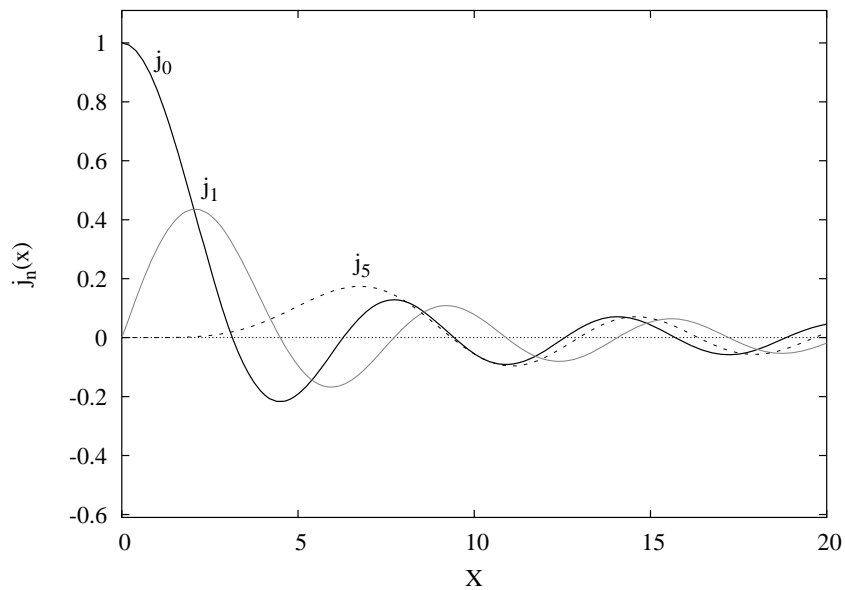


Figura 6.4: Funções de Bessel esféricas $j_0(x)$, $j_1(x)$ e $j_5(x)$.

Utilizando as expressões de $J_{1/2}$ e $N_{1/2}$, obtém-se

$$j_0 = \frac{\text{sen } x}{x},$$

$$\eta_0 = -\frac{\text{cos } x}{x},$$

e valem também

$$j_l(x) = x^l \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\text{sen } x}{x},$$

$$\eta_l(x) = -x^l \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\cos x}{x},$$

com as quais conseguimos construir as funções esféricas.

A partir da relação de ortogonalidade das funções de Bessel J_ν mostra-se a relação de ortogonalidade para as funções de Bessel esféricas,

$$\int_0^a r^2 j_l(\mu_{l,m} r) j_l(\mu_{l,n} r) dr = \frac{\pi a^2}{4\mu_{l,m}} [J'_{l+1/2}(\mu_{l,m} a)]^2 \delta_{m,n},$$

onde os $\mu_{l,m}$ são zeros de j_l .

Nas figuras 6.4 e 6.5 estão mostradas algumas funções de Bessel e Neumann esféricas. O comportamento lembra o das funções J_m e N_m , mas a amplitude das funções esféricas cai mais rapidamente à medida em que x cresce.

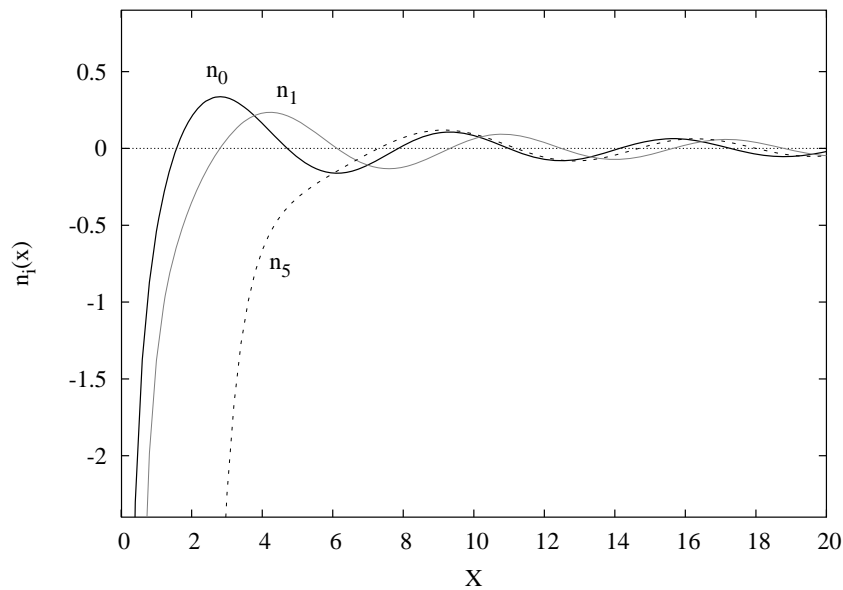


Figura 6.5: Funções de Neumann esféricas $n_0(x)$, $n_1(x)$ e $n_5(x)$.

Exemplo Ache a temperatura $u(r, \theta, z)$ de equilíbrio de um cilindro semi-infinito de seção reta circular com raio $r = 1$, sendo que sua

lateral é mantida à temperatura 0° , e a tampa inferior, que repousa sobre o plano xy , é mantida a 100° . O eixo de simetria do cilindro coincide com o semi-eixo z positivo.

A equação de condução de calor permite determinar a temperatura u ,

$$\nabla^2 u = \frac{1}{K} \frac{\partial u}{\partial t},$$

mas neste problema ela reduz-se à equação de Laplace, pois busca-se a solução estacionária (portanto $\partial u / \partial t$ é nulo),

$$\nabla^2 u = 0.$$

Efetuiremos a separação de variáveis

$$u = u(r, \theta, z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$$

para obtermos

$$\frac{1}{R} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0.$$

Daí segue, como no início da aula,

$$\ddot{\Phi} + m^2 \Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi = C \operatorname{sen} m\varphi + D \operatorname{cos} m\varphi,$$

onde usamos $\nu = m =$ inteiro, já que a função Φ deve ser periódica, $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ (reveja, na terceira aula, a resolução da equação de Laplace). Para Z ,

$$\ddot{Z} - k^2 Z = 0 \quad \Rightarrow \quad Z = Ae^{kz} + Be^{-kz},$$

e é preciso observar que a exponencial crescente não nos serve, pois a temperatura não pode crescer sem limite no sentido de z positivo (portanto, $A = 0$).

Como a temperatura lateral é zero, sempre, não há dependência em φ , de modo que $m = 0$.

Quanto à equação radial,

$$r^2 \ddot{R} + r \dot{R} + k^2 r^2 R = 0,$$

a substituição $x = kr$ leva à equação de Bessel, com solução

$$R = J_0(kr)$$

(observe que a solução $N_0(kr)$, por ser singular na origem $r = 0$, foi excluída). Como a temperatura na lateral do cilindro é nula, segue necessariamente que

$$R(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad J_0(k \cdot 1) = J_0(k) = 0$$

e vemos que $k = \mu_{0n}$ são os zeros de J_0 . Estes zeros são rotulados por um índice $n = 1, 2, \dots$ que enumera os vários zeros de J_0 .

A solução geral,

$$u = u(r, \theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{0n} J_0(\mu_{0n} r) e^{-\mu_{0n} z}$$

tem que satisfazer ainda a condição de contorno $u = 100^\circ$ para $z = 0$,

$$100 = u(r, \theta, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{0n} J_0(\mu_{0n} r).$$

Multipliquemos os dois lados desta equação por $r J_0(\mu_{0N} r)$ e integremos em relação a r em $(0, 1)$:

$$100 \int_0^1 J_0(\mu_{0N} r) r dr = \sum_{n=1}^{\infty} c_{0n} \int_0^1 J_0(\mu_{0n} r) J_0(\mu_{0N} r) r dr.$$

Usando a relação de ortonormalidade das funções de Bessel,

$$\int_0^1 J_0(\mu_{0n} r) J_0(\mu_{0N} r) r dr = \frac{1}{2} [J_0'(\mu_{0N})]^2 \delta_{n,N}$$

obtemos

$$c_{0N} = \frac{2}{[J_0'(\mu_{0N})]^2} \times 100 \int_0^1 J_0(\mu_{0N} r) r dr.$$

Para calcular a integral do lado direito, fazemos a mudança de variável $x = \mu_{0N} r$,

$$I = \int_0^1 J_0(\mu_{0N} r) r dr = \frac{1}{\mu_{0N}^2} \int_0^{\mu_{0N}} J_0(x) x dx$$

e, usando a relação de recorrência:

$$\frac{d}{dx} [x^m J_m(x)] = x^m J_{m-1}(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} [x J_1(x)] = x J_0(x),$$

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{\mu_{0N}^2} \int_0^{\mu_{0N}} \frac{d}{dx} [x J_1(x)] dx \\
 &= \frac{1}{\mu_{0N}^2} [\mu_{0N} J_1(\mu_{0N}) - 0] \\
 &= \frac{1}{\mu_{0N}} J_1(\mu_{0N}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{0N} &= \frac{200}{[J_1(\mu_{0N})]^2} \frac{1}{\mu_{0N}} J_1(\mu_{0N}) \\
 &= \frac{200}{\mu_{0N} J_1(\mu_{0N})}.
 \end{aligned}$$

A solução completa é, então, dada por

$$u = u(r, \theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{200}{\mu_{0n} J_1(\mu_{0n})} J_0(\mu_{0n} r) e^{-\mu_{0n} z}.$$

Exemplo Obtenha as vibrações transversais de uma membrana circular de raio $r = a$.



Figura 6.6: Vibrações na membrana de um tambor.

Este problema objetiva determinar os modos de vibração dos pontos da membrana de um instrumento como o tambor (figura 6.6).

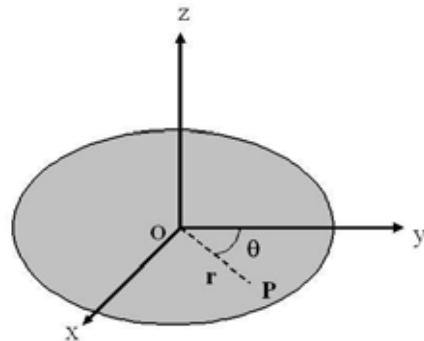


Figura 6.7: Um ponto P da membrana do tambor é referido pelas coordenadas polares r e θ .

Chamaremos de $z = z(r, \theta, t)$ o deslocamento do ponto P da membrana em relação à posição de equilíbrio; o ponto P se situa na posição (r, θ) . Veja a figura 6.7. Suporemos que cada ponto P da membrana desloca-se para cima e para baixo, na medida em que o tambor é percutido. Assim, z é uma função da posição e do tempo.

As seguintes condições de contorno se aplicam. Como a membrana está presa numa circunferência de raio a ,

$$z(a, \theta, t) = 0;$$

a forma da membrana (e o modo como se movia) em $t = 0$ também deve ser conhecida. Digamos que duas funções ψ e φ fixem essas condições iniciais,

$$z(r, \theta, 0) = \psi(r, \theta),$$

$$\dot{z}(r, \theta, 0) = \phi(r, \theta),$$

onde $\dot{z} = \partial z / \partial t$ representa a velocidade dos pontos da membrana na direção perpendicular à ela.

O movimento de cada ponto da membrana obedecerá à equação das ondas,

$$v^2 \nabla^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Aqui, v é a velocidade de propagação das ondas, e depende de propriedades de elasticidade da membrana, bem como da tração com que está presa em seu contorno circular.

Tentando a separação de variáveis $z(r, \theta, t) = u(r, \theta) T(t)$,

$$\frac{1}{u} v^2 \nabla^2 u = \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\omega^2,$$

segue que

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \quad \Rightarrow \quad T = A \operatorname{sen} \omega t + B \operatorname{cos} \omega t$$

ou alternativamente $T = \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$, forma essa que vamos preferir. Já u satisfaz a equação diferencial parcial

$$\nabla^2 u + \frac{\omega^2}{v^2} u = 0$$

ou

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0;$$

$k = 2\pi/\lambda = \omega/v$ é o número de onda, na linguagem da teoria ondulatória.

Buscamos numa tabela matemática o Laplaciano em coordenadas polares no plano, e separamos $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$,

$$\frac{1}{R} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + k^2 = 0.$$

A parte angular dá

$$\ddot{\Theta} + m^2 \Theta = 0$$

com a solução

$$\Theta = C \operatorname{sen} m\theta + D \operatorname{cos} m\theta.$$

Porém, Θ deve ser uma função periódica, isto é,

$$\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi) \quad \Rightarrow \quad e^{im\theta} = e^{im2\pi} e^{im\theta} \quad \Rightarrow \quad e^{im2\pi} = 1$$

de onde se conclui que m tem que ser um número inteiro. A parte radial será obtida resolvendo

$$r^2 \ddot{R} + r \dot{R} + (k^2 r^2 - m^2) R = 0.$$

Pondo $x = kr$,

$$x^2 \ddot{R} + x \dot{R} + (x^2 - m^2) R = 0$$

e a solução são as funções de Bessel,

$$R(r) = F J_m(x) + G N_m(x) = F J_m(kr) + G N_m(kr).$$

Como R deve ser limitada em $r = 0$, exclui-se N_m (pondo $G = 0$). Pelo mesmo motivo, não se considera os valores negativos de m , que levariam a funções J_{-m} divergentes na origem. Portanto,

$$R(r) = J_m(x) \quad (m \geq 0).$$

Os bordos da membrana não vibram,

$$z(a, \theta, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad R(r = a) = 0 \quad \Rightarrow \quad J_m(ka) = 0$$

e $ka = \mu_{mn}a$ devem corresponder aos zeros de J_m , que são enumerados pelo índice $n = 1, 2, \dots$

Assim, a solução global é dada por

$$z(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\mu_{mn} r) [C_{mn} \text{sen } m\theta + D_{mn} \text{cos } m\theta] \text{sen } (\omega t + \delta)$$

e, aplicando as condições iniciais,

$$z(r, \theta, 0) = \varphi(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\mu_{mn} r) [C_{mn} \text{sen } m\theta + D_{mn} \text{cos } m\theta] \text{sen } (\delta)$$

$$\dot{z}(r, \theta, 0) = \psi(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\mu_{mn} r) [C_{mn} \text{sen } m\theta + D_{mn} \text{cos } m\theta] \omega \text{cos } (\delta).$$

Para achar as constantes δ, C_{mn}, D_{mn} , multiplica-se as duas últimas equações por $\text{sen } N\theta J_N(\mu_{Nn} r)$ e por $\text{cos } N\theta J_N(\mu_{Nn} r)$, e integra-se $\int_0^\pi d\theta \int_0^a r dr$. Usando as relações de ortonormalidade,

$$\int_0^a J_N(\mu_{Nn} x) J_N(\mu_{Nn} x) x dx = \frac{a^2}{2} [J'_N(\mu_{Nn} a)]^2 \delta_{m,n},$$

$$\int_0^\pi \text{cos } m\theta \text{cos } n\theta d\theta = \frac{\pi}{2} \delta_{m,n},$$

$$\int_0^\pi \text{sen } m\theta \text{sen } n\theta d\theta = \frac{\pi}{2} \delta_{m,n},$$

obteremos o sistema de equações

$$C_{NP} = \frac{4}{\pi a^2 \text{sen } \delta [J'_N(\mu_{NP} a)]^2} \int_0^\pi d\theta \text{sen } N\theta \int_0^a r dr J_N(\mu_{NP} r) \varphi(r, \theta)$$

$$D_{NP} = \frac{4}{\pi a^2 \text{sen } \delta [J'_N(\mu_{NP} a)]^2} \int_0^\pi d\theta \cos N\theta \int_0^a r dr J_N(\mu_{NP} r) \varphi(r, \theta)$$

$$C_{NP} = \frac{4}{\pi a^2 \cos \delta v \mu_{NP} [J'_N(\mu_{NP} a)]^2} \int_0^\pi d\theta \text{sen } N\theta \int_0^a r dr J_N(\mu_{NP} r) \psi(r, \theta)$$

$$D_{NP} = \frac{4}{\pi a^2 \cos \delta v \mu_{NP} [J'_N(\mu_{NP} a)]^2} \int_0^\pi d\theta \cos N\theta \int_0^a r dr J_N(\mu_{NP} r) \psi(r, \theta)$$

que, resolvido para os C_{NP} , D_{NP} , δ leva à solução completa deste problema.

Mostramos, na figura 6.8, os primeiros modos normais de vibração da membrana. Os sinais + e - colocados sobre a membrana circular do tambor, quando vista de cima, significam partes da membrana que se elevam (+) ou afundam (-) em relação à posição da membrana em repouso. Logo abaixo da representação da membrana vista de cima, há uma vista lateral da membrana, como se fosse imaginariamente cortada ao meio e olhada de lado.

O ítem (a) da figura 6.8 está associado ao modo normal com $m = 0$ e $n = 1$,

$$z = J_0(\mu_{01} r) D_{01} \cos(0 \cdot \theta) \text{sen}(\omega t + \delta),$$

(reveja o gráfico de J_0 na figura 6.2, apresentada anteriormente). O centro do tambor oscila para cima e para baixo na medida em que o tempo passa; os outros pontos da membrana oscilam em fase, com amplitudes que decrescem do centro para as bordas. Nesta análise colocamos $C_{01} = 0$ por simplicidade.

O ítem (b) da mesma figura 6.8 representa o modo normal com $m = 1$ e $n = 1$,

$$z = J_1(\mu_{11} r) D_{11} \cos(1 \cdot \theta) \text{sen}(\omega t + \delta);$$

note que as vibrações têm amplitudes diferentes para ângulos θ diferentes, indo desde o perfil mostrado na vista lateral (ângulo $\theta = 0$ medido em relação a um eixo unindo os sinais - e + da vista de cima) até uma amplitude nula, na linha (que aparece na figura da

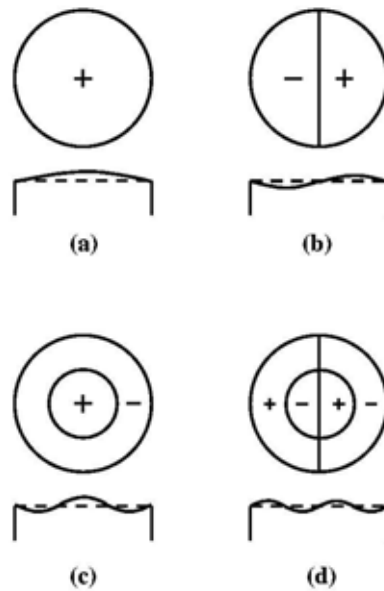


Figura 6.8: Modos normais de vibração da membrana de um tambor.

membrana circular vista de cima, como uma linha vertical) correspondendo a $\theta = 90^\circ$. Observe também que para $r = a$, o argumento de J_1 é $\mu_{11} a/a = \mu_{11}$, que anula a função J_1 .

No ítem (c), $m = 0$ e $n = 2$,

$$z = J_0(\mu_{02}r) D_{02} \cos(0 \cdot \theta) \sin(\omega t + \delta);$$

não há dependência em θ , e J_0 possuirá, no intervalo radial, dois zeros distintos, daí a formação do anel circular de raio $r = \mu_{01} \cdot a / \mu_{02}$ formado por pontos estacionários.

Por fim, no ítem (d), o caso $m = 1$ e $n = 2$, que de certa forma mistura as características dos ítems (b) e (c).



ATIVIDADES

1. Usando a função geratriz, obtenha a relação de recorrência

$$J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x).$$

2. Mostre a validade da expansão de Jacobi-Anger,

$$e^{iz \cos \theta} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m J_m(z) e^{im\theta}.$$

3. Ache a temperatura $u(\mathbf{r}, t)$, de um cilindro infinito de seção reta circular, de raio a , que estava inicialmente a uma temperatura $f(r)$. Ache u em qualquer posição \mathbf{r} do interior do cilindro e em qualquer tempo t . A temperatura da lateral do cilindro é mantida, desde o início, num valor constante u_0 , sendo que $f(r) > u_0$ para $0 \leq r \leq a$. A temperatura u será solução da equação da condução do calor,

$$\nabla^2 u = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t}$$

(dica: observe que a distribuição de temperaturas não depende de φ e de z neste problema).

4. Ache as autofunções normalizadas do Laplaciano no círculo ($r = a$), isto é, resolva

$$\nabla^2 f + \lambda^2 f = 0$$

com $f(a, \varphi) = 0$.

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Para o problema 1, tente fazer como no exemplo, derive a função geratriz, só que agora com relação a t . No problema 2, use $t = ic^{i\theta}$, na expressão da função geratriz. No problema 3, as condições de contorno são não-homogêneas. Para torná-las homogêneas, use $v(r, t) = u(r, t) - u_0$, onde u e v são soluções da equação da condução do calor, mas $u(a, t) = u_0$ (não-homogênea), e $v(a, t) = u_0 - u_0 = 0$. Você deve resolver o problema (homogêneo) para v , e no final ponha $u = v + u_0$. O problema 4 é bem semelhante a um problema resolvido no texto (qual?).

CONCLUSÃO

Vimos nesta aula que as funções de Bessel, em suas várias espécies, são úteis na solução de problemas envolvendo as equações diferenciais parciais de Laplace e Helmholtz, e portanto se aplicam a várias áreas da física.

RESUMO

Nesta aula estudamos propriedades básicas das funções de Bessel e de Neumann, e aplicamos estas funções na solução de problemas de contorno da física.

**PRÓXIMA AULA**

Na próxima aula você tomará contato com as funções especiais de Hermite, usadas no problema do oscilador harmônico quântico.



REFERÊNCIAS

- AR KEN, George; WEBER Hans. Física Matemática. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- ABR AMOZ, M. Stegun, I. Handbook of Mathematical Functions. New York: Dover, 1970.
- BR AÇA. Notas de Física Matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.
- BUTKOV, Eugene. Física Matemática. Rio de Janeiro: Guanabara 2, 1978.