Transformações Integrais

METAS

Introduzir noções básicas das transformações de Fourier e Laplace, e discutir algumas aplicações em problemas de física, como problemas de contorno envolvendo equações diferenciais parciais, ou equações diferenciais ordinárias.

OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de: calcular transformadas de Fourier e Laplace de funções elementares; aplicar a técnica das transformadas de Fourier e Laplace para resolver equações diferenciais usualmente encontradas na física teórica.

PRÉ-REQUISITOS

Espaços vetoriais e métricos, equações diferenciais ordinárias e parciais, séries de Fourier.

INTRODUÇÃO

Como já comentamos em outras oportunidades, muitas vezes as equações da física teórica se expressam na forma de equações diferenciais ordinárias, ou então equações diferenciais parciais. Uma das técnicas para se resolver ambos os tipos de equações consiste em usar transformações integrais, como por exemplo a transformação de Fourier, ou a de Laplace, que efetivamente transformam a equação diferencial em uma equação do tipo algébrico. Resolvida esta equação algébrica, obtém-se pela antitransformada a função incógnita, solução da equação diferencial de partida. Para facilitar o uso, há tabelas de transformadas e de antitransformadas, para Fourier e Laplace. Nesta aula veremos como se pode usar essa ferramenta poderosa para atacar problemas de física.

Aula 9

Chama-se transformação integral o operador $\mathcal{I} : f \to g$, onde

$$g(\omega) = \mathcal{I}\, f(x) = \int_a^b K(\omega, x)\, f(x)\, dx\,;$$

$K(\omega, x)$ é o núcleo da tranformação integral, e $g(\omega)$ é a transformada de $f(x)$ pela transformação integral $\mathcal{I}$. Alguns autores costumam usar o termo núcleo em inglês: *kernel*.

Há várias transformações integrais úteis em física; listamos algumas na tabela 9.2.

Transf. Integral	Forma	Núcleo
de Laplace	$g(\omega) = \int_0^\infty f(x)\, e^{-\omega x}\, dx$	$e^{-\omega x}$
de Hankel	$g(\omega) = \int_0^\infty f(x)\, x\, J_m(\omega x)\, dx$	$x J_m(\omega x)$
de Mellin	$g(\omega) = \int_0^\infty f(x)\, x^{\omega-1}\, dx$	$x^{\omega-1}$
de Fourier	$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-i\omega x}$
de Fourier-cosseno	$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x)\, \cos \omega x\, dx$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos \omega x$
de Fourier-seno	$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x)\, \operatorname{sen} \omega x\, dx$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sen} \omega x$

Tabela 9.2: Algumas transformações integrais importantes.

Nós vamos nos restringir às transformações de Fourier e Laplace, por serem as mais empregadas em aplicações físicas.

É bom observar que alguns autores introduzem a transformação de Fourier com o núcleo $e^{+i\omega x}/\sqrt{2\pi}$; outros, ainda, esquecem o fator $1/\sqrt{2\pi}$. Estas alterações não trazem mudanças importantes nos resultados que comentaremos.

9.1 Transformadas de Fourier

Uma vez definida a transformada de Fourier de uma função $f(x)$,

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx\,,$$

vamos obter a chamada transformada inversa de Fourier. Para tanto, multiplicamos ambos os lados desta última equação por $g(\omega)e^{i\omega x'}/\sqrt{2\pi}$ e integramos em relação à ω,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\, e^{i\omega x'}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\omega(x'-x)}\, dx\,.$$

Mudando a ordem de integração no lado direito da igualdade,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\, e^{i\omega x'}\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx\, \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x'-x)}\, d\omega} \qquad (9.1)$$

onde o termo indicado pela chave, no lado direito da última expressão, vale infinito se $x = x'$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1\, dx = \infty\,,$$

e valerá zero se $x \neq x'$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x'-x)}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, [\cos\omega\,\delta x + i\,\mathrm{sen}\,\omega\,\delta x] = 0$$

uma vez que as funções seno e cosseno têm integrais nulas em cada período completo.

Uma "função" que assume esses valores é a "função" delta de Dirac, que estudamos em Métodos de Física Teórica I,

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty\,, & x = 0 \\ 0\,, & x \neq 0 \end{cases}$$

ou, se quisermos mudar o argumento de delta,

$$\delta(x - x') = \begin{cases} \infty\,, & x = x' \\ 0\,, & x \neq x' \end{cases}$$

Na realidade, a distribuição delta é melhor definida pela ação do funcional delta sobre uma função f,

$$\langle \delta | f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta(x - x')\, dx = f(x')\,.$$

Usamos essa última propriedade, após substituirmos a parte marcada pela chave na expressão (9.1) por um $\delta(x - x')$, para obter:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\, e^{(i\omega x')}\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta(x - x')\, dx = f(x')\,.$$

Acabamos de descobrir a transformada inversa de Fourier,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

(apenas trocamos x' por x).

Esquematicamente, a transformada de Fourier $\mathcal{F}$ de uma função $f(x)$ é $g(\omega)$,

$$g(\omega) = \mathcal{F}\, f(x)$$

e a transformada inversa de Fourier (ou antitransformada) de $g(\omega)$ é $f(x)$,

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\, g(\omega)\,.$$

Vamos agora estabelecer a ligação entre as séries de Fourier e as transformadas de Fourier. Vimos, em Métodos de Física Teórica I, como obter expansões em série de Fourier para funções periódicas, como a onda quadrada (figura 9.1) e a função dente de serra (figura 9.2).

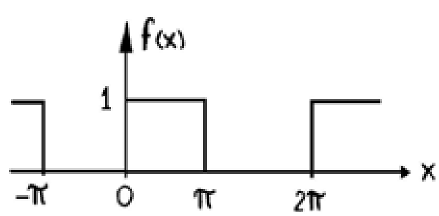

Figura 9.1: A função periódica onda quadrada, muito comum em estudos de correntes elétricas.

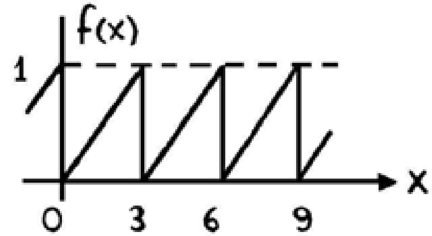

Figura 9.2: A função periódica "dente de serra".

Tomemos, desta vez, uma função periódica $f(x)$ com período T, como ilustra a figura 9.3. Sua série de Fourier é dada por:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx} \\ &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(x)dx + \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} e^{i\frac{2\pi}{T}nx}\,\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(x)e^{-i\frac{2\pi}{T}nx}dx. \end{aligned}$$

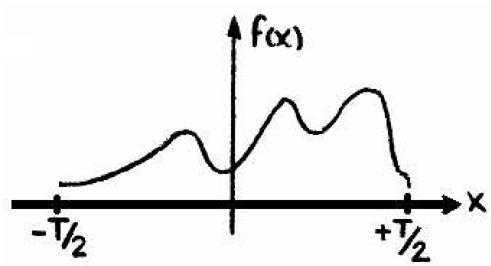

Figura 9.3: Uma função periódica de período T.

A série de Fourier consiste, assim, de termos (os "harmônicos"):

$$e^{i\,\frac{2\pi x}{T}}, \qquad e^{i\,\frac{4\pi x}{T}}, \qquad e^{i\,\frac{6\pi x}{T}}, \qquad \ldots$$

correspondendo a movimentos oscilatórios de frequências:

$$\frac{2\pi}{T}, \qquad \frac{4\pi}{T}, \qquad \frac{6\pi}{T}, \qquad \ldots$$

e de períodos:

$$T\,, \qquad \frac{T}{2}\,, \qquad \frac{T}{3}\,, \qquad \ldots$$

As frequências angulares (correspondentes aos vários harmônicos) são:

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} n = n\,\Delta\omega$$

sendo $\Delta\omega = 2\pi/T$. Os períodos dos harmônicos são dados por

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{T}{n}\,.$$

Escrevemos, então:

$$f(x) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(x)\,dx + \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} e^{i\,\omega_n\,x}\,\underbrace{\frac{\Delta\omega}{2\pi}}_{1/T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(x)\,e^{-i\,\omega_n\,x}\,dx\,.$$

Desejamos, agora, representar uma função $f(x)$ não-periódica. Observe novamente a figura 9.3: uma função não-periódica pode ser vista como uma função periódica de período $T\to\infty$. Note que, com isso, $\Delta\omega\to 0$, e os valores permitidos de ω, que antes constituíam um conjunto discreto, passam a ocupar todo o "eixo" ω. Ou seja, os valores estão dentro de um contínuo, parte de um eixo real. Também, uma soma nos valores de ω_n vai se transformar numa integral sobre a variável ω. Suporemos que $f(x)$ seja absolutamente integrável, isto é,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < \infty\,.$$

Nessas condições, a série para f fica:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \underbrace{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(x)\,dx}_{0} + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Delta\omega\,e^{i\,\omega_n\,x}\int_{-T/2}^{+T/2} f(x)\,e^{-i\,\omega_n\,x}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\,e^{i\omega x}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,f(x)\,e^{-i\omega x}}_{g(\omega)}
\end{aligned}$$

e obtemos assim a fórmula da transformação inversa de Fourier!

A transformada de Fourier pode ser portanto interpretada como uma expansão, agora, de uma função não-periódica.

Calcularemos, no que segue, a transformada de Fourier de uma derivada df/dx. Seja, como antes, $g(\omega)$ dada por

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx = \mathcal{F} f(x)\,.$$

A transformada de df/dx é obtida de:

$$\begin{aligned} g_1(\omega) &= \mathcal{F}\frac{df}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{dx}\, e^{-i\omega x}\, dx \\ &= \left[\frac{f(x) e^{-i\omega x}}{\sqrt{2\pi}}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\omega)\, f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx\,. \end{aligned}$$

Segue daí que

$$g_1(\omega) = (i\omega) g(\omega)\,.$$

Analogamente, mostra-se que

$$g_2(\omega) = \mathcal{F}\frac{d^2 f}{dx^2} = (i\omega)^2 g(\omega) = -\omega^2\, g(\omega)\,,$$

$$g_3(\omega) = \mathcal{F}\frac{d^3 f}{dx^3} = (i\omega)^3 g(\omega) = -i\,\omega^3\, g(\omega)\,, \,\ldots$$

Exemplo A equação que descreve a posição de cada ponto de um fio longo esticado (veja a figura 9.4) é a equação das ondas,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,,$$

no limite de pequenas oscilações. Aqui, v é a velocidade da onda que se propaga no fio, suposta constante; $y = y(x,t)$ é a incógnita, descrevendo a "altura" de cada ponto do fio, ou seja, o quanto este ponto se deslocou em relação à sua posição de equilíbrio (veja a figura 9.4). Vamos supor que, no instante inicial $t = 0$, a forma do fio seja dada por uma função $f(x)$,

$$y(x,0) = f(x)$$

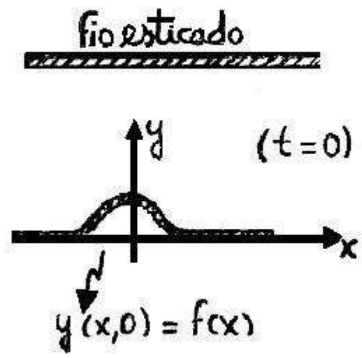

Figura 9.4: Ondas transversais propagando-se num fio longo. A figura mostra a forma do fio num instante inicial.

(esta é a chamada "condição inicial", ou condição de contorno, do problema).

Resolveremos este problema, da equação diferencial parcial (equação das ondas) mais condições de contorno, com o auxílio da transformada de Fourier.

Fazendo a transformação de Fourier da equação das ondas (note bem, aplicamos o procedimento nos dois lados da equação),

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\, e^{-i\omega x}\, dx = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

obtemos

$$(i\omega)^2\, Y(\omega, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} Y(\omega, t)$$

onde $Y(\omega, t) = \mathcal{F} y(x, t)$. Note que a transformação de Fourier é feita na variável x; t fica fixo, intocado nesta transformação.

A vantagem do uso da transformação de Fourier, no caso, foi que reduzimos uma equação diferencial <u>parcial</u> numa equação diferencial <u>ordinária</u> (em t), que pode ser resolvida pelas técnicas já vistas anteriormente.

Pondo

$$Y(\omega, t) = \psi(\omega)\, T(t)$$

vemos que a dependência temporal de Y vale:

$$T(t) = e^{\pm i v \omega t}$$

e assim

$$Y(\omega,t) = \psi(\omega)\, e^{\pm iv\omega t} = Y(\omega,0)\, e^{\pm iv\omega t} = [\mathcal{F} f(x)]\, e^{\pm iv\omega t}\,.$$

A antitransformação nos devolve a função incógnita $y(x)$,

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \mathcal{F}^{-1} Y(\omega,t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{[\mathcal{F} f(x)]\, e^{\pm iv\omega t}\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathcal{F} f(x)]\, e^{\pm iv\omega t} e^{+i\omega x}\, d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathcal{F} f(x)]\, e^{i\omega \underbrace{[x \pm vt]}_{x'}} = f(x') = f(x \pm vt)\,. \end{aligned}$$

Na penúltima igualdade, usou-se que $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} f(x) = f(x)$.

Obtivemos por este procedimento duas soluções, que são linearmente independentes, e têm significado físico sugerido na figura 9.5. Uma solução, $f(x - vt)$, consiste numa onda que evolui com o tempo (chamamos de onda progressiva), caminhando com velocidade constante v para a direita. Note que o "formato" da onda é dado pela mesma função $f(x)$ mencionada no enunciado deste exemplo. Assim, a onda não alterou sua forma, em relação ao instante inicial, apenas deslocou-se à direita. A segunda solução, correspondendo a $f(x+vt)$, implica numa onda deslocando-se à esquerda. Por exemplo, num tempo t, o "pico" dessa onda estará na posição $x = -vt$, de modo a termos nesse instante de tempo o valor $f(0)$ (o máximo da função $f(x)$).

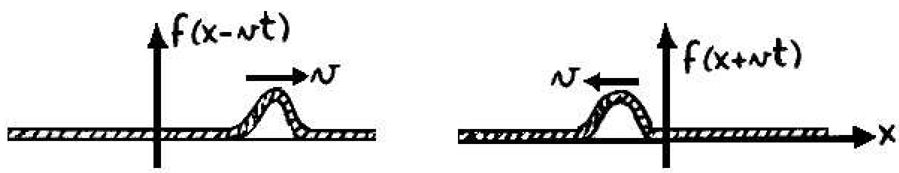

Figura 9.5: Ondas num fio longo, propagando-se para a direita ou esquerda.

Define-se convolução de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ como

$$f * g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, f(x-y)\, dy$$

e a transformada de Fourier de uma convolução dá:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(f*g) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{e^{-i\omega x}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,f(x-y)\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\,g(y)\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)e^{-i\omega(x-y)}d(x-y)\right]}_{\sqrt{2\pi}\,F(\omega)} e^{-i\omega y} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\,g(y)\,e^{-i\omega y}\,F(\omega) \\
&= F(\omega)\,G(\omega) = [\mathcal{F}f(x)]\,[\mathcal{F}g(x)]\,.
\end{aligned}
$$

Em palavras: a transformada de Fourier de um produto de convolução de duas funções, é igual ao produto das transformadas de Fourier das duas funções.

Obteremos em seguida a relação de Parseval, a partir da expressão para o produto escalar de duas funções. Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções a valores complexos, seu produto escalar usualmente é indicado:

$$
\begin{aligned}
(f,g) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)\,g(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega)\,e^{-i\omega x}\,d\omega\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\alpha)\,e^{i\alpha x}\,d\alpha \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha F^*(\omega)\,G(\alpha)\,\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,e^{i(\alpha-\omega)x}}_{\delta(\omega-\alpha)} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega F^*(\omega)\,G(\omega) = (F,G)\,.
\end{aligned}
$$

Conseguimos deduzir a relação de Parseval,

$$(f,g) = (\mathcal{F}f,\mathcal{F}g)$$

(o produto escalar de duas funções é preservado quando tomamos a transformada de Fourier dessas funções).

Como um último tópico desta seção sobre transformadas de Fourier, falaremos um pouco sobre as representações x e p da mecânica quântica, ou mais especificamente: sobre a ligação (de ordem matemática) entre essas duas representações.

No mundo microscópico, dos átomos, moléculas, uma partícula minúscula tal como o elétron não se comporta como partícula, e sim como onda, e nesse sentido está "espalhada" pelo átomo ou molécula em questão. Uma partícula microscópica é, portanto, descrita matematicamente por uma "função de onda" ψ, que contém toda a informação possível de ser obtida sobre aquela partícula. Usualmente, ψ é uma função que associa cada ponto do espaço a um número complexo,

$$\psi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{C}$$

mas aqui, por simplificação, consideraremos apenas um sistema quântico unidimensional, como se, por exemplo, o elétron pudesse se mover apenas em cima de um segmento de reta, com o que a função de onda tem a ação:

$$\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}\,.$$

Na chamada representação x, ou representação da posição, a função de onda $\psi(x)$ terá um valor (um número complexo) para cada posição x do elétron. Os seguintes postulados são válidos na representação x:

(a) $\psi^*(x)\,\psi(x)\,dx$ é a probabilidade de encontrar a partícula entre as posições x e $x + dx$;

(b)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\,\psi(x)\,dx = 1$$
(esta é a condição de normalização, e equivale a dizer que a probabilidade de encontrar a partícula em <u>qualquer</u> lugar do eixo x é 1, ou cem por cento);

(c)
$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\,\widehat{x}\,\psi(x)\,dx$$
é o <u>valor esperado</u> da posição x, e significa uma média de um número muito grande de medidas da posição daquela partícula microscópica;

(d)
$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\,\widehat{A}\,\psi(x)\,dx$$

é o valor esperado da grandeza A. O símbolo $\widehat{A}$ especifica o operador matemático representando a grandeza física A.

Nessa representação, $\widehat{x}$ é um operador de multiplicação, e

$$\widehat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

é o operador momento linear.

Na representação p, haverá uma função de onda no espaço dos momentos, $g(p)$,

$$g(p) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}\,,$$

sendo válidos os seguintes postulados:

(A) $g^*(p)\, g(p)\, dp$ é a probabilidade de que a partícula tenha momento entre p e $p + dp$;

(B)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^*(p)\, g(p)\, dp = 1\,;$$

(C)

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(p)\, \widehat{p}\, g(p)\, dp$$

(valor esperado do momento linear);

(D)

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(p)\, \widehat{A}\, g(p)\, dp$$

(valor esperado da grandeza física A na representação dos momentos).

Na representação dos momentos, $\widehat{p}$ é um operador de multiplicação, e $\widehat{x} = +i\hbar d/dp$, de modo bastante simétrico com relação à representação das posições.

As duas representações são diariamente usadas pelos físicos. O que liga as duas representações uma à outra? A resposta está na conexão entre as duas funções de onda,

$$g(p) = \mathcal{F}\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\, e^{-ipx/\hbar}\, dx$$

e

$$\psi(x) = \mathcal{F}^{-1} g(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(p)\, e^{+ipx/\hbar}\, dp\,.$$

Assim, passa-se de uma representação à outra através de transformações de Fourier.

Observe a mudança na constante da transformada de Fourier: em vez de $1/\sqrt{2\pi}$ usou-se $1/\sqrt{2\pi\hbar}$, devido ao fato de trabalharmos aqui com p e não com $k = p/\hbar$.

Exibiremos também os complexos conjugados dessas duas últimas expressões, que serão úteis nos cálculos seguintes.

$$g^*(p) = [\mathcal{F}\psi(x)]^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\, e^{+ipx/\hbar}\, dx$$

e

$$\psi^*(x) = \left[\mathcal{F}^{-1} g(p)\right]^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(p)\, e^{-ipx/\hbar}\, dp\,.$$

A equivalência entre as representações x e p pode ser estabelecida, mostrando que os postulados (a)-(d) são equivalentes aos (A)-(D). Por exemplo, para mostrar que (b) e (B) são equivalentes, fazemos:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*\, \psi\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}\psi)^*\, (\mathcal{F}\psi)\, dp = \int_{-\infty}^{+\infty} g^*\, g\, dp$$

onde empregamos a relação de Parseval. A rigor, partimos de (b) e chegamos ao resultado (B). Mas fica evidente que, partindo de (B) e usando de novo a relação de Parseval, chegamos a (b), o que mostra as implicações nos dois sentidos, (b) $\Longrightarrow$ (B) e (B) $\Longrightarrow$ (b).

Já (d) implica em (C),

$$\begin{aligned}
\langle p \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right) \psi\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, g^*(p) \int_{-\infty}^{+\infty} dp'\, g(p') \times \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ipx/\hbar} \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right) e^{+ip'x/\hbar} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, g^*(p) \int_{-\infty}^{+\infty} dp'\, g(p')\, p' \underbrace{\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{i(p'-p)x/\hbar}}_{\delta(p'-p)} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(p)\, p\, g(p)\, dp\,.
\end{aligned}$$

Pode-se mostrar, de modo semelhante, que (C) implica em (d).

Você deve lembrar-se também de que a transformada de Fourier de uma derivada, $\mathcal{F} d\psi/dx$ dava $i\omega\mathcal{F}\psi$, onde, agora, $\omega = p/\hbar$. Em palavras: a transformada de Fourier da derivada leva à transformada multiplicada pela variável (neste caso, p). Então, se $\widehat{x}$ era operador de multiplicação e $\widehat{p} = -i\hbar d/dx$, quando efetuarmos as transformadas de Fourier (isto é, quando passarmos à representação p), $\widehat{p}$ vira um operador de multiplicação. Já $\widehat{x}$ assumirá a forma de um operador tipo derivação.

$$\begin{array}{lcl} \widehat{x}\,\psi = x\,\psi & \mathcal{F} & \widehat{p}\,g = p\,g \\ \widehat{p}\,\psi = -i\hbar\, d\psi/dx & \longrightarrow & \widehat{x}\,g = +i\hbar\, dg/dp \end{array}$$

ATIVIDADES

1. Ache a transformada de Fourier do pulso triangular da figura 9.6.

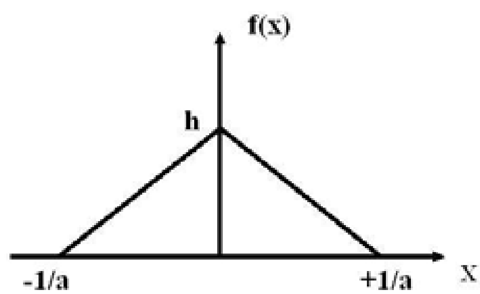

Figura 9.6: Figura para o Problema 1.

2. Ache a transformada de Fourier do potencial degrau,

$$V(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 0 \\ V_0\,, & x \geq 0 \end{cases}$$

3. Mostre que a transformada de Fourier da função de onda do estado fundamental do oscilador harmônico,

$$\psi(x) = (\pi a^2)^{-1/4}\, e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$

é

$$g(p) = (\frac{a^2}{\pi\hbar^2})^{-1/4}\, e^{-\frac{a^2 p^2}{2\hbar^2}} ,$$

ou seja, mostre que a transformada de Fourier de uma Gaussiana é outra Gaussiana.

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Você terá que usar a definição de transformada de Fourier para atacar as duas primeiras questões, além de, naturalmente, calcular algumas integrais simples. Na terceira, também terá de usar a definição; mas aí você vai precisar "completar o quadrado" na exponencial obtida, para fazer uma mudança de variáveis, e calcular a integral através da função gama. Completar o quadrado significa, aqui, acrescentar uma nova exponencial com um termo constante convenientemente escolhido, tal que:

$$e^{Ax^2}.e^{Bx} = e^{A(x-x_0)^2}.e^{C} ;$$

quanto à mudança de variável, seria algo como $t = x - x_0$.

9.2 Transformadas de Laplace

Define-se a transformação integral de Laplace, ou transformada de Laplace, da função $F(t)$ através da expressão

$$\mathcal{L}\ F(t) = f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\ dt\ .$$

Como um exemplo simples, calculemos a transformada de Laplace da função $F(t) = 1$ (para qualquer t real):

$$\mathcal{L}\ F(t) = \mathcal{L}\ 1 = \int_0^\infty e^{-st}\ dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty = \frac{1}{s}\ .$$

$F(t)$	$f(s) = \mathcal{L}\ F(t)$	Restrição
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$	$s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0\ ,\ n = 0, 1, 2, \ldots$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$\frac{t^{(n-1)}e^{at}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$	$s > a$
$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$a \neq b,\ \ s > \max\{a, b\}$
$\operatorname{sen} at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s > 0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s > 0$
$t\ \cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$s > 0$
$at - \operatorname{sen} at$	$\frac{a^3}{s^2(s^2+a^2)}$	$s > 0$
$\operatorname{sen} at - at\ \cos at$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	$s > 0$
$\operatorname{senh}\ at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s > \|a\|$
$\cosh\ at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s > \|a\|$

Tabela 9.3: Transformadas de Laplace de funções elementares.

Note que, para esse resultado ser válido é necessária a restrição $s > 0$, para que o cálculo no limite superior seja convergente, $e^{-st} \to 0$ quando $t \to \infty$.

É possível, portanto, calcular tais transformações efetuando integrações desse tipo. A tabela 9.3 mostra resultados obtidos transformando algumas funções elementares.

Apresentamos a seguir condições suficientes para a existência das transformações de Laplace:

(a) $F(t)$ precisa ser, pelo menos, seccionalmente contínua para $0 \leq t \leq N$;
e
(b) $F(t)$ precisa ser no máximo de ordem exponencial γ para $t > N$.

Lembremos que uma função seccionalmente contínua, também chamada contínua por partes, é contínua exceto num conjunto de pontos em que faz saltos finitos. Já uma função $F(t)$ é de ordem exponencial γ se, para todo $t > N$, existir um número M tal que

$$|F(t)| < Me^{\gamma t} \ .$$

É preciso observar que as condições acima são *suficientes* para a existência da transformada de Laplace, mas *não são necessárias*.

Listaremos a seguir algumas propriedades da transformação de Laplace.

- Linearidade: para quaisquer números a, b e funções F, G,

$$\mathcal{L}\ (aF + bG) = a\ \mathcal{L}F + b\ \mathcal{L}G$$

- Translação: aqui há duas expressões traduzindo as propriedades de translação,

  (i)
$$\mathcal{L}\left[e^{at}F(t)\right] = f(s-a)$$

  (ii) Sejam
$$\mathcal{L}F(t) = f(s)\ ,$$

$$G(t) = \begin{cases} F(t-a) & ,\ t > a \\ 0 & ,\ t < a \end{cases}$$

  então
$$\mathcal{L}G(t) = e^{-as}f(s)\ .$$

- Mudança de escala,

$$\mathcal{L}F(at) = \frac{1}{a}\ f(\frac{s}{a})$$

- Transformações de derivadas (importante!),

$$\mathcal{L}F'(t) = sf(s) - F(0)$$

onde $F(t)$ deve ser contínua para $0 \leq t \leq N$ e de ordem exponencial para $t > N$. É possível estender esse resultado para o caso de $F(t)$ seccionalmente contínua: se $F(t)$ tiver, por exemplo, um salto finito de altura $h = F(a_+) - F(a_-)$ em $t = a$,

$$\mathcal{L}F'(t) = sf(s) - F(0) - he^{-as} \ .$$

(e, se houver N saltos finitos, teremos que subtrair N termos semelhantes à esse último, um para cada salto). No caso da transformação da derivada segunda,

$$\mathcal{L}F''(t) = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0)$$

com $F(t)$ e $F'(t)$ contínuas em $[0, N]$ e sendo F de ordem exponencial para $t > N$.

- Integrais,

$$\mathcal{L} \int_0^t F(u)du = \frac{f(s)}{s}$$

- Divisão por t,

$$\mathcal{L} \, \frac{F(t)}{t} = \int_s^\infty f(u)du$$

(se existir o limite de $F(t)/t$ com t tendendo a zero).

Outras propriedades podem ser encontradas em tabelas, como a de Abramowitz-Stegun ou Gradshtein.

Vamos introduzir agora a transformada inversa de Laplace.

Se $\mathcal{L}F(t) = f(s)$, isto é, $f(s)$ é a transformada de Laplace da função $F(t)$, então $F(t)$ é a transformada inversa de Laplace de $f(s)$,

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1} f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} f(s) ds \ .$$

A integral acima é normalmente calculada por resíduos. O parâmetro γ corresponde a um valor da abscissa s tal que todos os polos do integrando se encontram à esquerda de uma linha paralela ao eixo das ordenadas, passando por $s = \gamma$.

$f(s)$	$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\ f(s)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n
$\ldots$	$\ldots$

Tabela 9.4: Algumas antitransformadas de Laplace.

Alguns exemplos de transformadas inversas de Laplace podem ser encontradas na tabela abaixo.

Não é difícil notar que essa é a mesma tabela 9.3, com as colunas agora dispostas em ordem trocada.

Vamos em seguida nos concentrar em alguns exemplos que mostram o uso que se pode fazer das transformações de Laplace.

Exemplo Resolva a equação diferencial

$$\ddot{X} + \omega^2 X = 0$$

por transformação de Laplace. Adote como condições iniciais $X(0)=0$, $\dot{X}(0) = v_0$.

Tomamos a transformação de Laplace nos dois lados da equação diferencial para X,

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2X(t)}{dt^2} + \omega^2 X(t)\right] = \mathcal{L}\ \frac{d^2X(t)}{dt^2} + \omega^2\ \mathcal{L}\ X(t) = 0$$

e chamando $\mathcal{L}X(t) = x(s)$,

$$s^2 x(s) - sX(0) - X'(0) + \omega^2 x(s) = 0$$

de onde se obtém, após usar as condições iniciais,

$$x(s) = \frac{v_0}{s^2+\omega^2} = \frac{v_0}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\ \ .$$

Consultando a tabela 9.3 para encontrar a antitransformada, achamos:

$$X(t) = \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t \ .$$

Exemplo Determine o campo elétrico transversal $E(x,t)$ propagando-se ao longo do eixo x, obedecendo a

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2}$$

e sujeito às condições iniciais $E(x,0) = 0$, $E(0,t) = \mathcal{E}(t)$ (sendo $\mathcal{E}(t)$ uma função dada) e $[\partial E/\partial t]_{t=0} = 0$.

Aplicando a transformada de Laplace à equação diferencial parcial,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, e(x,s) = \frac{1}{v^2}\, s^2\, e(x,s) - \frac{1}{v^2}\, s\, E(x,0) - \frac{1}{v^2} \left[\frac{\partial E}{\partial t}\right](x,0)$$

onde $\mathcal{L}E(x,t) = e(x,t)$. Tendo em vista as condições de contorno,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, e(x,s) = \frac{1}{v^2}\, s^2\, e(x,s) \ ,$$

e resolvendo essa equação diferencial simples,

$$e(x,t) = a\, e^{\frac{s}{v}x} + b\, e^{-\frac{s}{v}x} = b(s)\, e^{-\frac{s}{v}x}$$

(a foi escolhido como zero, para manter a função $e(x,t)$ limitada).

Antitransformando, obtemos:

$$E(x,t) = B(t - \frac{x}{v}) \ ,$$

sendo $\mathcal{L}B(t) = b(s)$. Como $E(0,t) = \mathcal{E}(t) = B(t)$,

$$E(x,t) = \begin{cases} \mathcal{E}(t - \frac{x}{v}) & (t > \frac{x}{v}) \\ 0 & (t < \frac{x}{v}) \,. \end{cases}$$

ATIVIDADES

1. Usando a transformação de Laplace, resolva a equação diferencial

   $$\ddot{y} - \dot{y} - 6y = 0 \,,$$

   sujeita às condições iniciais $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = +3$.

2. Usando a transformação de Laplace, resolva a equação diferencial
$$\ddot{y} - \dot{y} - 2y = 0\,,$$
sujeita às condições iniciais $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 2$.

3. Ache, através da transformação de Laplace, a solução da equação diferencial seguinte,
$$\ddot{y}(t) + k^2 y(t) = \delta(t)$$
sujeita às condições iniciais $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 0$.

   Dica: calcule explicitamente a transformada de Laplace da função delta de Dirac, lembrando que
$$\int f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a)\,.$$

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Veja os exemplos no texto. Respostas: (1) $\frac{3}{5}\,(e^{3t} - e^{-2t})$; (2) e^{2t}; (3) $\frac{1}{k}\,\mathrm{sen}\,kt$.

CONCLUSÃO

Vimos que o emprego da transformada de Laplace torna muito simples a resolução de equações diferenciais; tal facilidade está associada ao uso de tabelas que nos poupam de efetuar cálculos complexos (como o cálculo de integrais variadas). A transformação integral de Fourier também tem igual potencial. Seu uso na mecânica quântica estabelece uma ligação entre as representações da posição e do momento.

RESUMO

Nesta aula foram apresentadas as noções básicas e propriedades das transformadas de Fourier e Laplace, bem como mostramos seu uso para resolver equações diferenciais parciais e ordinárias da física teórica.

PRÓXIMA AULA

Serão apresentadas as noções básicas dos tensores e exemplos de seu uso na física.

REFERÊNCIAS

SPIEGEL, Murray. Transformadas de Laplace. São Paulo: McGraw Hill, 1981.

BUTKOV, Eugene. Física Matemática. Rio de Janeiro: Guanabara 2, 1978.

ARFKEN, George; WEBER, Hans. Física Matemática. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.