Aula
10

Introdução aos Tensores

METAS

Introduzir a notação tensorial, os conceitos básicos e propriedades dos tensores. Mostrar seu uso em aplicações físicas.

OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de: compreender e utilizar a notação tensorial em aplicações físicas, em particular para manipular expressões envolvendo operadores vetoriais.

PRÉ-REQUISITOS

Espaços vetoriais, operadores sobre espaços métricos.

INTRODUÇÃO

Em alguns ramos da física em que se trabalha bastante com objetos com componentes, como vetores e matrizes, desenvolveu-se uma notação extremamente compacta para expressar as leis físicas e os modelos teóricos de modo geral. Nesta aula discutimos as noções básicas relacionadas a essa notação tensorial, e mostramos o uso dessa ferramenta em aplicações físicas.

Aula 10

10.1 Noções Iniciais

Um tensor é um ente matemático constituído de componentes, que são funções de um certo número de variáveis (as "coordenadas"), digamos $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Aqui estamos usando índices $1, 2, \ldots, n$ superescritos, não são potências. Em algumas outras situações, nós usaremos índices subescritos, e em outras super e subescritos, como ficará claro adiante. Também, o espaço determinado pelas coordenadas $x^1, x^2, \ldots, x^n$ é dito n-dimensional. Em particular, temos o espaço tridimensional usual da Física, às vezes denotado $\mathbf{R}^3$, com $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$.

O número de componentes de um tensor é n^r, onde n é o número de coordenadas, e r é a ordem do tensor.

Um tensor de ordem zero ($r = 0$) tem uma só componente, e é chamado escalar. Indicaremos genericamente esse tensor por sua componente, A.

Um tensor de ordem um ($r = 1$) tem n componentes, podendo ser indicado na forma:

$$(A_1, A_2, \ldots, A_n)$$

e é chamado vetor. Nós indicaremos o tensor de ordem um por uma de suas componentes, A_i.

Um tensor de ordem dois ($r = 2$) tem n^2 componentes, podendo ser escrito na forma:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

e é chamado, portanto, de matriz; nós indicaremos esse tensor de ordem dois por uma componente genérica $A_{i,j}$.

Note que a ordem do tensor é dada exatamente pelo número de índices de sua componente genérica, como se pode ver dos três casos vistos: A, A_i e $A_{i,j}$ tem, respectivamente, zero, um e dois índices.

No caso especial dos tensores de ordem dois, utiliza-se frequentemente as definições de tensor simétrico, se

$$A_{i,j} = A_{j,i}\,, \qquad \forall\, i, j$$

e de tensor singular, como sendo aquele possuindo determinante nulo.

Para tensores de ordem superior a dois, não há uma forma de escrevê-los num arranjo gráfico simples; mas costuma-se trabalhar com seus elementos genéricos, que podem ter o aspecto: A_{ijk} (tensor de ordem três), A_{ijkl} (tensor de ordem quatro), ...

A ordem dos índices é importante, e geralmente tem-se que A_{123} é diferente de A_{132}, A_{4123} é diferente de A_{4213}, etc.

A convenção de Einstein, ou convenção do somatório, é muito usada, e consiste em não escrever o sinal de soma $\sum$, omití-lo sempre que houver índices repetidos. Quando, numa expressão envolvendo tensores, houver um índice, digamos "i" aparecendo duas ou mais vezes, subentende-se que há uma soma em "i", variando de 1 a n (n sendo o número de coordenadas). Por exemplo, quando encontrarmos em um texto que use a notação tensorial a expressão $A_i\, A^i$, ela significa na verdade:

$$A_i\, A^i = \sum_{i=1}^{n} A_i\, A^i \,,$$

pois o índice "i" apareceu duas vezes. Já a expressão $A_{ijk}\, B^{ik}$ quer dizer o seguinte:

$$A_{ijk}\, B^{ik} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ijk}\, B^{ik}$$

e perceba que há tanto a repetição do índice "i" como de "k" (e portanto há somas nesses índices), mas o índice "j" aparece apenas uma vez, e portanto não está somado.

Observe também que, sempre que se tem índices repetidos, um deles é subescrito, e o outro é superescrito. Isto se deve ao produto escalar, como veremos adiante.

Outros exemplos são:

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u^i}{\partial x^i} \,;$$

$$\frac{\partial q}{\partial x^i}\, \frac{\partial x^i}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial x^i}\, \frac{\partial x^i}{\partial t}$$

esta última representando uma espécie de "regra da cadeia" para uma função q dependendo de várias variáveis, $x^1, x^2, \ldots, x^n$, e cada uma destas dependendo de outro parâmetro t (que poderia ser o tempo).

O índice repetido sempre pode ser trocado por outro índice (desde que este não apareça na expressão tensorial), por exemplo

$$A^i A_i = A^j A_j \,.$$

Já os índices livres, isto é, os que não estão repetidos, não podem ser trocados.

10.2 Transformações de Coordenadas

Em vários problemas físicos, torna-se interessante – e às vezes imprescindível, mesmo – acompanhar o movimento de uma partícula (ou outro sistema físico evoluindo no tempo) sob dois ou mais pontos de vista distintos.

Como um exemplo, a descrição da queda livre de um objeto dentro de um vagão de trem, que se desloca com velocidade constante em relação ao chão, pode ser feita por dois observadores distintos, digamos, um observador O no solo, e outro O' dentro do vagão (veja a figura 10.1).

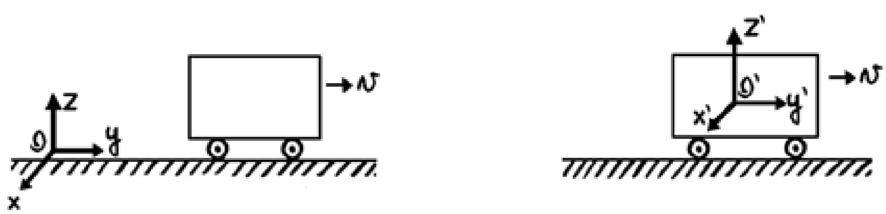

Figura 10.1: Dois observadores, O fixo em relação ao chão, e O' no interior de um vagão, que se move num trilho retilíneo com velocidade constante.

As medidas de posição do objeto que cai, feitas pelo observador O, relacionam-se com as medidas feitas por O',

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y - Vt \\ z' = z \\ (t' = t) \end{cases}$$

e estas são as transformações relativísticas de Galileu (reveja no material de Física A). Neste caso, diz-se que a transformação de coordenadas consistiu de uma translação, pois $y' = y + \Delta y$ (onde $\Delta y = -Vt$).

Outro exemplo de transformação de coordenadas liga dois referenciais úteis na descrição de um cristal, que consiste num arranjo bastante organizado de átomos. Um referencial sem linhas, em que se usa os eixos ortogonais x e y, e um referencial com linhas, usando x' e y' são ligados por uma rotação dos eixos de um ângulo θ. Matematicamente, a transformação de coordenadas de x, y para x', y' é dada por:

$$\begin{cases} x' = x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta \\ y' = -x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta \,. \end{cases}$$

Usaremos as seguintes notações para indicar tensores em diferentes sistemas de coordenadas: se a componente genérica do tensor A for A_{ijkl} no sistema $\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$, então a componente genérica no sistema $\{x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}\}$ será $A_{i'j'k'l'}$ (ou, se preferir, A'_{ijkl}).

O aluno não deve se confundir com a notação $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Para fixar ideias, pense no espaço usual tridimensional, $n = 3$, e $x^1 = x$, $x^2 = y$, e $x^3 = z$. Oportunamente explicaremos a razão do índice aparecer como se fosse um expoente. Aproveitamos a oportunidade para lembrar que na teoria da relatividade restrita, trabalha-se com um "espaço" quadridimensional: além das três coordenadas espaciais com as quais já estamos acostumados, $x^1 = x$, $x^2 = y$, e $x^3 = z$, introduz-se uma quarta, que os textos da área costumam denotar $x^0 = ct$ (ou ict, onde i é a unidade imaginária). Esta quarta componente está, portanto, ligada ao tempo. A multiplicação pela velocidade da luz faz com que, dimensionalmente, x^0 também seja um comprimento, como x^1, x^2, x^3. Em relatividade, tempo e espaço estão intimamente relacionados, e podem transformar-se um no outro. O espaço quadridimensional que citamos é chamado de "espaço de Minkowski".

A transformação de coordenadas de $\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$ para o sistema de coordenadas $\{x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}\}$ pode ser indicada por:

$$\begin{aligned} x^{1'} &= p_1^{1'}\, x^1 + p_2^{1'}\, x^2 + p_3^{1'}\, x^3 \\ x^{2'} &= p_1^{2'}\, x^1 + p_2^{2'}\, x^2 + p_3^{2'}\, x^3 \\ x^{3'} &= p_1^{3'}\, x^1 + p_2^{3'}\, x^2 + p_3^{3'}\, x^3 \end{aligned}$$

sendo que tomamos $n = 3$ por simplicidade. Tal sistema de equações pode ser colocado em forma matricial,

$$\begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^{1'}_1 & p^{1'}_2 & p^{1'}_3 \\ p^{2'}_1 & p^{2'}_2 & p^{2'}_3 \\ p^{3'}_1 & p^{3'}_2 & p^{3'}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

e que pode ser ainda "resumida" (lembre-se da convenção de Einstein) em:

$$x^{i'} = p^{i'}_i \, x^i \, .$$

É notável o quanto a notação tensorial consegue compactar as expressões envolvendo vetores e matrizes!

Suporemos, aqui, que a matriz P de mudança de base é não-singular, isto é, que seu determinante é não-nulo. Essa é uma condição para a existência da transformação inversa, P^{-1}.

Quase sempre estaremos interessados em transformações lineares entre os sistemas de coordenadas, para as quais pode-se escrever:

$$p^{i'}_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \, .$$

A transformação inversa daquela representada pela matriz $p^{i'}_i$ é:

$$x^i = p^i_{i'} \, x^{i'} \, .$$

Note que estamos representando a matriz inversa de $p^{i'}_i$ por $p^i_{i'}$, de modo que:

$$p^{i'}_i \cdot p^j_{i'} = \delta^j_i = \begin{cases} 1\,, & \text{se } i = j \\ 0\,, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Nessa expressão, δ^j_i é o tensor delta de Kronecker, que no fundo representa a matriz unidade,

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \, .$$

10.3 Definição de Tensor. Propriedades, Exemplos

Nas seções precedentes, introduzimos uma noção básica do que seria um tensor, e falamos também em transformações de coordenadas.

Neste momento, introduziremos a definição formal de tensor, que liga os dois tópicos até então discutidos.

A definição será dividida em três partes.

(a) Uma entidade com componentes $A_{ij\ldots k}$ no sistema x^i, e componentes $A_{i'j'\ldots k'}$ no sistema $x^{i'}$ é um <u>tensor covariante</u> sob a transformação $x^i \to x^{i'}$ se:

$$A_{i'j'\ldots k'} = A_{ij\ldots k}\,\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\ldots\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\,.$$

(b) Um ente $A^{ij\ldots k}$ é um <u>tensor contravariante</u> sob a transformação $x^i \to x^{i'}$ se:

$$A^{i'j'\ldots k'} = A^{ij\ldots k}\,\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\,\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j}}\ldots\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}}\,.$$

(c) $A^{i\ldots j}_{k\ldots l}$ é um <u>tensor misto</u>, contravariante em $i,\ldots,j$ e covariante em $k,\ldots,l$, se se transformar como:

$$A^{i'\ldots j'}_{k'\ldots l'} = A^{i\ldots j}_{k\ldots l}\,\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\ldots\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j}}.\frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}}\ldots\frac{\partial x^{l}}{\partial x^{l'}}\,.$$

Em particular, para um tensor de ordem zero,

$$A' = A\,;$$

a componente tem o mesmo valor, seja em $\{x^i\}$, seja no sistema $\{x^{i'}\}$. Por isso se diz que **um escalar é invariante sob transformações de coordenadas**.

Se dois tensores do mesmo tipo são iguais em algum sistema de coordenadas, então serão iguais em <u>todos</u> os sistemas de coordenadas. Um tensor nulo (isto é, com todas as componentes nulas) é nulo em qualquer sistema de coordenadas.

Nós ilustraremos a afirmação acima com um exemplo: se dois tensores, A e B, de mesma ordem e tipo, são iguais num sistema x^i,

$$B^{jk}_i = A^{jk}_i$$

então num sistema $x^{i'}$ teremos:

$$B^{j'k'}_{i'} = B^{jk}_i\,\underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j}}\,\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}}}$$

e

$$A^{j'k'}_{i'} = A^{jk}_i\,\underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j}}\,\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}}}\,.$$

Como $A_i^{jk} = B_i^{jk}$, e as partes indicadas pelas chaves horizontais são iguais, segue que

$$A_{i'}^{j'k'} = B_{i'}^{j'k'}$$

demonstrando que a igualdade ocorre também num outro sistema qualquer $x^{i'}$.

Quando você ingressou na Universidade, provavelmente já havia aprendido muita coisa da mecânica de Newton. Por exemplo, há a segunda lei de Newton, que pode ser expressa como:

$$F = m\,a$$

(a força é o produto da massa pela aceleração).

Mas, na Física A, seu professor deve ter introduzido a notação vetorial, de modo que vocês passaram a ter um método que pode ser aplicado a movimentos no espaço. Na Física A, a segunda lei de Newton virou:

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}\,.$$

Será que é só isso, a notação vetorial da Física A apenas estende o formalismo unidimensional para três dimensões? Não, não é só isso, a vantagem no uso de vetores é muito mais significativa. Digamos que tal relação vetorial (ou devemos dizer... tensorial?) valha em um dado sistema de coordenadas, usado por um certo observador $\mathcal{O}$. Mas, pelo que vimos acima, se o vetor do lado esquerdo é igual ao vetor do lado direito num sistema de coordenadas, então serão iguais em todos os sistemas de coordenadas! Isto quer dizer que, quando expressamos a lei de Newton em termos vetoriais, está garantido que ela é válida para todos os observadores (inerciais), ou em outras palavras: ela expressa uma lei física que é independente de qual seja o observador, ou sistema de referência adotado. Assim, quando optamos pela formulação tensorial, estamos na realidade tomando uma forma que tem uma validade muito mais ampla.

Um exemplo de tensor <u>contravariante</u> é dado pelas diferenciais dx^i, pois, usando a regra da cadeia,

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,dx^i$$

(compare-se com a definição (b)).

Por outro lado, $\partial/\partial x^i$ comporta-se como um tensor covariante, já que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} = (\nabla\phi)_i = (\mathrm{grad}\,\phi)_i$$

que é a componente "i" do vetor gradiente de ϕ. Mas tal componente se transforma assim:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$$

e essa expressão deve ser comparada com a definição (a).

Um tensor misto muito importante é o delta de Kronecker,

$$\delta^i_j\,\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} = \delta^i_j\,p^{i'}_i\,p^j_{j'} = p^{i'}_j\,p^j_{j'} = \delta^{i'}_{j'}\,.$$

Vamos agora listar as operações que comumente podem ser feitas com os tensores.

A soma e a subtração de tensores pode ser efetuada, mas apenas com dois tensores de mesma ordem e mesmo tipo, e essas operações são feitas componente a componente, como ilustram os exemplos:

$$A_{ij} + B_{ij} = C_{ij}\,,$$

$$A^i_k - B^i_k = D^i_k\,.$$

O produto externo é aplicado nas situações em que não haja repetição de índices. Obtém-se um tensor de ordem maior, como mostra o exemplo:

$$A^i_j\,B^{kl}_m = C^{ikl}_{jm}\,.$$

Em contrapartida, no produto interno há índices repetidos em tensores distintos, que pela convenção de Einstein estão somados:

$$A^{ij}\,B_{ilm} = C^j_{lm}\,;$$

observe que o índice "i", que estava somado, desaparece do tensor resultante C, mas os índices livres j, l, m são preservados (inclusive no seu tipo: co e contravariantes mantém sua posição).

Um pouco parecido, mas na verdade com uma diferença sutil em relação ao produto interno é a contração de índices: neste caso, a repetição de índices ocorre num **mesmo** tensor. Assim, partindo de um dado tensor, digamos A^{ijk}_{lm}, podemos criar por contração outro tensor, como:

$$A^{ijk}_{ik} = B^j\,,$$

ou então

$$A^{ijk}_{jm} = C^{ik}_{m} \,.$$

Há também uma operação que pode ser vista como a inversa do produto; a chamada regra do quociente estabelece: se, para todo tensor B_i, o produto interno for igual a um tensor A^j,

$$C^{ij}\, B_i = A^j \,,$$

então C^{ij} é um tensor, chamado de quociente de A^j por B_i.

Utiliza-se uma notação específica para a derivação de tensores: a derivada do tensor A com relação à variável x^m é indicada

$$\frac{\partial}{\partial x^m}\, A^{i\ldots j}_{k\ldots l} = A^{i\ldots j}_{k\ldots l\,|\,m} \,.$$

Esse objeto nem sempre é um tensor. Temos, para qualquer tensor A, a relação para a componente transformada para outro sistema,

$$A^{i'\ldots j'}_{k'\ldots l'} = A^{i\ldots j}_{k\ldots l}\ \ p^{i'}_{i} \ldots p^{j'}_{j}\, p^{k}_{k'} \ldots p^{l}_{l'}$$

e a derivada do lado direito dessa expressão fornece (note bem, é a derivada de um produto de termos, igual à derivada do primeiro vezes todos os outros, mais o primeiro vezes a derivada do segundo vezes todos os outros, mais etc.):

$$A^{i'\ldots j'}_{k'\ldots l'\,|\,m'} = A^{i\ldots j}_{k\ldots l\,|\,m}\ \ p^{i'}_{i} \ldots p^{j'}_{j}\, p^{k}_{k'} \ldots p^{l}_{l'}$$
$$+\text{termos envolvendo derivadas dos p}'\text{s}\,.$$

Para que o objeto derivada de A em relação a x^m seja um tensor, deve se transformar como tal, e portanto na expressão acima deveríamos ter apenas o primeiro termo do lado direito. Para que todos os outros termos (que envolvem derivadas dos p's) se anulem, basta que as transformações de coordenadas sejam lineares, pois nesse caso:

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} = p^{i'}_{i} = \text{constante}$$

e a derivada de uma constante é nula.

Veja um exemplo bem simples: suponha que você queira fazer uma tranformação linear, levando do sistema de eixos $\{x, y\}$, no plano, a um outro sistema $\{x', y'\}$. Se a transformação for linear, será do tipo:

$$x' = ax + by\,, \qquad y' = cx + dy$$

e assim
$$p_1^{1'} = \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{ax + by}{\partial x} = a = \text{constante}$$
e assim a derivada desse parâmetro p é zero.

Felizmente, em física normalmente usamos transformações lineares, como translações ou rotações, e portanto a derivada de tensores com relação a tais transformações são ainda tensores.

Há um tensor especialmente importante, visando o uso na física. É o chamado tensor métrico, que vamos introduzir agora.

Considere um tensor g_{ij}, arbitrário, mas simétrico ($g_{ij} = g_{ji}$) e não-singular ($\det g \neq 0$). Se indicarmos a matriz inversa de g_{ij} por g^{ij},
$$g^{ij}\, g_{jk} = \delta^i_k\, .$$

Com o auxílio desses tensores g_{ij} e g^{ij} consegue-se abaixar e elevar índices de outros tensores: por exemplo, se quisermos construir um tensor covariante a partir das componentes contravariantes A^i, fazemos:
$$A_i = g_{ij}\, A^j\, ;$$
se quisermos construir as componentes contravariantes a partir das covariantes A_i, basta tomar:
$$A^i = g^{ij}\, A_j\, ;$$
e se quisermos abaixar, digamos dois índices de A^{ij}_k, procedemos assim:
$$A_{ijk} = g_{il}\, g_{jm}\, A^{lm}_k\, .$$

Nem sempre os espaços em que se trabalha possuem uma noção de distância entre pontos, ou métrica. No caso de possuirem, a distância entre pontos infinitesimalmente próximos pode ser introduzida da seguinte forma:
$$\begin{aligned} d\,[\,(x^1,\, x^2, \ldots, x^n)\,,\, (x^1 + dx^1,\, x^2 + dx^2, \ldots, x^n + dx^n)\,]^2 &= (ds)^2 \\ &= g_{ij}\, dx^i\, dx^j\, . \end{aligned}$$

No caso do espaço Euclideano tridimensional, a que estamos acostumados devido ao nosso estudo da mecânica Newtoniana,
$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

e vemos que, neste caso,

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1\,;$$

os outros componentes da matriz são nulos, e:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e g é a matriz unidade!

Em geral, se o espaço possui um tensor métrico g_{ij}, é chamado espaço Riemanniano. Define-se então o comprimento de um vetor A como a raiz quadrada de:

$$A^2 = g_{ij}\,A^i\,A^j = A_j\,A^j\,.$$

Dois vetores serão ortogonais se:

$$g_{ij}\,A^i\,B^j = 0$$

(isto é, se seu produto escalar $A_j\,B^j$ for nulo).

Sempre que considerarmos transformações de um sistema ortogonal de coordenadas para outro sistema também ortogonal, a matriz de mudança de base será uma matriz ortogonal, que se caracteriza pela propriedade de que sua transposta é igual à sua inversa,

$$P^t = P^{-1}\,.$$

Neste caso, a métrica (que, como veremos, será dada pelo produto de matrizes $P^t\,P$) será uma matriz identidade, como no exemplo que vimos há pouco. Com isso, componentes contravariantes A^i e covariantes,

$$A_i = g_{ij}\,A^j$$

serão idênticas, já que $g = P^t\,P = P^{-1}\,P = 1$.

No entanto, quando considerarmos transformações de coordenadas envolvendo um sistema oblíquo de coordenadas (isto é, não-ortogonal), haverá diferença entre componentes co e contravariantes.

Ilustraremos tais resultados com os dois exemplos seguintes.

Exemplo Vamos mostrar que:

$$A = \begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix}$$

é um tensor, com relação à rotação de eixos, isto é, sob transformações de coordenadas do tipo:

$$\begin{cases} x' = x\,\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y' = -x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\,\cos\theta \end{cases}$$

Trata-se de uma transformação linear de $\{x^1, x^2\}$ para $\{x^{1'}, x^{2'}\}$,

$$\begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ -\mathrm{sen}\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

A transformação inversa,

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \end{pmatrix}$$

envolve a matriz inversa de P,

$$\begin{aligned} P^{-1} &= \frac{1}{\det P}\,\mathrm{Adj}\left[P^t\right] = \frac{1}{cos^2\,\theta + sen^2\,\theta}\,\mathrm{Adj}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = P^t. \end{aligned}$$

Assim, $P^t = P^{-1}$, e P é uma matriz ortogonal.
Usamos essa matriz P^{-1} para escrever:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \end{pmatrix}$$

e daí segue, por exemplo, que

$$x^1 = \cos\theta\, x^{1'} - \mathrm{sen}\,\theta\, x^{2'},$$

e podemos tirar:

$$\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} = cos\,\theta\,, \qquad \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} = -sen\,\theta\,.$$

Analogamente,

$$\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} = sen\,\theta\,, \qquad \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} = cos\,\theta\,.$$

No sistema $\{x^{1'}, x^{2'}\}$, devemos ter

$$A' = \begin{pmatrix} y'^2 & -x'y' \\ -x'y' & x'^2 \end{pmatrix}.$$

Se A for um tensor, digamos, duas vezes covariante, ele deve se transformar assim:

$$A_{i'j'} = A_{ij}\,\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
A'_{11} &= A_{1'1'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{1'}}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{1'}}\,A_{ij} \\
&= \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}\,\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}\,A_{11} + \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}\,\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}\,A_{12} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}\,\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}\,A_{21} + \\
&\quad + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}\,\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}\,A_{22} \\
&= cos^2\,\theta\,y^2 + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,(-xy) + \mathrm{sen}\,\theta\,\cos\theta\,(-xy) + sen^2\,\theta\,x^2 \\
&= (y\,\cos\theta - x\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 \\
&= (y')^2\,.
\end{aligned}$$

De forma análoga, mostra-se que

$$A'_{12} = -x'\,y'\,; \qquad A'_{21} = -x'\,y'\,; \qquad A'_{22} = (x')^2$$

logo A é um tensor.

Se considerássemos A como um tensor duas vezes contravariante, isto é, se testássemos a validade de

$$A^{i'j'} = A^{ij}\,\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\,.$$

obteríamos, novamente,

$$A'_{11} = (y')^2\,; \qquad A'_{12} = -x'\,y'\,;$$

$$A'_{21} = -x'\,y'\,; \qquad A'_{22} = (x')^2\,.$$

Não haveria, portanto, nenhuma diferença entre as componentes co e contravariantes. Lembre-se que isso ocorreu porque considerou-se uma transformação de coordenadas de um sistema ortogonal para outro também ortogonal.

Exemplo Sistemas oblíquos de coordenadas às vezes são úteis em física. Um exemplo de sua aplicação é na descrição de fenômenos que ocorrem numa rede cristalina como a da figura 10.2, que poderia por exemplo ser trigonal.

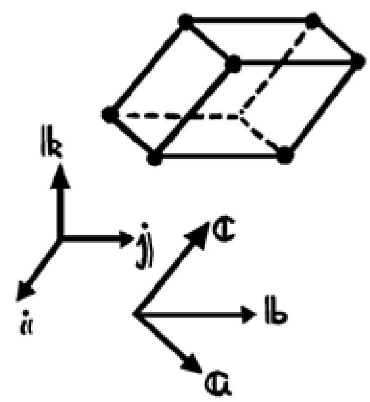

Figura 10.2: Uma rede cristalina mostrando vetores de rede que não são todos ortogonais.

Em função da disposição dos átomos nesse cristal, os vetores de rede $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ não são ortogonais entre si, e são escritos, em termos de versores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ de um sistema ortogonal, como:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k} \\ \mathbf{b} &= b_x\,\mathbf{i} + b_y\,\mathbf{j} + b_z\,\mathbf{k} \\ \mathbf{c} &= c_x\,\mathbf{i} + c_y\,\mathbf{j} + c_z\,\mathbf{k}\,. \end{aligned}$$

Um vetor qualquer $\mathbf{v}$ do espaço pode ser descrito através de componentes, tanto no sistema ortogonal $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (e terá componentes v_x, v_y, v_z)

como no sistema oblíquo $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ (componentes v_a, v_b, v_c). Então,

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k} &= v_a\,\mathbf{a} + v_b\,\mathbf{b} + v_c\,\mathbf{c} \\
&= v_a\,a_x\,\mathbf{i} + v_a\,a_y\,\mathbf{j} + v_a\,a_z\,\mathbf{k} + \\
&\quad v_b\,b_x\,\mathbf{i} + v_b\,b_y\,\mathbf{j} + v_b\,b_z\,\mathbf{k} + \\
&\quad v_c\,c_x\,\mathbf{i} + v_c\,c_y\,\mathbf{j} + v_c\,c_z\,\mathbf{k}
\end{aligned}$$

logo, comparando os coeficientes de cada um dos versores, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, vem:

$$\begin{cases}
v_x = a_x\,v_a + b_x\,v_b + c_x\,v_c \\
v_y = a_y\,v_a + b_y\,v_b + c_y\,v_c \\
v_z = a_z\,v_a + b_z\,v_b + c_z\,v_c
\end{cases}$$

Ou ainda,

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix}$$

onde reconhecemos a matriz de mudança da base $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ para a base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, que chamaremos P,

$$P = \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix}.$$

Neste caso, como $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ não são ortogonais, P não será uma matriz ortogonal.

Como inverter a relação

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix} ?$$

Evidentemente, um jeito é inverter a matriz P. Mas mostraremos uma outra técnica que também faz isso, e é bastante usada em física do estado sólido: construiremos os vetores da rede recíproca, através de:

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \times \mathbf{b} \,.\, \mathbf{c}}\,; \quad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \times \mathbf{b} \,.\, \mathbf{c}}\,; \quad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \times \mathbf{b} \,.\, \mathbf{c}}\,.$$

Esses vetores, que geralmente também não são ortogonais entre si, satisfazem:

$$\mathbf{a}'.\,\mathbf{a} = 1\,; \quad \mathbf{b}'.\,\mathbf{b} = 1\,; \quad \mathbf{c}'.\,\mathbf{c} = 1$$

e daí o nome "recíprocos" (o nome é sugerido pela relação entre números reais, se $a'.a = 1$ então $a' = 1/a$, e a' seria o inverso ou recíproco de a).

Valem também:

$$\mathbf{a}'.\,\mathbf{b} = \mathbf{a}'.\,\mathbf{c} = 0\,; \quad \mathbf{b}'.\,\mathbf{a} = \mathbf{b}'.\,\mathbf{c} = 0\,; \quad \mathbf{c}'.\,\mathbf{a} = \mathbf{c}'.\,\mathbf{b} = 0\,.$$

Suponha que os novos vetores $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$ sejam escritos em termos de coordenadas cartesianas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= a'_x\,\mathbf{i} + a'_y\,\mathbf{j} + a'_z\,\mathbf{k} \\ \mathbf{b}' &= b'_x\,\mathbf{i} + b'_y\,\mathbf{j} + b'_z\,\mathbf{k} \\ \mathbf{c}' &= c'_x\,\mathbf{i} + c'_y\,\mathbf{j} + c'_z\,\mathbf{k} \end{aligned}$$

Então, construímos com as componentes cartesianas desses três vetores a matriz Q,

$$Q = \begin{pmatrix} a'_x & a'_y & a'_z \\ b'_x & b'_y & b'_z \\ c'_x & c'_y & c'_z \end{pmatrix}\,.$$

É possível mostrar que essa matriz é tal que $PQ = QP = 1$, ou seja, $Q = P^{-1}$. Com isso,

$$\begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}\,.$$

Traduzindo esta última relação em palavras, a partir das componentes cartesianas v_x, v_y, v_z de um vetor qualquer $\mathbf{v}$, consegue-se achar as componentes desse vetor no sistema oblíquo **a**, **b**, **c**. Essas componentes v_a, v_b, v_c são chamadas de componentes contravariantes de **v**.

De outro lado, é possível também representar o vetor **v** no sistema de vetores da rede recíproca, isto é representá-lo na base $\{\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'\}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k} &= v'_a\,\mathbf{a}' + v'_b\,\mathbf{b}' + v'_c\,\mathbf{c}' \\ &= v'_a\,a'_x\,\mathbf{i} + v'_a\,a'_y\,\mathbf{j} + v'_a\,a'_z\,\mathbf{k} + \\ &\quad\; v'_b\,b'_x\,\mathbf{i} + v'_b\,b'_y\,\mathbf{j} + v'_b\,b'_z\,\mathbf{k} + \\ &\quad\; v'_c\,c'_x\,\mathbf{i} + v'_c\,c'_y\,\mathbf{j} + v'_c\,c'_z\,\mathbf{k} \end{aligned}$$

e comparando os coeficientes de cada um dos versores **i**, **j** e **k** entre a primeira linha e a última, vem:

$$\begin{cases} v_x = a'_x\, v'_a + b'_x\, v'_b + c'_x\, v'_c \\ v_y = a'_y\, v'_a + b'_y\, v'_b + c'_y\, v'_c \\ v_z = a'_z\, v'_a + b'_z\, v'_b + c'_z\, v'_c \end{cases}$$

ou

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_x & b'_x & c'_x \\ a'_y & b'_y & c'_y \\ a'_z & b'_z & c'_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_a \\ v'_b \\ v'_c \end{pmatrix}$$

relação essa que pode ser escrita:

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = Q^t \begin{pmatrix} v'_a \\ v'_b \\ v'_c \end{pmatrix} .$$

Essa expressão pode ser invertida,

$$\begin{pmatrix} v'_a \\ v'_b \\ v'_c \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

e, a partir das componentes cartesianas v_x, v_y, v_z de **v** constrói-se v'_a, v'_b, v'_c, que são componentes na base recíproca $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$, e que são chamadas componentes covariantes de **v**.

Mostraremos daqui a pouco, através de um exemplo numérico, que as componentes co e contravariantes de um vetor **v** são distintas, e isto está ligado ao fato de que havia um sistema de coordenadas não-ortogonal envolvido.

O produto escalar de dois vetores, usando a notação matricial, é dado por:

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \quad u \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ v \\ \\ \end{pmatrix} .$$

No sistema ortogonal x, y, z, isso se escreve:

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = (u_x\, u_y\, u_z) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = u_x\, v_x + u_y\, v_y + u_z\, v_z$$

Mas

$$(u_x\, u_y\, u_z) = \left[\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}\right]^t = \left[P \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{pmatrix}\right]^t = (u_a\, u_b\, u_c)\, P^t$$

onde foi usada, na última passagem a relação $(AB)^t = B^t\, A^t$ para matrizes.

Logo,

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = (\, u_a \;\, u_b \;\, u_c \,)\; P^t\, P \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix}$$

no sistema $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

Em particular, se um vetor de comprimento infinitesimal, $d\mathbf{R}$, tem componentes dR^1, dR^2 e dR^3 nesse sistema oblíquo, então

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\mathbf{R}.d\mathbf{R} = (dR^1\, dR^2\, dR^3)\, P^t\, P \begin{pmatrix} dR^1 \\ dR^2 \\ dR^3 \end{pmatrix} \\ &= (P^t\, P)_{ij}\, dR^i\, dR^j \end{aligned}$$

e, comparando com a relação de definição da métrica, que era:

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

achamos que

$$g = P^t\, P$$

(métrica do espaço real).

De forma análoga, obtém-se

$$g' = Q^t\, Q$$

como sendo a métrica do espaço recíproco, e para transformar componentes contravariantes em covariantes (isto é, para "abaixar índices") usamos a métrica $P^t P$,

$$\begin{pmatrix} v'_a \\ v'_b \\ v'_c \end{pmatrix} = P^t\, P \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix}$$

e, inversamente, para "elevar índices" usamos a métrica $Q^t Q$,

$$\begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix} = Q^t\, Q \begin{pmatrix} v'_a \\ v'_b \\ v'_c \end{pmatrix} .$$

Passemos ao exemplo numérico prometido.

Exemplo Considere os vetores linearmente independentes, mas não todos ortogonais entre si:

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}\,; \quad \mathbf{b} = \mathbf{j}\,; \quad \mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{2j} + \mathbf{3k}\,.$$

Com isso, a matriz de mudança de base entre o sistema oblíquo $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ e o sistema ortogonal $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ é:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e o produto misto dos três vetores do sistema oblíquo vale:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \,.\, \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\,.$$

Os vetores de base da rede recíproca são:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}' &= \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \times \mathbf{b} \,.\, \mathbf{c}} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{k} \\
\mathbf{b}' &= \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \times \mathbf{b} \,.\, \mathbf{c}} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k} \\
\mathbf{c}' &= \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \times \mathbf{b} \,.\, \mathbf{c}} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\mathbf{k}\,.
\end{aligned}$$

Construímos então a matriz Q, com as componentes de $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} .$$

É interessante que você calcule, da maneira usual, a inversa da matriz P, para conferir que $Q = P^{-1}$.

Considere o vetor $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Suas componentes <u>contravariantes</u> serão calculadas, em relação à base $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, através de:

$$\begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

e, por outro lado, as componentes <u>covariantes</u> nós as calcularemos com o auxílio de:

$$\begin{pmatrix} v'_a \\ v'_b \\ v'_c \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

Vemos, portanto, que as componentes co e contravariantes são distintas.

A métrica do espaço real é dada por:

$$P^t\, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 14 \end{pmatrix}$$

e ela, de fato, transforma componentes contravariantes em componentes covariantes:

$$\begin{pmatrix} v'_a \\ v'_b \\ v'_c \end{pmatrix} = P^t\, P \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

Também, para calcular o comprimento do vetor $\mathbf{v}$, usamos, em coordenadas cartesianas,

$$\mathrm{v} = \sqrt{|\mathbf{v}|^2} = \sqrt{\mathbf{v}\,.\,\mathbf{v}} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}\,,$$

e, no sistema oblíquo, calculamos:

$$\mathbf{v}\,.\,\mathbf{v} = v^i\, v_i = (\,2/3 \;\; 1/3 \;\; 1/3\,) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = 3\,,$$

ou seja, obtemos o mesmo valor $\mathrm{v} = \sqrt{3}$, consistente com o fato de que o comprimento do vetor (que é um escalar) é um invariante, não dependendo do sistema de coordenadas utilizado.

10.4 Operadores Diferenciais Vetoriais

Uma das vantagens da utilização dos tensores em física é o fato de implicarem em considerável "economia": as equações da física, quando escritas em termos tensoriais, tornam-se bastante compactas.

Com tensores, veja como é possível escrever o divergente do campo vetorial $\mathbf{A}$:

$$\text{div}\,\mathbf{A} = \nabla\,.\,\mathbf{A} = \frac{\partial\,A^i}{\partial\,x^i}\,;$$

o gradiente de um campo escalar Φ nós o representamos apenas por uma de suas componentes,

$$(\text{grad}\,\Phi)_i = (\nabla\,\Phi)_i = \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,x^i}\,.$$

Já vimos como escrever o produto escalar de dois vetores,

$$\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B} = A^i\,B_i\,,$$

mas para escrever o produto vetorial (e, posteriormente, o rotacional de um campo vetorial) precisamos definir, antes, o tensor de Levi-Civita,

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1\,, & \text{se } i,j,k \text{ forem iguais a } 1,2,3 \text{ ou } 3,1,2 \text{ ou } 2,3,1\,; \\ -1\,, & \text{se } i,j,k \text{ forem iguais a } 2,1,3 \text{ ou } 1,3,2 \text{ ou } 3,2,1\,; \\ 0\,, & \text{se houver pelo menos dois índices repetidos.} \end{cases}$$

Isto é, ϵ_{ijk} é igual a $+1$ se i,j,k assumirem (respectivamente) os valores $1,2,3$ ou uma permutação cíclica desses números; será -1 se assumirem os valores $2,1,3$ ou permutação cíclica desses; e será nulo quando houver alguma repetição de índices.

Nós chamamos ϵ de tensor de Levi-Civita; alguns autores chamam ϵ de "símbolo de Levi-Civita", mas o nome ainda mais adequado para ele é pseudo-tensor, pelo seguinte motivo. ϵ_{ijk} é um tensor com relação a rotações de coordenadas, porém se fizermos uma transformação trocando os sinais das coordenadas (isto é chamado "reflexão de eixos"),

$$x' = -x\,;\qquad y' = -y\,;\qquad z' = -z$$

então ϵ_{ijk} vai se transformar assim:

$$\epsilon_{i'j'k'} = -\epsilon_{ijk}\,\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}$$

(compare com a definição (b) de tensor). Um pseudo-tensor é, portanto, um tensor com relação a transformações de coordenadas exceto para reflexão de eixos, quando há uma troca de sinal.

Os vetores momento angular ($\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$), velocidade de rotação ($\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$) e torque ($\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$) são pseudo-tensores. Quando passamos de um sistema destrógiro (definido pela base usual $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) para um levógiro ($-\mathbf{i}, -\mathbf{j}, -\mathbf{k}$) esses vetores trocam de sinal.

Com o auxílio do tensor de Levi-Civita, escreve-se:

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_i = \epsilon_{ijk} \, A^j \, B^k \, .$$

De fato, isso funciona: veja por exemplo a componente x desse produto vetorial:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_1 &= \epsilon_{111} \, A^1 \, B^1 + \epsilon_{112} \, A^1 \, B^2 + \epsilon_{113} \, A^1 \, B^3 + \epsilon_{121} \, A^2 \, B^1 + \\ &\quad + \epsilon_{122} \, A^2 \, B^2 + \epsilon_{123} \, A^2 \, B^3 + \epsilon_{131} \, A^3 \, B^1 + \\ &\quad + \epsilon_{132} \, A^3 \, B^2 + \epsilon_{133} \, A^3 \, B^3 \\ &= A^2 \, B^3 - A^3 \, B^2 \, ; \end{aligned}$$

de modo similar, acha-se

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_2 = A^3 \, B^1 - A^1 \, B^3 \, , \qquad [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_3 = A^1 \, B^2 - A^2 \, B^1 \, .$$

Isso confere com o que costumamos calcular através do determinante simbólico:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A^1 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \end{vmatrix} \, .$$

Usando o pseudo-tensor de Levi-Civita, escreve-se o rotacional de um campo vetorial $\mathbf{A}$ como:

$$[\nabla \times \mathbf{A}]_i = \epsilon_{ijk} \, \frac{\partial}{\partial x_j} \, A_k \, .$$

Com a notação tensorial, fica fácil provar relações vetoriais envolvendo os operadores vetoriais gradiente, divergente e rotacional, como mostram os exemplos seguintes.

Exemplo Vamos mostrar que:

$$\nabla \, (\phi\psi) = \psi \, \nabla\phi + \phi \, \nabla\psi \, .$$

Escrevemos a expressão na forma tensorial para a componente genérica "i" do gradiente do produto:

$$\begin{aligned}
\left[\nabla\left(\phi\psi\right)\right]_i &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi\psi\right) = \phi\,\frac{\partial\psi}{\partial x_i} + \psi\,\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \\
&= \phi\left(\nabla\psi\right)_i + \psi\left(\nabla\phi\right)_i \\
&= \left[\phi\,\nabla\psi + \psi\,\nabla\phi\right]_i
\end{aligned}$$

e vemos que, para qualquer componente "i", a igualdade vale, logo vale a relação vetorial que queríamos provar.

Exemplo Em seguida, vamos mostrar que:

$$\nabla.\left(a\mathbf{F}\right) = a\,\nabla.\mathbf{F} + \mathbf{F}.\nabla a\,.$$

Escrevemos a expressão tensorial para o divergente do produto da função escalar a e do campo vetorial $\mathbf{F}$, e efetuamos a derivada para provar a relação:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(aF_i\right) = a\,\underbrace{\frac{\partial F_i}{\partial x_i}}_{\nabla.\mathbf{F}} + F_i\,\underbrace{\frac{\partial a}{\partial x_i}}_{(\nabla a)_i} = a\,\nabla.\mathbf{F} + \mathbf{F}.\nabla a\,.$$

Exemplo Mostraremos que:

$$\nabla\times\left(a\mathbf{F}\right) = a\,\nabla\times\mathbf{F} + \left(\nabla a\right)\times\mathbf{F}\,.$$

Escrevemos, para uma componente genérica:

$$\begin{aligned}
\left[\nabla\times\left(a\mathbf{F}\right)\right]_i &= \epsilon_{ijk}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(aF_k\right) = \epsilon_{ijk}\left[a\frac{\partial F_k}{\partial x_j} + \frac{\partial a}{\partial x_j}\,F_k\right] \\
&= a\,\underbrace{\epsilon_{ijk}\,\frac{\partial F_k}{\partial x_j}}_{(\nabla\times\mathbf{F})_i} + \epsilon_{ijk}\,\underbrace{\frac{\partial a}{\partial x_j}}_{(\nabla a)_j}\,F_k \\
&= a\,\left(\nabla\times\mathbf{F}\right)_i + \underbrace{\epsilon_{ijk}\,\left(\nabla a\right)_j\,F_k}_{[(\nabla a)\times\mathbf{F}]_i} \\
&= \left[a\,\nabla\times\mathbf{F} + \left(\nabla a\right)\times\mathbf{F}\right]_i
\end{aligned}$$

e como a igualdade vale para qualquer i, então está provada a relação vetorial.

Há muitas aplicações dos tensores, em várias áreas da física. Vamos fechar esta aula com uma aplicação de utilização dos tensores na mecânica clássica, mais especificamente, na descrição de rotações dos corpos rígidos.

O momento angular de uma partícula de massa m e velocidade $\mathbf{v}$, em relação ao ponto O (veja a figura 10.3), é dado por:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\,\mathbf{r} \times \mathbf{v}\,.$$

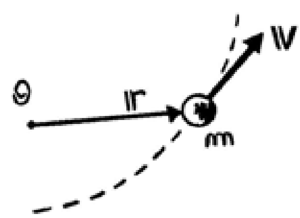

Figura 10.3: Uma partícula de massa m com momento $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

Já o momento angular de um cilindro oco de massa total M e raio R, que gira em torno do eixo z (que coincide com o eixo de simetria do cilindro) com velocidade angular ω é:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \int \mathbf{r} \times d\mathbf{p} = \int R\, dm\, v \,\mathrm{sen}\, 90^o\, \mathbf{k} \\ &= R\, v\, \mathbf{k} \int dm = M\, R^2\, \omega\, \mathbf{k}\,. \end{aligned}$$

(figuras 10.4 e 10.5).

Nesta expressão, usou-se $v = \omega R$.

A quantidade $I = M\,R^2$ é conhecida como momento de inércia do cilindro (com relação ao eixo z) e, neste caso,

$$\mathbf{L} = I\,\omega\mathbf{k} = I\,\boldsymbol{\omega}$$

onde $\boldsymbol{\omega}$ é o <u>vetor</u> velocidade angular (com direção e sentido dados pela regra da mão direita).

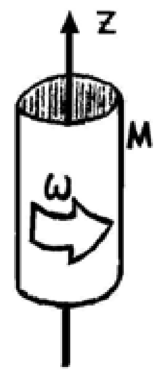

Figura 10.4: Uma casca cilíndrica girando ao redor de seu eixo de simetria.

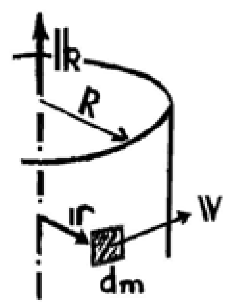

Figura 10.5: Divide-se a casca cilíndrica em pedacinhos de massa dm, para calcular o momento angular.

No entanto, se o cilindro gira em torno de outro eixo, por exemplo um eixo inclinado como mostra a figura 10.6, o cálculo pode ficar bem mais complicado; ainda assim, pode-se escrever:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \,.\, \boldsymbol{\omega}$$

onde agora $\mathbf{I}$ é um <u>tensor</u> de ordem dois (uma matriz), conhecido como o tensor momento de inércia.

Para um sólido qualquer girando em torno de qualquer eixo, escrevemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \int \mathbf{r} \times d\mathbf{p} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{v}\, dm = \int \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\, dm \\ &= \int \left[r^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} . \mathbf{r})\, \mathbf{r} \right] dm \end{aligned}$$

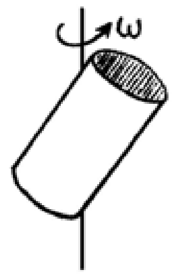

Figura 10.6: A casca cilíndrica girando ao redor de um eixo que não é um dos eixos de simetria.

sendo que nessa última passagem fizemos uso da identidade vetorial:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}.\mathbf{c})\ \mathbf{b} - (\mathbf{a}.\mathbf{b})\ \mathbf{c}\,.$$

Teremos, para a componente i de $\mathbf{L}$:

$$L_i = \int \left[r^2\,\omega_i - (\omega_j\,r_j)\ r_i\right]\ dm$$

$(i = 1, 2, 3)$.

Introduz-se, neste ponto, o tensor de inércia:

$$I_{ij} = \int \left[r^2\,\delta_{ij} - r_i\,r_j\right]\ dm\,,$$

e note que este tensor é simétrico, $I_{ij} = I_{ji}$.

Note que:

$$I_{ij}\,\omega_j = \int \left[r^2\ \underbrace{\delta_{ij}\,\omega_j}_{\omega_i} - r_i\,r_j\,\omega_j\right] dm = L_i\,.$$

Vale, então, a relação tensorial:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\,.\,\boldsymbol{\omega}$$

(é claro, a relação não deve ser confundida com um produto escalar de vetores, é preciso lembrar que $\mathbf{I}$ é um tensor de ordem dois).

Quando mostramos que $\mathbf{L} = I\,\boldsymbol{\omega}$ para um cilindro girando ao redor de seu eixo de simetria z, falamos num momento de inércia $I = M\,R^2$.

Essa é na realidade a componente I_{zz} (ou I_{33}) de $\mathbf{I}$; em geral,

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

e os termos I_{xy}, I_{xz}, I_{yx}, I_{yz}, I_{zx} e I_{zy} são chamados "produtos de inércia".

No caso do cilindro girando ao redor do seu eixo de simetria, $\mathbf{I}$ é diagonal,

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} ;$$

I_{xx}, I_{yy} e I_{zz} são os momentos principais de inércia, e os eixos são chamados "eixos principais de inércia", sendo usualmente denotados x_0, y_0, z_0.

Naturalmente, o eixo z_0 é um eixo de simetria, e a rotação ao redor dele se caracteriza por um momento angular L_z,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & M\,R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} .$$

Num caso mais geral de rotação do cilindro em relação a um eixo inclinado, $\mathbf{I}$ é não-diagonal, o que quer dizer que os produtos de inércia não serão todos nulos. Neste caso, pode-se pensar em fazer uma transformação de coordenadas, na realidade uma rotação de eixos, que leve o sistema de eixos x, y, z ao sistema x_0, y_0, z_0.

Matematicamente, achar tal transformação de coordenadas é equivalente a diagonalizar a matriz $\mathbf{I}$. Para isso, esta matriz deverá ser Hermiteana (ou simétrica). Achando autovalores e autovetores de $\mathbf{I}$, pode-se construir uma nova matriz $\mathbf{M}$, unitária ($\mathbf{M}^\dagger = \mathbf{M}^{-1}$), em que cada uma de suas colunas seja um dos autovetores de $\mathbf{I}$ (normalizados). Essa matriz $\mathbf{M}$ será a matriz de mudança de base! E teremos:

$$\mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{I}\,\mathbf{M} = \mathbf{I_0}$$

onde $\mathbf{I_0}$ é a matriz já diagonalizada.

Pensando inversamente: se soubermos construir uma matriz $\mathbf{I_0}$ para descrever uma rotação simples do cilindro, podemos construir a matriz $\mathbf{I}$ descrevendo a rotação em torno de um eixo inclinado qualquer, tudo o que precisaremos é da matriz (de rotação $\mathbf{M}$) ligando esse conjunto de três novos eixos ortogonais aos eixos originais x_0, y_0, z_0,

$$\mathbf{I} = \mathbf{M}\,\mathbf{I_0}\,\mathbf{M}^{-1}\,.$$

ATIVIDADES

1. Prove, com todos os detalhes, que

$$\begin{pmatrix} -xy & x^2 \\ -y^2 & xy \end{pmatrix}$$

é um tensor com relação a rotações.

2. Prove que

$$\begin{pmatrix} -xy & x^2 \\ -y^2 & xy \end{pmatrix}$$

não é um tensor sob rotações de coordenadas.

3. Usando os tensores métricos g_{ij} ou g^{ij}, mostre que:

   (a) $A^i\,B_i = A_i\,B^i$

   (b) $g^i_j = \delta^i_j$.

4. Mostre que

   (a) $\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{ijk} = 6$;

   (b) $\delta_{ij}\,\epsilon_{ijk} = 0$;

   (c) $\epsilon_{ipq}\,\epsilon_{jpq} = 2\delta_{ij}$.

5. Mostre, com o formalismo tensorial, que

$$\nabla.\,(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}.\,(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}.\,(\nabla\times\mathbf{B})\ .$$

6. Mostre, com o formalismo tensorial, que $\nabla\times\nabla\varphi = 0$.

7. Mostre, com o auxílio do formalismo tensorial, que

$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\nabla.\mathbf{B})\ \mathbf{A} - (\nabla.\mathbf{A})\ \mathbf{B} + (\mathbf{B}.\nabla)\ \mathbf{A} - (\mathbf{A}.\nabla)\ \mathbf{B}$$

(dica: $\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{pqk} = \delta_{ip}\,\delta jq - \delta_{iq}\,\delta jp$).

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

No problema 1, você deve proceder como no Exemplo na página 182, supondo que se trata de um tensor duas vezes covariante.
No problema 2, basta achar um contra-exemplo, ou seja, uma componente que não se transforme de acordo com a relação de definição de tensores, para provar que aquela matriz não corresponde a um tensor.
Dicas para o problema 4: você pode escrever as expressões em que há as somas, explicitamente, isto é, "i" variando de 1 a 3, "j" variando de 1 a 3, etc, e vendo quais termos se anulam (será que você precisará escrever $3 \times 3 \times 3$ possibilidades para ϵ? Lembre-se que se houver índices repetidos, o tensor de Levi-Civita se anula). No ítem (c), você pode usar a mesma dica do problema 7.

CONCLUSÃO

Os tensores fornecem uma notação bastante compacta e eficiente para uso na física teórica. Além disso, suas propriedades de invariância sob certas transformações de coordenadas habilitam seu emprego na formulação de leis, possuindo uma validade mais ampla.

RESUMO

Nesta aula você teve um primeiro contato com os conceitos básicos e propriedades dos tensores, assim como viu algumas aplicações dessa ferramenta em física. Em particular, aprendeu a manipular a notação tensorial aplicada aos operadores vetoriais gradiente, divergente e rotacional, que encontram farta aplicação, por exemplo na teoria do eletromagnetismo.

REFERÊNCIAS

ARFKEN, George; WEBER, Hans. Física Matemática. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
BUTKOV, Eugene. Física Matemática. Rio de Janeiro: Guanabara 2, 1978.