UNIDADE 3

Regime de Juros Compostos

Objetivos Específicos de Aprendizagem

Ao finalizar esta Unidade, você deverá ser capaz de:

- Conhecer a modelagem matemática do regime de capitalização composta;
- Identificar taxas de juros nominais e efetivas;
- Conhecer as modelagens básicas do desconto composto; e
- Compreender a equivalência de capitais no regime de capitalização composta.

Regime de Juros Compostos

Prezado estudante,

Esta Unidade lhe apresentará a modelagem do regime de juros compostos, os conceitos de proporcionalidade e equivalência de taxas de juros, as bases das operações de desconto de títulos e os conceitos de equivalência de capitais nesse regime de juros.

Para facilitar seu aprendizado nesta Unidade, você deve ter o domínio sobre os conteúdos já vistos nas Unidades 1 e 2.

Bons estudos!

Apresentamos a você o conceito de capitalização composta por meio da **Situação prática** proposta a seguir.

Situação prática 3.1

Em 01/03/X0 uma prefeitura toma um empréstimo com valor inicial de $ 100,00 e taxa de juros de 10% aa (ao ano) para ser pago integralmente, de uma só vez, em cinco anos (X5), ao final da operação, em regime de juros compostos. Quais os valores de juros e de saldos devedores envolvidos nessa operação?

Em regime de juros compostos, o juro gerado ao final de cada período de incidência é somado ao saldo devedor do início do período para gerar o saldo devedor do início do período subsequente, que é uma nova base de cálculo para o juro; a esse processo de agregação do juro devido em cada período ao saldo devedor para constituir nova base de cálculo do juro, dá-se o nome de capitalização de juros. Observe que a base de cálculo do juro muda sucessivamente pela agregação do juro do período anterior.

A fórmula para cálculo do juro é modificada e se transforma em:

$$i = \frac{J_k}{SDi_k} \text{ ou } J_k = SDi_k * i$$

Assim, em cada período (k), a base de cálculo será SDi_k – saldo inicial de período (k) – que apenas coincide com o capital (C) no primeiro período conforme podemos ver na Tabela 2.

Tabela 2: Regime de juros compostos

Data (ano)	Período		Capital (C)	Base de cálculo (SDi_k)	Juros ($J_k = SDi_k$ *i)	$SDf_k = SDi_k + J_k$
	Ordem	Início/Fim				
01/03/X1	1	X0 – X1	100	100,00	100,00*0,10 = 10,00	110,00
01/03/X2	2	X1 – X2		110,00	110,00*0,10 = 11,00	121,00
01/03/X3	3	X2 – X3		121,00	121,00*0,10 = 12,10	133,10
01/03/X4	4	X3 – X4		133,10	133,10*0,10 = 13,31	146,41
01/03/X5	5	X4 – X5		146,41	146,41 *0,10 = 14,64	161,05

SDi_k: saldo no início do período SDf_k: saldo no final do período
Observe que o saldo inicial de um período é igual ao saldo final do período anterior.

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Em regime de juros compostos, a base de cálculo do juro (SDi_k) se altera período a período pela capitalização do juro do período anterior.

A **capitalização*** (agregação dos juros intermediários ao capital) dos juros intermediários é a responsável pela diferença de valores que se têm nos resultados finais obtidos em sistemas de juros simples e de juros compostos.

***Capitalização** – é a agregação do juro (J_k) gerado em um período (k) ao saldo inicial desse período (SDi_k) gerando um novo saldo inicial para o período seguinte ($SDf_k = SDi_{k+1}$) que será a base para o cálculo do juro no período (k+1). Fonte: Elaborado pelo autor deste livro.

Fórmulas Básicas

Nesta parte da Unidade, você analisará os problemas de:

- capitalização dos valores financeiros em regime de juros compostos, isto é, do crescimento desses valores com o tempo; e

- desconto de valores financeiros futuros, ou seja, a diminuição dos valores futuros quando trazidos para valores presentes.

Montante

Primeiramente, você vai se apropriar da fórmula relativa à capitalização de valores financeiros no tempo pela generalização da **Situação prática 3.1** mostrada. Suponha um valor financeiro presente (C) aplicado durante **n** períodos a uma taxa de juros periódica (i_p). Essa aplicação gera um montante (M), ao final da aplicação, cujo valor se deseja conhecer.

Essa fórmula, mostrada a seguir, deduzida por indução finita, resulta em:

$$M = C * (1 + i_p)^n \qquad (3.1)$$

Leia o texto *Dedução da fórmula do montante – recorrência algébrica* disponível em: <http://www.proativams.com.br/files_aberto/Leiturascomplementares3.doc>. Acesso em: 27 jul. 2011.

Capital, ou Valor Presente

O problema inverso ao da capitalização (determinação do montante) é o desconto, ou seja, dado um determinado montante (M) conhecido, qual seria o valor do capital (C) a ele equivalente para uma taxa de juros (i) e para o tempo a decorrer (n) até o final da operação, expresso em períodos? A resposta é imediata e decorre de (3.1):

$$C = \frac{M}{(1+i)^n} \qquad (3.2)$$

A dificuldade de cálculo inerente a essas fórmulas é a operação de potenciação $(1+i)^n$ que pode exigir o uso de calculadoras. Entretanto, a expressão entre parênteses depende apenas do par **[i%;n]** – taxa de juros e número de períodos de capitalização – e pode ser tabulada para vários desses pares, simplificando assim as operações de cálculo.

As expressões $\mathbf{[1 + i]^n}$ e $\mathbf{[1 + i]^{-n}}$, pela frequência com que são utilizadas, recebem denominações específicas, diferentes de autor para autor. Neste livro adotaremos as denominações:

$[1+i]^n$: Fator de Valor Futuro: $FVF_{[i\%;n]}$

$[1+i]^{-n}$: Fator de Valor Presente: $FVP_{[i\%;n]}$

A expressão [i%;n] indica a taxa de juros e o período a que se refere o fator.

Assim, você pode escrever as expressões (3.1) e (3.2) da seguinte maneira:

$$M = C*FVF_{[i\%;n]} \qquad (3.3)$$

$$C = M*FVP_{[i\%;n]} \qquad (3.4)$$

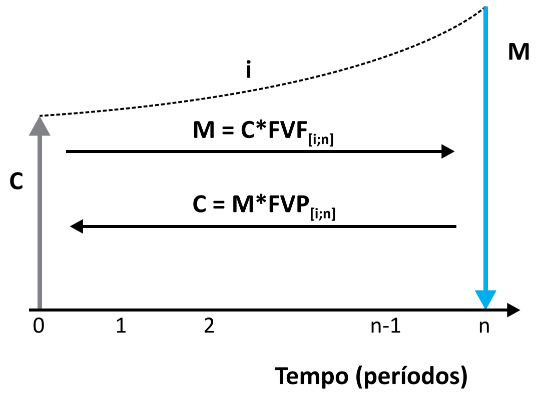

Figura 14: Fatores de cálculo
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Os valores de FVF e FVP podem ser vistos em tabelas financeiras para vários pares [i%;n].

A solução desses problemas pode ser visualizada na Figura 14, na qual consideramos n como variável contínua.

Capitalização e Descontos

A partir deste ponto, vamos adotar a nomenclatura das calculadoras financeiras por serem expressões consagradas:

- PV – valor presente em vez de capital; e
- FV– valor futuro em vez de montante.

Os problemas de capitalização e de descontos podem ser reduzidos a dois grupos específicos:

- conhecido o par [i%;n] e PV (ou FV), calcular FV (ou PV); e
- conhecido apenas um dos elementos do par [i%;n]. Então, conhecidos i% (ou n), FV e PV, calcular n (ou i).

Os problemas do primeiro grupo podem ser facilmente solucionados com o uso de calculadoras ou de tabelas financeiras, uma vez que conhecem: $FVF_{[i\%;n]}$ e $FVP_{[i\%;n]}$.

Os problemas do segundo grupo demandam soluções de aproximação na ausência de calculadoras com funções exponenciais. Seguem alguns exemplos numéricos representativos dos quatro tipos de problemas apontados.

Você pode se familiarizar com o uso de tabelas financeiras assistindo ao filme *Manipulando Tabelas Financeiras* disponível em: <http://www.proativams.com.br/index.php?modulo=videos&arquivo_file=TABFIN1.wmv>. Acesso em: 27 jul. 2011. Também pode fazer o *download* dessas mesmas tabelas em: <http://www.proativams.com.br/files_aberto/TabelasFinanceiras.pdf>. Acesso em: 27 jul. 2011.

Exemplo 3.1

Calcular o montante de um capital de \$ 1.000,00 aplicado por seis meses a uma taxa de juros de 3% am sabendo-se que a capitalização é mensal.

Sumário de dados: PV = \$ 1.000,00, n = 6 m, i = 3% am, FV= ?

Solução

a) Problema do grupo 1 – solução algébrica: aplique a fórmula (3.1):

$$FV = PV * (1 + i)^n$$

Substituindo os dados, você tem:

$FV = 1.000 * (1 + 0{,}03)^6 = 1.000 * 1{,}19405$

$FV = \$\ 1.194{,}05$

b) As tabelas financeiras apontam para $FVF_{[3\%;6]} = 1{,}1941$, portanto, utilizando a fórmula (3.3), você tem:

$$FV = PV * FVF_{[3\%;6]} = 1.000{,}00*1.1941{,}00 = \$\ 1.194{,}10$$

A diferença entre as duas soluções decorre do arredondamento do fator FVF.

Exemplo 3.2

Qual o valor de um capital que aplicado por 6 meses a uma taxa de juros de 3% am com capitalização mensal rendeu um montante de \$ 1.000,00 ?

Sumário de dados: PV= ?, n = 6 m, i = 3% am, FV = \$ 1.000,00

Solução

a) Problema do tipo 1 – solução algébrica: aplique a fórmula (3.2):

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n} = \frac{1.000}{(1+0{,}03)^6} = 1.000 * 0{,}83748 =$$

$$PV = \$\ 837{,}48$$

b) Procure o fator FVP em tabelas financeiras: $FVP_{[3\%;6]}$ = 0,8375 que substituído na expressão (3.4) resulta em:

$$PV = 1.000,00*0,8375 = \$ \ 837,50$$

A diferença entre as duas respostas decorre do arredondamento do fator FVP.

Em *Leituras Complementares 3* leia os textos: *Determinando o fator FVP a partir de tabelas* e *Juros compostos – exemplos* disponíveis em: <http://www.proativams.com.br/files_aberto/Leiturascomplementares3.doc>. Acesso em: 27 jul. 2011. A capitalização de juros pode se dar nos modos: contínuo ou discreto. No mundo das finanças se adota o modelo de formação discreta da taxa de juros. Para saber um pouco mais sobre esse assunto, faça a leitura complementar *LC22* em: <http://www.proativams.com.br/files_aberto/LC22.doc>. Acesso em: 27 jul. 2011.

Atividades de aprendizagem

Para verificar se você entendeu os conceitos apresentados, realize as atividades propostas a seguir:

1. Determine o montante de um capital de $ 1.000,00 aplicado durante cinco anos a uma taxa de juros de 3% aa. Qual o juro total produzido no período?
2. Um capital aplicado por quatro anos rendeu juro total igual a 50% do capital inicial. Determine a taxa de juros compostos dessa operação utilizando o método algébrico e as tabelas financeiras.
3. Qual o capital que aplicado por quatro anos a uma taxa de juros de 2% aa produz um montante de $ 5.000,00?
4. Um capital de $ 2.000,00 aplicado por cinco anos produziu um montante de $ 2.318,54. Qual a taxa de juros considerada? Resolva a atividade utilizando o método algébrico e as tabelas financeiras.
5. Um capital de $ 5.000,00 aplicado a uma taxa de juros de 4% aa produziu um montante de $ 5.624,32. Qual o prazo dessa operação? Resolva a atividade utilizando o método algébrico e as tabelas financeiras.

Taxas de Juros em Regime de Juros Compostos

Você se lembra de ter visto na Unidade 2, quando estudamos o regime de juros simples, que as taxas de juros proporcionais são também equivalentes?

No regime de juros compostos isso não é verdade; observe o exemplo a seguir:

Duas taxas de juros são equivalentes quando, ao serem aplicadas ao mesmo capital e pelo mesmo prazo, geram montantes iguais.

Exemplo 3.3

Qual o montante gerado por um capital de $ 1.000,00 aplicado em 12 meses a uma taxa de juros de 12% aa?

Sumário de dados: PV = $ 1.000,00, n = 12 m, i = 12% aa, FV = ?

Solução

Se você refletir um pouco sobre os dados, vai verificar que existem ao menos duas possibilidades de interpretação para a taxa de juros:

a) Capitalização anual e taxa de juros anual.
b) Capitalização mensal e taxa de juros mensal proporcional à taxa anual dada.

Essas interpretações distintas irão gerar valores diferentes para o de FV.

Possibilidade 1

Você aceitou que a capitalização dos juros é anual e que a taxa de juros de entrada é 12% aa. Esses dados, com o auxílio da fórmula (3.1), conduzem ao seguinte montante segundo o cálculo algébrico:

$$FV_1 = PV * (1 + i)^n = 1.000 * (1 + 0{,}12)^1 = \$ \ 1.120{,}00$$

Possibilidade 2

Você aceitou que a capitalização dos juros é mensal e que a taxa de juros mensal (i_m) é a taxa proporcional à taxa anual de juros dada, portanto:

$$i_m = \text{taxa mensal proporcional} = 12/12 = 1\% \text{ am}$$

Nesse caso, utilizando a fórmula (3.1) algebricamente, você chegará a:

$$FV_2 = PV * (1 + i)^n = 1.000 * (1 + 0{,}01)^{12} = \$ \ 1.126{,}82$$

Você pode constatar agora que os montantes gerados pelas duas alternativas de cálculo FV_1 e FV_2 são diferentes. Isso significa que as taxas de juros de 1% am com capitalização mensal e de 12% aa com capitalização anual, apesar de serem proporcionais, não são equivalentes, pois geram montantes diferentes em tempos iguais.

Então você se pergunta: o que ocorreu? Acompanhe!

A resposta é que o **Exemplo 3.3** formulou imprecisamente a taxa de juros e ensejou essa dupla interpretação. A taxa de juros em regime de juros compostos precisa ser definida com clareza e precisão.

Em regime de juros compostos, as taxas de juros proporcionais não são equivalentes. Em consequência, o primeiro passo para se trabalhar em regime de juros compostos é compatibilizar taxas de juros e períodos de capitalização.

Taxa de Juros Efetiva

Uma taxa de juros é definida ou entendida como uma taxa de juros efetiva quando ela estiver expressa em unidade de tempo igual à unidade de tempo do período de capitalização.

Assim, são taxas efetivas de juros: 1% am com capitalização mensal, 3% at com capitalização trimestral, 6% as com capitalização semestral e 9% aa com capitalização anual.

Taxa de Juros Nominal

Uma taxa de juros é definida ou entendida como uma taxa de juros nominal quando o período de capitalização dos juros for menor do que a unidade da expressão temporal da taxa de juros.

Assim, são taxas nominais de juros: 36% aa com capitalização trimestral, 10% at com capitalização mensal e 10% as com capitalização bimensal.

Em regime de juros compostos, as taxas de juros constantes das fórmulas são taxas efetivas, isto é, essas taxas devem estar expressas em unidade de tempo coincidente com a unidade de tempo do período de capitalização. Portanto, em regime de juros compostos, é necessário o conhecimento das taxas de juros efetivas, o que exige a explicitação do período de capitalização.

Taxas de Juros Equivalentes

Conforme você viu em regime de juros simples, duas taxas de juros são ditas equivalentes quando, ao serem aplicadas ao mesmo capital e pelo mesmo prazo, geram o mesmo montante. Para relacionar de modo sistemático essas equivalências, considere as seguintes nomenclaturas:

- i_a – taxa de juros anual;
- i_s – taxa de juros semestral;
- i_t – taxa de juros trimestral;
- i_m – taxa de juros mensal; e
- i_d – taxa de juros diária.

Se você determinar os montantes gerados por um capital unitário (PV = 1) no período de um ano, considerando cada uma das taxas anteriores como efetivas, chegará às seguintes relações de equivalência:

$$(1 + i_a)^1 = (1 + i_s)^2 = (1 + i_t)^4 = (1 + i_m)^{12} = (1 + i_d)^{360} \qquad (3.5)$$

Leia *Relações de equivalência entre taxas de juros* disponível em: <http://www.proativams.com.br/files_aberto/Leiturascomplementares3.doc>. Acesso em: 27 jul. 2011.

A expressão (3.5) permite transformar taxas de juros efetivas de uma temporalidade para outra.

Exemplo 3.4

Calcule i_d e i_m equivalentes a 45% aa.

Solução

A partir da expressão (3.5):

a) Para taxa diária equivalente (tomando a parte da fórmula que interessa):

$$(1 + i_a)^1 = (1 + i_d)^{360}$$
$$i_d = (1 + i_a)^{1/360} - 1$$
$$i_d = (1 + 0{,}45)^{1/360} - 1$$
$$i_d = 0{,}00103 \text{ ad ou } 0{,}103\% \text{ ad}$$

b) Para taxa mensal equivalente:

$$(1 + i_a)^1 = (1 + i_m)^{12}$$
$$i_m = (1 + i_a)^{1/12} - 1$$
$$i_m = (1 + 0{,}45)^{1/12} - 1$$
$$i_m = 0{,}0314 \text{ am ou } 3{,}14\% \text{ am}$$

O mercado financeiro costuma divulgar suas taxas de juros em bases anuais nominais; nesses casos, a taxa efetiva de juros é a taxa proporcional calculada pela proporcionalidade i_a/k, sendo k o número de capitalizações de juros que irão ocorrer no ano.

Até este ponto, você estudou a modelagem básica do regime de capitalização composta, tomou contato com suas fórmulas básicas e, sobretudo, estudou a diferença existente entre taxas de juros proporcionais e equivalentes. Antes de avançar seus estudos, resolva as atividades propostas para apoiá-lo na sedimentação do conhecimento adquirido.

Atividades de aprendizagem

O exposto até aqui ficou claro? Para certificar-se, resolva as atividades propostas.

6. Determine as taxas diária, mensal, trimestral e semestral proporcionais e equivalentes a 36% aa. Compare os valores obtidos.
7. Determine a taxa de juros que aplicada a um capital durante cinco anos, com capitalização trimestral, produz um montante 60% superior ao capital? Dica: um ano tem quatro trimestres.
8. Considere o resultado da questão sete e determine a taxa de juros anual nominal daquela operação.
9. Quanto você deve aplicar em um fundo de investimento que promete uma taxa de juros de 6% aa, com capitalização mensal, para obter $ 10.000,00 ao final de cinco anos?
10. Qual o montante produzido por um capital de $ 1.000,00 aplicado durante três anos e quatro meses à taxa efetiva de 12% aa? Utilize a convenção linear para o período não inteiro. Dica: quando o período de tempo não é inteiro (três anos e quatro meses) a convenção linear manda você calcular o juro referente à parte não inteira em regime de juros simples. Assim, você aplica o critério composto para três anos, e o critério de juros simples para quatro meses.
11. Qual o montante produzido por um capital de $ 1.000,00 aplicado durante três anos e quatro meses à taxa efetiva de 12% aa? Utilize a convenção exponencial para o período não inteiro. Dica: quando o período de tempo não é inteiro (três anos e quatro meses) a convenção exponencial manda você calcular o juro referente à parte não inteira em regime de juros compostos. Assim, você aplica o critério composto para todo o período de três anos e quatro meses.

As atividades 10 e 11 evidenciam que, para períodos fracionários (menores que o período de capitalização), o juro gerado pela convenção linear é maior que o juro gerado pela convenção exponencial.

Desconto em Juros Compostos

Em juros compostos, utilizamos mais frequentemente o modelo de desconto racional, isto é, aquele em que a base de cálculo dos juros é o valor presente (PV). Vamos conferir esse modelo?

Desconto Racional, ou Desconto Real

Para o estudo do desconto racional em juros compostos, ilustrado na Figura 15, você se valerá da seguinte nomenclatura:

- PV – valor presente;
- FV – valor futuro;
- i – taxa de juros efetiva;
- D_r – desconto racional; e
- n – número de períodos.

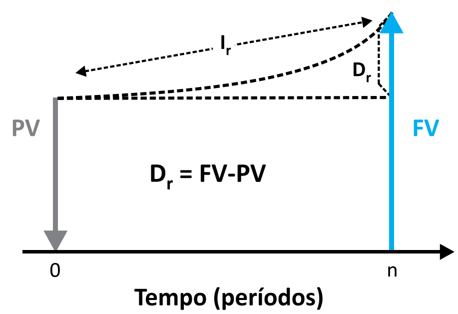

Figura 15: Modelo de desconto em juros compostos

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Considerando-se a definição geral de desconto (D):

$$D = FV - PV$$

no desconto racional, a base de cálculo do juro é o PV e, portanto, vale a fórmula (3.1), na qual se substituiu C por PV e M por FV:

$$FV = PV * (1 + i)^n$$

Com essas duas considerações, podemos demonstrar que:

$$D_r = PV * [(1 + i)^n - 1] \qquad (3.6)$$

e

$$D_r = FV * \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n} \qquad (3.7)$$

As fórmulas (3.6) e (3.7) são expressões do desconto racional composto a partir de PV e de FV.

Observe que, como em regime de juros simples, $D_r = J$.

A própria definição de desconto racional composto mostra que o valor descontado, ou valor presente, do título é:

$$PV = FV * \frac{1}{(1+i)^n} = FV * FVP_{[i\%;\, n]} \qquad (3.8)$$

Assim, aplicamos em desconto composto todas as fórmulas vistas para o regime de capitalização composta.

O desconto composto também pode ser feito no modelo comercial. Para saber como fazê-lo, leia o texto *Desconto comercial em regime de juros compostos* acessando: <http://www.proativams.com.br/files_aberto/LC23.doc>. Acesso em: 27 jul. 2011. E assista a dois vídeos sobre logaritmos em: <http://br.youtube.com/watch?v=ELy7nXpgYYw> e <http://br.youtube.com/watch?v=ca18qhF71N8&feature=related>. Acesso em: 27 jul. 2011.

As atividades propostas, a seguir, pretendem ajudá-lo a internalizar os conteúdos estudados até este ponto, dando ênfase às operações de desconto.

Atividades de aprendizagem

Hora de testar seus conhecimentos. Você está pronto? Responda, a seguir, às atividades.

12. Aplica-se um determinado capital à taxa de 24% aa, com capitalizações mensais, obtendo-se um montante de $ 12.900,00 ao final de quatro anos. Qual a taxa efetiva anual? Qual o valor do capital?
13. Um título de valor nominal $ 10.000,00 foi descontado a uma taxa efetiva de 12% aa e gerou um desconto de $ 1.563,30. Determine o prazo desse título.
14. Um capital de $ 10.000,00 foi aplicado por 10 anos rendendo juros de 12% aa nos primeiros cinco anos e de 18% aa nos anos subsequentes. Determine o valor do montante nas seguintes condições:
    a) Os juros são capitalizados até o final.
    b) Os juros correspondentes aos primeiros cinco anos são pagos ao final desse tempo.

Valor Presente de um Fluxo de Caixa

O conceito de valor presente de um fluxo de caixa é exatamente o mesmo que você aprendeu em regime de juros simples, ou seja: o valor presente de um fluxo de caixa é a soma algébrica dos valores presentes de cada parcela do fluxo de caixa para uma dada taxa de juros.

O exemplo, a seguir, ilustra esse conceito.

Exemplo 3.5

Um contribuinte tem os seguintes débitos inscritos na prefeitura de sua cidade: uma parcela de $ 10.000,00 vencível em 30 dias, uma segunda parcela de $ 10.000,00 vencível em 60 dias e uma última parcela de $ 15.000,00 vencível em 90 dias. Que valor a prefeitura deverá cobrar se esse contribuinte desejar pagar à vista esses débitos? Em outras palavras, qual o valor à vista da dívida equivalente às três parcelas?

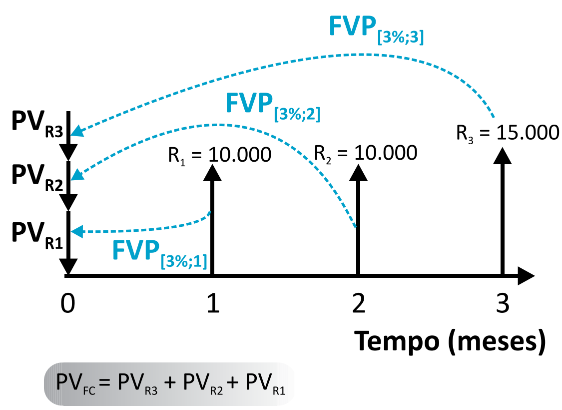

Figura 16: Valor presente de um fluxo de caixa
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

O problema pode ser visualizado na Figura 16, que mostra os valores das parcelas e o seu desconto para a data da operação de pagamento (data focal zero).

Para calcular o valor presente do fluxo de caixa (PV_{FC}), você deve descontar cada uma das parcelas do fluxo de caixa para a data presente (data focal zero) a uma determinada taxa de juros (a vigente no mercado, por exemplo) e somar algebricamente esses resultados. Os cálculos podem ser conduzidos algebricamente ou com a utilização de tabelas financeiras e o fator $FVP_{[i\%;n]}$.

Agora, imagine i = 3% am como a taxa efetiva vigente no mercado. O valor presente, ou valor descontado, de cada uma das parcelas será:

$$PV_{R1} = R_1 * FVP_{[3\%;1]} = \frac{R_1}{(1+0,03)^1}$$

$$PV_{R1} = \frac{10.000}{(1+0,03)^1} = 10.000 * 0,97087 = \$\,9.708,70$$

$$PV_{R2} = R_2 * FVP_{[3\%;2]} = \frac{P_2}{(1+0,03)^2}$$

$$PV_{R2} = \frac{10.000}{(1+0,03)^2} = 10.000 * 0,94260 = \$\,9.426,00$$

$$PV_{R3} = R_3 * FVP_{[3\%;3]} = \frac{R_3}{(1+0,03)^3}$$

$$PV_{R3} = \frac{15.000}{(1+0,03)^3} = 15.000 * 0,91514 = \$\,13.727,12$$

$$PV_{FC} = PV_{R1} + PV_{R2} + PV_{R3}$$

$$PV_{FC} = 9.708,70 + 9.426,00 + 13.727,12 = \$\ 32.861,82$$

Nesse exemplo, o contribuinte devedor de um valor nominal de \$ 35.000,00 deveria pagar à vista o valor de \$ 32.861,82 com base em uma taxa de juros efetiva de 3% am; esse valor é o valor presente do fluxo de caixa (PV_{FC}) do **Exemplo 3.5** para essa taxa de juros.

Como o valor presente de um fluxo de caixa é resultado de um conjunto de operações de desconto, é imediata a conclusão de que: quanto maior for a taxa de juros, tanto menor será o valor presente do fluxo de caixa e, consequentemente, maior o "desconto" exigido na operação.

Taxa Interna de Retorno de um Fluxo de Caixa

O conceito de taxa interna de retorno também é muito importante em análise de investimentos, por isso precisa ser bem entendido. A Taxa Interna de Retorno (TIR ou IRR) é definida como a taxa de juros que torna nulo o valor presente de um fluxo de caixa. Reportando-nos a um fluxo de caixa genérico com uma saída inicial SC_0 e uma sucessão de entradas de caixa PMT_1, PMT_2, ..., PMT_n, o valor presente do fluxo de caixa é dado por:

IRR – é a sigla de Internal Rate of Return, que é a denominação da TIR em inglês. É utilizada para familiarizá-lo com a linguagem das calculadoras financeiras.

$$VP_{FC} = \frac{PMT_1}{(1+i)^1} + \frac{PMT_2}{(1+i)^2} + ... + \frac{PMT_{n-1}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{PMT_n}{(1+i)^n} - SC_0$$

A taxa interna de retorno é a raiz dessa equação, e seu cálculo é, usualmente, feito com o auxílio de calculadoras financeiras ou planilhas eletrônicas; na ausência destas, podemos utilizar métodos de aproximação.

Tanto o valor presente quanto a taxa interna de retorno de fluxos de caixa serão estudados mais detalhadamente na Unidade 6 deste livro.

Exemplo 3.6

Calcule a taxa interna de retorno para o seguinte fluxo de caixa: SC_0 = $ 1.000,00; PMT_1 = $ 400,00; PMT_2 = $ 400,00; PMT_3 = $ 400,00 com períodos em meses.

Sumário de dados: SC_0 = $ 1.000,00; PMT_1 = $ 400,00; PMT_2 = $ 400,00; PMT_3 = $ 400,00, IRR = ?

Solução

Aplique a definição de TIR:

$$\frac{PMT_1}{(1+i)} + \frac{PMT_2}{(1+i)^2} + \frac{PMT_3}{(1+i)^3} = SC_0$$

Substituindo os valores dados no enunciado, você tem:

$$\frac{400}{(1+i)}+\frac{400}{(1+i)^2}+\frac{400}{(1+i)^3}=\$\ 1.000$$

A solução dessa equação resulta em 9,70% am, que é a TIR (IRR) desse fluxo de caixa e sua solução pode ser encontrada com o uso de calculadoras financeiras ou de planilhas eletrônicas.

Equivalência de Fluxos de Caixa

Você se lembra da definição de equivalência de fluxos de caixa em regime de juros simples? Em regime de juros compostos a definição é idêntica: diz-se que dois fluxos de caixa são equivalentes para uma dada taxa de juros quando os seus valores presentes, calculados para aquela taxa de juros, são iguais.

Considere dois fluxos de caixa genéricos (FC_1 e FC_2) com entradas de caixa representadas, respectivamente, por $PMT_{1,1}$, $PMT_{1,2}$......, $PMT_{1,n}$,......., $PMT_{1,m}$ e $PMT_{2,1}$, $PMT_{2,2}$,.....,$PMT_{2,n}$; com n<m e que se encontram representados na Figura 17. Observe que os índices dos PMT's têm o seguinte significado: o primeiro deles identifica o fluxo de caixa (1 e/ou 2) e o segundo deles representa o período em que ocorre a entrada de caixa.

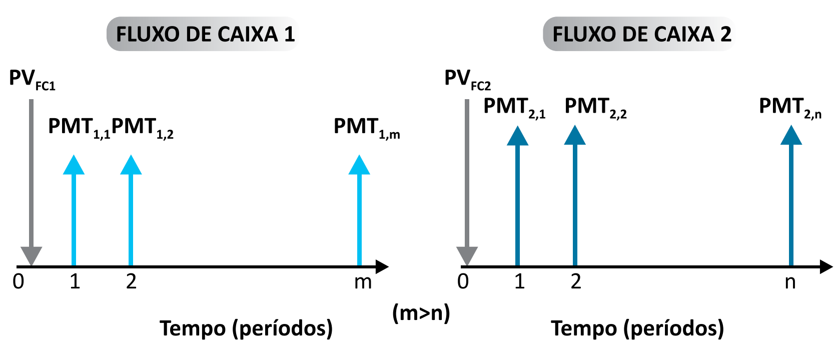

Figura 17: Equivalência de fluxos de caixa
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Esses dois fluxos de caixa serão equivalentes quando os seus valores presentes forem iguais para uma dada taxa de juros, isto é, quando:

$$PV_{FC1} = PV_{FC2}$$

Utilizando o critério de desconto racional composto, temos:

$$PV_{FC1} = \frac{PMT_{1,m}}{(1+i)^1} + \frac{PMT_{2,m}}{(1+i)^2} + ... + \frac{PMT_{m,m}}{(1+i)^m} \quad \text{e,}$$

$$PV_{FC2} = \frac{PMT_{1,n}}{(1+i)^1} + \frac{PMT_{2,n}}{(1+i)^2} + ... + \frac{PMT_{n,n}}{(1+i)^n}$$

E esses valores devem ser iguais para uma dada taxa de juros.

Exemplo 3.7

Considere o fluxo de caixa, a seguir, e determine seu valor presente considerando a taxa de juros efetiva de 3% am.

Solução

Período	Fluxo de caixa ($)	PMT_j
1	412,00	PMT_1
2	318,28	PMT_2
3	327,81	PMT_3

A partir da definição de valor atual de fluxo de caixa, escreva:

$$PV_{FC} = PVP_{MT1} + PV_{PMT2} + PV_{PMT3} =$$

E, com a utilização da fórmula (3.2), você tem:

$$PV_{FC} = \frac{PMT_1}{(1+i)^1} + \frac{PMT_2}{(1+i)^2} + \frac{PMT_3}{(1+i)^3} = \frac{412}{(1+0{,}03)^1} + \frac{318{,}28}{(1+0{,}03)^2} + \frac{327{,}81}{(1+0{,}03)^3} =$$

$PV_{FC} = 412{,}00 * 0{,}97087 + 318{,}28 * 0{,}94260 + 327{,}81 * 0{,}91514$

$PV_{FC} = \$\ 1.000{,}00$

Exemplo 3.8

Considere o fluxo de caixa, a seguir, e determine o seu valor presente considerando uma taxa de juros efetiva de 3% am.

Solução

Período	Fluxo de caixa ($)	PMT_k
1	309,00	PMT_1
2	318,28	PMT_2
3	437,09	PMT_3

A partir da definição de valor presente de fluxo de caixa, escreva:

$$PV_{FC} = PVP_{MT1} + PV_{PMT2} + PV_{PMT3} =$$

E, com a utilização da fórmula (3.2), você tem:

$$PV_{FC} = \frac{PMT_1}{(1+i)^1} + \frac{PMT_2}{(1+i)^2} + \frac{PMT_3}{(1+i)^3} = \frac{309}{(1+0{,}03)^1} + \frac{318{,}28}{(1+0{,}03)^2} + \frac{437{,}09}{(1+0{,}03)^3} =$$

$$PV_{FC} = 309{,}00 * 0{,}97087 + 318{,}28 * 0{,}94260 + 437{,}09 * 0{,}91514$$

$$PV_{FC} = \$\ 1.000{,}00$$

Esse valor pode ser determinado a partir de tabelas financeiras conjugadas com a fórmula (3.4) ou com o uso de calculadoras.

Você observou que os **Exemplos 3.7** e **3.8** se reportam a dois fluxos de caixa diferentes? Observou mais, que os valores presentes desses dois fluxos de caixa são iguais para a taxa de juros de 3% am? Então você pode concluir: os fluxos de caixa mostrados nos **Exemplos 3.7** e **3.8** são equivalentes para a taxa de juros de 3% am porque seus valores presentes são iguais.

Experimente comparar os valores desses fluxos de caixa na data focal 60 dias e tire sua conclusão.

O valor de um fluxo de caixa em regime de juros compostos pode ser determinado em qualquer data focal, e a equivalência entre dois fluxos de caixa pode ser verificada impondo-se a condição de igualdade dos valores dos seus fluxos de caixa em qualquer data focal k ($1 \leq k \leq n$).

Atividades de aprendizagem

Para que você possa verificar se entendeu o que foi abordado nesta Unidade, apresentamos alguns questionamentos. Caso encontre dúvidas, volte, releia o texto e também conte com seu tutor para auxiliá-lo.

15. Uma pessoa toma um empréstimo de $ 10.000,00, com prazo de um ano, a uma taxa de juros de 12% aa, com capitalização mensal, assinando um título de dívida. Decorridos três meses, o devedor resolve quitar o empréstimo por meio de um único pagamento. Considerando que a taxa corrente de juros é de 15% aa, determine o valor do pagamento a ser efetuado. Dica: 12% aa e 15% aa são taxas nominais.
16. Analise os dados e a resposta da questão 15 para determinar a rentabilidade efetiva do credor nessa operação em taxa mensal e anual efetivas.
17. Uma pessoa toma um empréstimo de $ 6.000,00 à taxa de juros de 12% aa, com capitalização mensal, por cinco anos. No final do segundo ano, o devedor antecipa um pagamento de $ 2.500,00. Qual o estado da dívida ao final do contrato? Dica: 12% aa é taxa nominal.
18. Um capital de $ 5.000,00 é aplicado a 8% aa em uma determinada data; um ano após, outro capital é aplicado a 12% aa. Depois de cinco anos da primeira aplicação, os montantes gerados pelas duas aplicações foram idênticos. Determine o valor do segundo capital.
19. Quanto você deve depositar hoje em uma conta remunerada com taxa de 6% aa e capitalização mensal para retirar $ 1.000,00 em quatro meses, $ 2.000,00 em oito meses e deixar um saldo final de $ 500,00?

20. Uma pessoa tem os seguintes compromissos financeiros a pagar: \$ 1.000,00 vencíveis daqui a dois meses, \$ 2.000,00 daqui a três meses e \$ 2.000,00 daqui a 12 meses. Essa pessoa quer reprogramar esses compromissos para dois pagamentos iguais daqui a seis e a 12 meses. Determine o valor desses pagamentos admitindo que a taxa de juros do mercado é de 3% am.
21. Um terreno cujo valor à vista é \$ 50.000,00 foi vendido nas seguintes condições: um pagamento de \$ 10.000,00 em seis meses, um segundo pagamento de \$ 10.000,00 em 12 meses e o restante ao final de dois anos. Considerando que a dívida é capitalizada mensalmente, determine o valor total a ser pago admitindo o custo do dinheiro em 2% am.
22. Um cliente quer substituir dois títulos com valores nominais de \$ 5.000,00 vencíveis em um ano e \$ 4.000,00 vencíveis em quatro anos por apenas um título vencível em dois anos. Determine o valor nominal desse título para uma taxa de juros de 8% aa.

Resumindo

Nesta Unidade você conheceu o regime de juros compostos, ou de capitalização composta. Estudou a modelagem do regime e deduziu suas fórmulas básicas. A seguir, você entrou em contato com os conceitos de taxas de juros nominais e efetivas; neste regime de juros, as taxas proporcionais não são equivalentes como no regime de juros simples e trabalha-se sempre com a taxa efetiva nas fórmulas. Após esses conceitos básicos, você se debruçou no estudo do desconto racional composto e da equivalência de fluxos de caixa. Estudou, também, os conceitos de valor presente e de taxa interna de retorno, que são muito importantes no campo dos estudos econômicos.

Você chegou ao final de mais uma Unidade! Reflita se você entendeu perfeitamente todos os pontos abordados. Em caso de dúvida, retorne ao texto até que você tenha a certeza de dominar completamente as ideias e os conceitos desenvolvidos. Se não restaram dúvidas, você está mais uma vez de parabéns! Como resultado do seu esforço, você conheceu o regime de capitalização composta, o mecanismo de desconto racional, os conceitos de valor presente de um fluxo de caixa, de equivalência de fluxos de caixa neste regime de juros, de conceito de taxa interna de retorno e de valor presente líquido. Portanto, você está apto a iniciar os estudos da quarta Unidade deste livro.

Respostas das atividades de aprendizagem

1. (a) $ 1.159,27; (b) $ 159,27
2. i_a = 10,67% aa
3. $ 4.619,22
4. 3% aa
5. 3 anos
6. Taxas proporcionais: i_d = 0,10 % ad, i_m = 3,00 % am, i_t = 9,00 % at, i_a = 18,00 % as; e taxas equivalentes: i_d = 0,085449 %ad, i_m = 2,5954 % am, i_t = 7,99 % at, i_a = 16,619 % as
7. i_a = 2,3778% at
8. i_a = 9,51% aa
9. $ 7.413,72
10. C. Linear M = $ 1.461,25
11. C. exponencial M = $ 1.455,50
12. (a) i_{aef} = 26,82% aa; (b) $ 4.986,33
13. n = 1,5 anos
14. (a) M = $ 40.318,10; (b) M = $ 22.877,58
15. $ 10.076,30
16. (a) i_m = 0,2537% am; b) 3,087% aa
17. $ 7.323,24
18. $ 4.668,92
19. C = $ 3.382,45
20. R = $ 2.713,44

21. M = $ 53.453,98

22. R = $ 8.829,35