UNIDADE 5

Sistemas de Amortização

Objetivos Específicos de Aprendizagem

Ao finalizar esta Unidade, você deverá ser capaz de:

- Conhecer os modelos básicos de sistemas de amortização de dívidas; e
- Construir os quadros de amortização de dívidas desses modelos.

Sistemas de Amortização

Caro estudante,

Nesta quinta Unidade da disciplina, pretendemos discutir com você os principais sistemas de amortização de dívidas utilizados pelos mercados público e privado. Nesse sentido, vamos estudar os Sistemas de Prestações Constantes (com um caso particular denominado Sistema Price) e os Sistemas de Amortizações Constantes.

Para acompanhar os conceitos e as atividades desta Unidade, serão necessários os conceitos trabalhados nas Unidades 1, 2, 3 e 4, com ênfase para: taxas de juros, efetiva e nominal; modelos de anuidades; e equivalência de capitais, além daqueles mencionados nos objetivos da Unidade 1.

Você pode perceber intuitivamente que um sistema de amortização nada mais é do que um plano de pagamento de uma dívida contraída. Esses planos de pagamento podem assumir muitas formas, mas são baseados, fundamentalmente, nos modelos de rendas estudados na Unidade anterior.

São exemplos de aplicação dos sistemas de amortização: compra da casa própria financiada pelo sistema financeiro de habitação, dívidas tributárias, empréstimos em bancos para pagamento em parcelas periódicas e outros.

Nos diversos sistemas de pagamento possíveis, cada pagamento (PMT) costuma incluir:

- juro do período (J), calculado sobre o saldo da dívida no início do período; e/ou
- amortização do principal (A), correspondente ao pagamento parcial ou integral do principal da dívida.

Vamos representar o saldo devedor no início de cada período (k) pela notação SDi_k, e o saldo devedor do final de cada período de SDf_k; assim, SDi_1 é o saldo devedor no início do período 1, e SDf_1 é o saldo devedor no final do período 1; SDi_4 é o saldo devedor no início do período 4, e SDf_4 é o saldo devedor no final do período 4. Por questão de adaptação à linguagem das calculadoras financeiras, o SDi_1 será sempre denominado PV nas fórmulas.

Com essas considerações, os pagamentos (PMT) nesses sistemas de amortização obedecem, de modo geral, a seguinte relação:

$$PMT_k = J_k + A_k$$

Em que:

- k indica períodos de tempo ($1 \leq k \leq n$) e ordem de pagamentos.

Um plano de amortização, cujo primeiro pagamento se dá na origem da dívida, é associado a um modelo de renda imediato e antecipado; nesses casos, o primeiro pagamento se destina totalmente à amortização da dívida porque não há decurso de tempo e, por consequência, não há juro ($PMT_1 = A$).

Sem perder de vista que os modelos de sistemas de amortização podem assumir as mais variadas formas, esta Unidade será dedicada ao estudo dos modelos mais usuais na vida prática.

Sistema de Prestação Constante (SPC)

O Sistema de Prestação Constante (SPC), muito utilizado em operações de Crédito Direto ao Consumidor (CDC) e em financiamentos habitacionais, consiste no pagamento da dívida por meio de prestações (PMT) constantes, sucessivas e periódicas.

Cada prestação, ou renda, é composta de duas partes:

- juro do período (J), calculado sobre o saldo devedor do início do período; e

- amortização do principal (A), correspondente à diferença entre o valor da prestação e o juro do período.

Você pode ver na Figura 30 o modelo geral desse tipo de renda para um conjunto de n pagamentos.

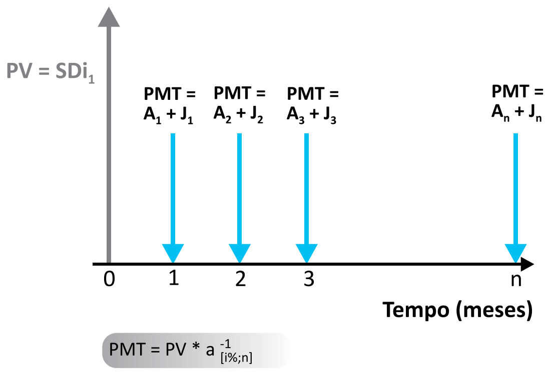

Figura 30: Sistema de Prestação Constante
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Em sistemas postecipados, o pagamento de ordem k (PMT_k) ocorre no ponto temporal (k) – final do período (k) que se inicia no ponto temporal (k – 1). Portanto, o pagamento do primeiro período se dá no ponto temporal 1 (PMT_1 em 1).

Nessa renda:

- PV (SDi_1) – é o valor presente que corresponde à dívida contraída;
- PMT_k = PMT – é o valor do pagamento no período (k); e
- n – é o número de termos da renda que coincide com o número de períodos nos quais os pagamentos são feitos.

Cada pagamento periódico (PMT_k) inclui parcelas de juros e de amortização do principal, verificando-se a relação fundamental:

$$PMT = A_k + J_k \qquad (5.1)$$

Em que:

- k indica o período no qual o pagamento se dá ($1 \leq k \leq n$).

Modelo Postecipado e Imediato

Quando você faz um financiamento, você usualmente conhece a sua necessidade financeira imediata (PV). É razoável que você deseje saber as relações existentes entre os valores de PV e de PMT para a taxa de juros (i) especificada e para o número de prestações acordadas (n). A resposta a essa pergunta depende do modelo do financiamento. Para o modelo postecipado e imediato, que você viu na Figura 30, a solução vem com o auxílio da fórmula (4.2) deduzida na Unidade 4 e que reproduzimos a seguir:

$$PV = PMT * \frac{(1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n} = PMT * a_{[i\%;n]} \qquad (5.2) \quad \text{e}$$

$$PMT = PV * \frac{i * (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = PV * a^{-1}_{[i\%;n]} \qquad (5.3)$$

Essas fórmulas relacionam o valor da dívida contraída (PV), o valor dos pagamentos (PMT), a taxa de juros efetiva da operação (i), o número de pagamentos (n) e respondem à pergunta inicial que você fez.

Outra pergunta que você pode fazer é: qual será o valor de minha poupança após vários depósitos periódicos de um valor constante? Em outras palavras, quais as relações existentes entre os valores de FV e de PMT se conhecemos o número de pagamentos e a taxa de juros efetiva?

Mais uma vez, você pode se valer das fórmulas (4.3) e (4.4) deduzidas na Unidade 4 que evidenciam ess as relações conforme as reproduzimos a seguir:

$$FV = PMT * \frac{(1+i)^n - 1}{i} = PMT * S_{[i\%;n]} \qquad (5.4)$$

$$PMT = FV * \frac{i}{(1+i)^n - 1} = FV * S^{-1}_{[i\%;n]} \qquad (5.5)$$

Um aspecto importante do problema, de utilização frequente, é a determinação dos seguintes valores para a k-ésima prestação ($1 \leq k \leq n$):

- parcela de juros (J_k) nela contida;
- parcela de amortização (A_k) nela contida; e
- saldo devedor que permanece (SDf_k) **após** o pagamento da parcela.

Essas relações são as seguintes:

$$A_k = PV * i * [\frac{(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1}] \quad (5.6)$$

$$J_k = PV * i * [\frac{(1+i)^n - (1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1}] \quad (5.7)$$

$$SDf_k = PV * [\frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{(1+i)^n - 1}] \quad (5.8)$$

Observe que:

- A_k e J_k – são os valores da amortização e dos juros contidos na k-ésima parcela; e
- SDf_k – é o saldo devedor existente imediatamente **após** o pagamento da k-ésima prestação; em outras palavras, é o saldo devedor inicial do período k+1.

Exemplo 5.1

Considere o parcelamento de uma dívida tributária no valor de $ 1.000,00 a ser pago em quatro prestações anuais sucessivas postecipadas para o qual se convencionou uma taxa de juros efetiva de 10% aa. Qual o valor da prestação anual? Monte um quadro demonstrativo da operação.

Sumário: $PV = SDi_1$ = $ 1.000,00, n = 4, i = 10% aa, PMT = ?

Solução

O cálculo da prestação é feito a partir da fórmula (5.3):

$$PMT = PV * \frac{i * (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = PV * a^{-1}_{[i\%;n]} =$$

$$PMT = 1.000 * \frac{(1+0{,}10)^4}{0{,}1 * (1+0{,}1)^4} = 1.000 * 0{,}3154708 = \$ 315{,}47$$

Observe que a tabela de fatores financeiros para i = 10% fornece o valor $a^{-1}_{[10\%;4]} = 0{,}3154708$.

O quadro geral da operação, também denominado quadro geral de amortização, é o seguinte:

Quadro Geral de Amortização – SPC					
Período	PMT_k	SDi_k	$J_k = SDi_k * i$	$A_k = PMT_k - J_k$	$SDf_k = SDi_k - A_k$
0 – 1	315,47	1.000,00	100,00	215,47	784,53
1 – 2	315,47	784,53	78,45	237,02	547,51
2 – 3	315,47	547,51	54,75	260,72	286,79
3 – 4	315,47	286,79	28,68	286,79	0,00

SDi_k – saldo devedor de início do período k.
SDf_k – saldo devedor de final do período k.

Quadro 1: Amortização de dívida (SPC)
Fonte: Elaborado pelo autor deste livro

Analise bem o Quadro 1, pois ele é ilustrativo do modo de operação do sistema: o juro devido ao final de cada período é calculado diretamente do saldo devedor do início desses períodos ($J_k = SDi_k * i$), e as amortizações pelas diferenças entre o pagamento devido (PMT) e o juro de cada período (J_k). Ao final de cada um dos períodos, resta um saldo devedor SDf_k que é o saldo devedor do início de período seguinte.

Observe ainda que a parcela de juros diminui ao passo que a parcela de amortização aumenta em cada prestação por um fator constante, verificando-se sempre a relação:

$$PMT = A_k + J_k$$

Isso pode ser mais bem observado na Figura 31.

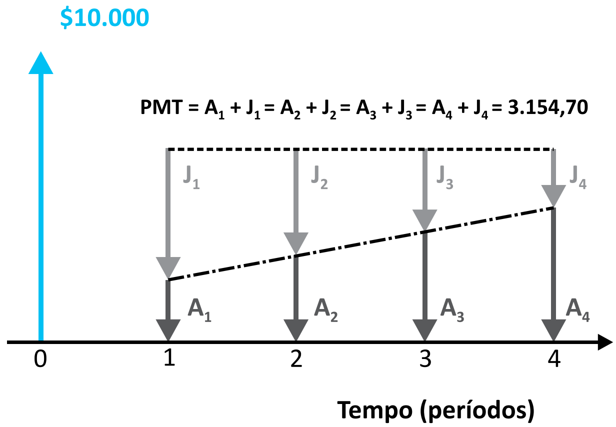

Figura 31: Comportamento de juros e amortização

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Para calcular os valores de A, J e SD correspondentes à terceira parcela, sem construir o quadro geral de amortização, recorremos às fórmulas (5.6), (5.7) e (5.8):

$$A_3 = PV * i * \left[\frac{(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$A_3 = 1.000 * 0,10 * \left[\frac{(1+0,10)^2}{(1+0,10)^4}\right]$$

$$A_3 = \$\ 260,71$$

$$J_3 = PV * i * \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$J_3 = 10.000 * 0,10 * \left[\frac{(1+0,10)^4 - (1+0,10)^{3-1}}{(1+0,10)^4 - 1}\right]$$

$$J_3 = \$\ 547,51$$

$$SDf_k = PV * \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$SDf_3 = 1.000 * \left[\frac{(1+0,10)^4 - (1+0,10)^3}{(1+0,10)^4 - 1}\right] =$$

$$SDf_3 = \$\ 286,79$$

A determinação do valor do montante total, ao final, equivalente à dívida inicial, é feita com a aplicação da expressão (5.6) ou da expressão (5.4).

$$FV = PMT * \frac{(1+i)^n - 1}{i} = PMT * S_{i\%;n]} = 315{,}47 * \frac{(1+0{,}10)^4 - 1}{0{,}10} =$$

$$FV = 315{,}47 * 4{,}641 = \$\ 1.464{,}09$$

O valor 4,641000 pode ser extraído da tabela de fatores financeiros para o par [10%;4].

A Tabela Price é um caso particular do modelo de prestação constante, no qual o processo de cálculo é exatamente o mesmo. Dois fatores caracterizam o Sistema Price:

Confira a indicação de vídeos sobre a Tabela Price e o uso da HP 12C e da planilha Excel na seção *Complementando* ao final desta Unidade.

- a prestação é obrigatoriamente mensal; e
- a taxa de juros dada é uma taxa anual nominal, sendo a taxa efetiva mensal "calculada por proporcionalidade". Em outras palavras: n é expresso em meses e a taxa efetiva de juros é $i_m = i_a/12$.

Atividades de aprendizagem

Este é momento de verificar se você está acompanhando o conteúdo. Para isso, resolva a atividade a seguir.

1. Qual o valor das prestações do financiamento de $ 5.000,00 pela Tabela Price que deve ser pago em seis parcelas mensais sucessivas postecipadas e iguais à taxa de juros nominal de 12% aa? Resolva esta atividade com o uso de fórmulas e da tabela financeira. Se você optar por utilizar calculadora, detalhe todos os passos. Dica: a taxa de juros efetiva é taxa mensal proporcional a 12% aa.

Modelo Postecipado e Diferido

É comum a ocorrência de financiamentos cujo primeiro pagamento é devido após um tempo de carência. Em alguns financiamentos, você somente começa a pagar as prestações depois de decorrido um tempo superior à periodicidade das prestações a serem pagas. Nesses casos, temos um sistema de amortização diferido no qual o primeiro pagamento se dá no primeiro período após o período de diferimento. Por exemplo, se os pagamentos forem postecipados e o diferimento for de três meses, o primeiro pagamento se dará no final do quarto período (ponto temporal 4). Situações como essa são muito comuns na prática.

Você pode ver, a seguir, as fórmulas básicas do sistema de amortização postecipado e diferido em m períodos, com prazo total de m+n períodos e sem pagamento de juro durante o diferimento. Não havendo pagamento de juros durante o diferimento, o seu valor deve ser capitalizado.

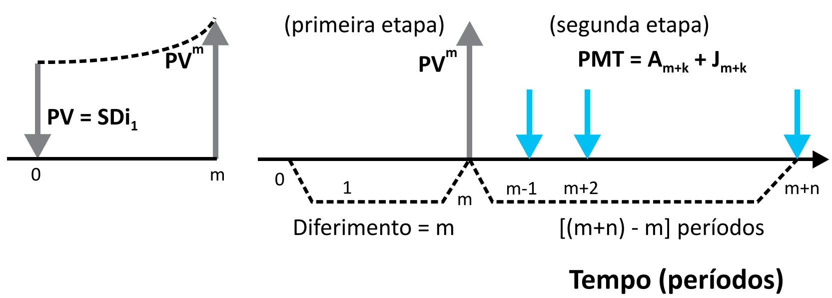

Figura 32: Modelo de prestação constante, postecipado e diferido
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

A Figura 32 é ilustrativa do modelo e mostra a solução em dois passos, vista na Unidade 4, que levou as seguintes fórmulas para as relações entre PMT/PV e PMT/FV:

$$PMT = PV * (1+i)^m * \frac{i * (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = PV * FVF_{[i\%;m]} * a^{-1}_{[i\%;n]} \qquad (5.9)$$

$$FV = PMT * \frac{(1+i)^n - 1}{i} = PMT * S_{[i\%;n]} \qquad (5.10)$$

Na Figura 32, o primeiro pagamento está no ponto (m+1), que é o final do período (m+1), primeiro período após o período de diferimento (m).

As fórmulas de amortização, juro e saldo devedor intermediários são mostradas a seguir:

$$A_k = PV * i * (1+i)^m * [\frac{(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1}] \quad (5.11)$$

$$J_k = PV * i * (1+i)^m * [\frac{(1+i)^n - (1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1}] \quad (5.12)$$

$$SDf_k = PV * (1+i)^m * [\frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{(1+i)^n - 1}] \quad (5.13)$$

para todo k compreendido no intervalo: $1 \leq k \leq (m+n) - m$.

Exemplo 5.2

Considere um valor financiado de \$ 1.000,00 a ser pago em cinco pagamentos iguais, postecipados, com diferimento de dois meses e com taxa de juros de 3% am. Determine o valor dos pagamentos utilizando:

a) as fórmulas;

b) as tabelas financeiras;

c) a amortização e os juros contidos na segunda parcela do pagamento e o saldo devedor após o pagamento da segunda parcela; e

d) construa o quadro geral de amortização.

Sumário de dados: PV = \$ 1.000,00, m = 2 m, i = 3% am, n = 5

Você deve construir a figura representativa do problema.

Solução

a) Para o valor de cada pagamento utilizando a fórmula (5.9), você tem:

$$PMT = PV*(1+i)^m * \frac{i*(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

$$PMT = 1.000*(1+0{,}03)^2 * \frac{0{,}03*(1+0{,}03)^5}{(1+0{,}03)^5 - 1} =$$

$$PMT = 1.000*1{,}0609*0{,}218355 = 231{,}65$$

$$PMT = \$\,231{,}65$$

b) Extraindo de uma tabela financeira os fatores financeiros para i = 3%, os valores $FVF_{[3\%;2]} = 1{,}0609$ e $a^{-1}_{[i\%;n]} = 0{,}218355 = 0{,}218355$, você pode calcular PMT assim:

$$PMT = PV * FVF_{[3\%;2]} * .a^{-1}_{[3\%;5]}$$

$$PMT = 1.000*1{,}0609*0{,}218355 = 231{,}65$$

$$PMT = \$\,231{,}65$$

c) Para o cálculo dos juros, da amortização e do saldo devedor com a utilização das fórmulas (5.11) a (5.13), considerando que os valores pretendidos se referem à segunda parcela, você tem k = 2.

$$A_k = PV*i*(1+i)^m*[\frac{(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1}]$$

$$A_2 = 1.000*0{,}03*(1+0{,}03)^2*[\frac{(1+0{,}03)^{2-1}}{(1+0{,}03)^5 - 1}]$$

$$A_2 = 1.000*0{,}03*1{,}0609*6{,}46684 = \$\,205{,}82$$

$$J_k = PV*i*(1+i)^m*[\frac{(1+i)^n - (1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1}]$$

$$J_2 = 1.000*0{,}03*(1+0{,}03)^2*\frac{(1+0{,}03)^5 - (1+0{,}03)^{2-1}}{(1+0{,}03)^5 - 1}$$

$$J_2 = 30*1{,}0609*\frac{1{,}159274 - 1{,}03}{0{,}159274} = \$\,25{,}83$$

Finalmente, o cálculo do saldo devedor remanescente após o pagamento da segunda parcela é:

$$SDf_k = PV * (1+i)^m * [\frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{(1+i)^n - 1}]$$

$$SDf_2 = 1.000 * (1+0{,}03)^2 * \frac{(1+0{,}03)^5 - (1+0{,}02)^2}{(1+0{,}02)^5 - 1}$$

$$SDf_2 = 1.000 * 1{,}0609 * \frac{1{,}159274 - 1{,}0609}{0{,}159274} = \$\ 665{,}25$$

d) Construção do quadro geral de amortização:

Quadro geral de amortização – SPC diferido						
Período		SDi_K	J_K	A_K	PMT	SDf_K
K	m+k					
–	1	~~1.000,00~~	~~30,00~~	–	–	~~1.030,00~~
–	2	~~1.030,00~~	~~30,90~~	–	–	~~1.060,90~~
1	3 = 2 + 1	1.060,90	31,83	199,83	231,65	861,07
2	4 = 2 + 2	861,07	25,83	205,82	231,65	655,25
3	5 =2 + 3	655,25	19,66	211,99	231,65	443,26
4	6 = 2 + 4	443,26	13,30	218,35	231,65	224,91
5	7 = 2 + 5	224,91	6,75	224,91	231,65	(0,00)

Duração da renda = m+k k = ordem dos pagamentos

Quadro 2: SPC diferido
Fonte: Elaborado pelo autor este livro

Observe que nos períodos 1 e 2 não há pagamentos; os números tachados são apenas referências de cálculo.

Atividades de aprendizagem

Agora é com você! Verifique como foi o seu entendimento até aqui realizando as atividades a seguir.

2. Você contraiu um empréstimo para ser pago em quatro prestações mensais de $ 1.646,17, iguais, imediatas e postecipadas. Sabendo que a taxa nominal de juros é de 12% aa, determine o valor do financiamento; construa a planilha de amortização; e determine, com a utilização da fórmula geral, o valor dos juros contidos na terceira prestação (J_3). Dica: taxa mensal efetiva i_m = 1% am.
3. Qual o valor dos pagamentos de um financiamento no valor de $ 4.000,00 que deve ser amortizado em quatro pagamentos mensais, sucessivos, iguais, a uma taxa de juros de 12% aa? Qual o valor do pagamento para quitar toda a dívida no terceiro pagamento? Construa o quadro de amortização.
4. Vá a uma loja e procure por ofertas de produtos com preços à vista parcelados em prestações cuja soma seja igual ao preço à vista. Procure entender o real significado dessas ofertas; se possível, discuta essa questão com seus colegas e professor.

Modelo Antecipado e Imediato

Imagine que você financiou a compra de um bem em várias parcelas iguais com um pagamento inicial a título de entrada; esse é um modelo de amortização denominado antecipado e que é muito usado no mundo das finanças públicas e privadas.

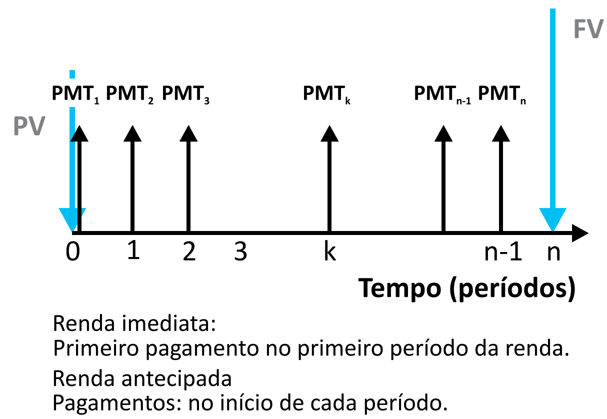

Figura 33: Renda temporária, certa, imediata e antecipada
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

No modelo visualizado na Figura 33, os pagamentos são feitos no início de cada período. Como o primeiro pagamento se dá na própria origem da dívida, ele não inclui juro e é todo ele destinado a amortizar a dívida. O juro devido estará incluído nos demais pagamentos.

Em sistemas antecipados, o pagamento de ordem k (PMT_k) se dá no ponto temporal (k – 1), que é o início do período (k) – o período (k) tem início em (k – 1) e fim no ponto k.

Na Unidade 4, mostramos as expressões que permitem relacionar as variáveis básicas do modelo:

$$PV = (1+i) * PMT * \frac{(1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n} = (1+i) * PMT * a_{[i\%;n]} \qquad (5.14)$$

$$PMT = \frac{PV}{(1+i)} * \frac{i * (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = \frac{PV}{(1+i)} * a^{-1}_{[i\%;n]} \qquad (5.15)$$

$$FV = (1 + i) * PMT * \frac{(1+i)^n - 1}{i} = (1+i) * PMT * S_{[i\%;\, n]} \qquad (5.16)$$

$$PMT = FV * \frac{1}{(1+i)} * \frac{i}{(1+i)^n - 1} = FV * \frac{1}{(1+i)} * S^{-1}_{[i\%;n]} \qquad (5.17)$$

As expressões para amortizações, juros e saldos devedores intermediários são respectivamente:

$$A_k = \frac{PV}{(1+i)} * i * (1+i) * [\frac{(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1}] \qquad p/\ k>1 \qquad (5.18)$$

Observe que para k = 1 resulta A_1 = PMT.

$$J_k = \frac{PV}{(1+i)} * i * [\frac{(1+i)^n - (1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1}] \qquad (5.19)$$

e $J_1 = 0$ p/ k=1

$$SDf_k = \frac{PV}{(1+i)} * [\frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{(1+i)^n - 1}] \qquad (5.20)$$

Exemplo 5.3

Considere um empréstimo de \$ 1.000,00 a ser pago em quatro prestações anuais sucessivas antecipadas para o qual se convencionou uma taxa de juros efetiva de 10% aa. Qual o valor da prestação anual? Monte um quadro demonstrativo da operação.

Sumário de dados: PV = \$ 1.000,00, n = 4, i = 10% aa, mod. antecipado

Solução

a) O cálculo da prestação é feito a partir da expressão (5.15):

$$PMT = \frac{PV}{(1+i)} * \frac{i * (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

$$PMT = \frac{1.000}{(1+0,1)} * a^{-1}_{[10\%;4]}$$

$$PMT = \frac{1.000}{(1+0,1)} * \frac{0,1 * (1+0,1)^4}{(1+0,1)^4 - 1} = \frac{1.000}{1,1} * 0,3154708 = \$\, 286,79$$

O valor $a^{-1}_{[10\%;4]} = 0{,}3154708$ pode ser tirado de tabelas de fatores financeiros para o par [10%;4].

O quadro geral da operação, também denominado quadro geral de amo rtização, é o seguinte:

Quadro Geral de Amortização – SPC antecipado					
Período	PMT_k	SDi_k	$J_k = SDi_k * i$	$A_k = PMT_k - J_k$	$SDf_k = SDi_k - A_k$
0 – 1	286,79	1.000,00	0,00	286,79	713,21
1 – 2	286,79	713,21	71,32	215,47	497,74
2 – 3	286,79	497,74	49,77	237,02	260,72
3 – 4	286,79	260,72	26,07	260,72	0,00

SDi_k – saldo devedor de início do período k.
SDf_k – saldo devedor de final do período k.

Quadro 3: SPC imediato e antecipado
Fonte: Elaborado pelo autor deste livro

Os demais modelos podem ser desenvolvidos teoricamente de forma análoga e são deixados como exercícios para você.

Atividades de aprendizagem

Certifique-se de que você entendeu o que estudamos até aqui. Realize as atividades propostas.

5. Você contraiu um empréstimo para ser pago em quatro prestações mensais de $ 1.646,17, iguais, imediatas e antecipadas. Sabendo que a taxa nominal de juros é de 12% aa, determine o valor do financiamento; construa a planilha de amortização; e determine, com a utilização da fórmula geral, o valor dos juros contidos na terceira prestação (J_3). Dica: taxa mensal efetiva i_m = 1% am.
6. Qual a prestação de uma compra a prazo no valor de $ 4.000,00 à vista para ser financiada em quatro pagamentos mensais, sucessivos, iguais, a uma taxa de juros de 12% aa, sendo o primeiro deles no ato da compra? Quanto deveria ser pago se o tomador do empréstimo quisesse quitar toda a dívida no terceiro pagamento? Construa o quadro de amortização.

Sistemas de Amortização Constante (SAC)

Você percebeu que nos modelos anteriores os pagamentos eram constantes? Pois bem, no Sistema de Amortização Constante (SAC) o que é constante é a parcela de amortização. O juro é decrescente, levando, portanto, a prestações decrescentes no tempo. Os pagamentos são compostos, de modo análogo aos casos anteriores, de dois elementos:

- amortização (A): é **constante** ao longo de todo o plano de pagamentos; e
- juro (J): são calculados sobre os saldos devedores dos períodos imediatamente anteriores.

O pagamento, ou renda, devido em cada período é:

$$PMT_k = A_k + J_k = A + J_k \qquad (5.21)$$

$$(1 \leq k \leq n)$$

Observe que no SAC o que permanece constante é a parcela de amortização, enquanto que no SPC o que permanece constante é o valor da prestação.

O SAC também pode operar nos modos postecipado, antecipado e diferido, sendo tratado, neste livro, apenas o modelo postecipado.

As fórmulas gerais para um SAC imediato e postecipado, evidenciado na Figura 34, são mostradas a seguir na Figura 34.

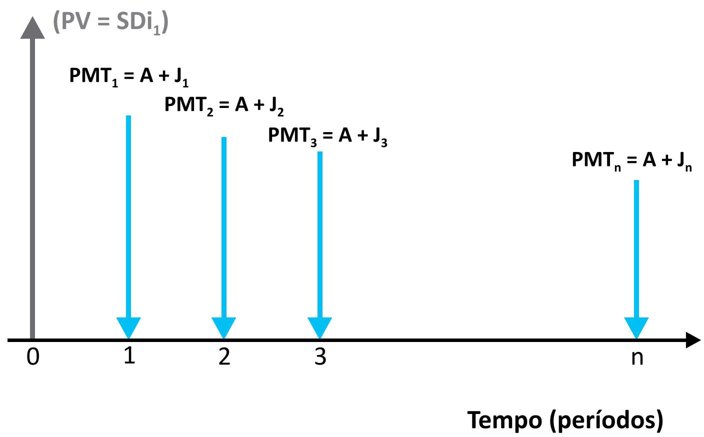

Figura 34: SAC imediato e postecipado
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

A nomenclatura envolvida nas fórmulas do SAC é:

- PV – principal ou saldo devedor inicial;
- i – taxa de juros periódica efetiva; e
- n – prazo em períodos.

O valor de cada prestação, ou renda, está dado pela expressão (5.21):

$$PMT_k = A + J_k \qquad\qquad 1 \leq k \leq n$$

Em que,

- PMT_k – é a k-ésima prestação ou renda (que ocorre no ponto k+1 para o modelo postecipado);
- A – é a amortização, que é constante em todos os pagamentos; e
- J_k – é o juro referente a k-ésima prestação.

O valor da amortização contida em cada pagamento é determinado dividindo-se o principal (o valor da dívida inicial) pelo número de parcelas do plano de pagamento:

$$A = \frac{PV}{n} \qquad\qquad (5.22)$$

O saldo devedor, imediatamente após o pagamento da k-ésima prestação, ou renda, é dado pela diferença entre o saldo devedor inicial e as amortizações contidas em todos os pagamentos, como o de ordem k:

$$SDf_k = PV - k * A = PV - k * \frac{PV}{n}$$

que por fatoração simples resulta em,

$$Sdf_k = PV * [\frac{n - k}{n}] \qquad (5.23)$$

Os juros referentes a k-ésima prestação, ou renda, são calculados com base no saldo devedor do início do período (k) ou, o que é a mesma coisa, no saldo devedor do final do período (k –1):

$$J_k = SDi_k * i$$

Da expressão (5.23) e para o termo de ordem (k-1) tiramos:

$$Sdf_{k-1} = SDi_k = PV * [\frac{n - (k-1)}{n}]$$

que, substituído na fórmula dos juros, apresenta:

$$J_k = PV * [\frac{n - (k-1)}{n}] * i \qquad \text{e}$$

$$J_k = PV * i * [\frac{n - k + 1}{n}]$$

$$\text{com} \quad 1 \leq k \leq n \qquad (5.24)$$

Finalmente, o valor da k-ésima prestação, ou renda, é dado pela soma da amortização e dos juros da parcela de ordem k:

$$PMT_k = A + J_k = \frac{PV}{n} + PV * i * [\frac{n - k + 1}{n}] \qquad (5.25)$$

Observamos que:

- J_k e PMT_k são uniformemente decrescentes em k;
- a taxa de juros e os períodos de pagamento das prestações são expressos em unidades compatíveis; e
- a primeira prestação, ou renda, é devida ao final do primeiro período (modelo postecipado).

O SAC comporta variações desse modelo básico; para conhecê-las, faça a leitura do texto *Variações do modelo básico do SAC* disponível em: <http://www.proativams.com.br/files_aberto/Leiturascomplementares5.doc>. Acesso em: 27 jul. 2011.

Exemplo 5.4

Considere um empréstimo de $ 1.000,00 a ser pago por meio do modelo SAC em quatro prestações anuais sucessivas, imediatas e postecipadas para o qual se convencionou uma taxa de juros de 10% aa. Qual o valor da prestação anual? Monte um quadro demonstrativo da operação.

Sumário de dados: PV = $ 1.000,00, n = 4, (k = 1, 2, 3 e 4), i = 10% aa, mod. SAC postecipado

Solução

a) O cálculo da amortização contida em cada pagamento é feito a partir da expressão (5.22):

$$A = PV/n = 1.000,00/4 = \$\,250,00$$

(constante nos quatro pagamentos)

b) O juro, o valor de cada pagamento e o saldo devedor remanescente são calculados a partir das fórmulas (5.23), (5.24) e (5.25) mostradas anteriormente:

$$J_k = PV * i * [\frac{n - k + 1}{n}]$$

$$J_1 = 1.000 * 0,10 * [\frac{4 - 1 + 1}{4}] = \$100,00 \qquad (k=1)$$

$$PMT_1 = A + J_1 = 250 + 100 = \$350,00$$

$$SDf_k = PV * [\frac{n - k}{n}]$$

$$Sdf_1 = 1000 * [\frac{4 - 1}{4}] = \$\,750,00 \qquad (k=1)$$

De modo análogo calculamos:

$$J_2 = 1.000 * 0,10 * [\frac{4 - 2 + 1}{4}] = \$ 75,00 \qquad (k=2)$$

$$PMT_2 = A + J_2 = 250,00 + 75,00 = \$ 325,00$$

$$SDf_2 = 1.000 * [\frac{4-2}{4}] = \$ 500,00 \qquad (k=2)$$

$$J_3 = 1.000 * 0,10 * [\frac{4 - 3 + 1}{4}] = \$ 50,00$$

$$PMT_3 = A + J_3 = 250,00 + 50,00 = \$ 300,00 \qquad (k=3)$$

$$SDf_3 = 1.000 * [\frac{4-3}{4}] = \$ 250,00 \qquad (k=3)$$

$$J_4 = 1.000 * 0,10 * [\frac{4 - 4 + 1}{4}] = \$ 25,00 \qquad (k=4)$$

$$PMT_4 = A + J_4 = 250,00 + 25,00 = \$ 275,00 \qquad (k=3)$$

$$SDf_4 = 1.000 * [\frac{4-4}{4}] = 0,00 \qquad (k=4)$$

O quadro geral de amortização está demonstrado a seguir:

Quadro Geral de Amortização – SAC postecipado					
Período	PMT_k	SDi_k	$J_k = SDi_k * i$	$A_k = PMT_k - J_k$	$SDf_k = SDi_k - A_k$
0 – 1	350,00	1.000,00	100,00	250,00	750,00
1 – 2	325,00	750,00	75,00	250,00	500,00
2 – 3	300,00	500,000	50,00	250,00	250,00
3 – 4	275,00	250,00	25,00	250,00	0,00

SDi_k – saldo devedor de início do período k.
SDf_k – saldo devedor de final do período k.

Quadro 4: SAC postecipado e imediato
Fonte: Elaborado pelo autor deste livro

Observe que o valor das prestações é decrescente; as prestações iniciais do SAC são maiores que as do SPC, com o inverso ocorrendo para as últimas.

Existem ainda outros sistemas básicos de amortização. Você pode estudar os sistemas montante, sinking fund, americano e alemão na leitura complementar *LC62* disponível em: <http://www.proativams.com.br/files_aberto/LC62.doc>.

Complementando...

Reforce o conteúdo desta Unidade com as seguintes leituras:

- *Sistema Price de amortização 1*. Disponível em: <http://br.youtube.com/watch?v=oi1KWFrOTxE>. Acesso em: 27 jul. 2011.
- *Sistema Price de amortização 2*. Disponível em: <http://br.youtube.com/watch?v=m_nQcXS9p8k&fe.ature=related>. Acesso em: 27 jul. 2011.
- *Sistema PAC de amortização*. Disponível em: <http//br.youtube.com/watch?v=43rns_jHnTA>. Acesso em: 27 jul. 2011.

Atividades de aprendizagem

Você conseguiu acompanhar o que foi exposto até aqui? Verifique seu entendimento fazendo as atividades a seguir. Se aparecer alguma dúvida, não hesite em consultar o seu tutor.

7. Você contraiu um empréstimo de $ 4.000,00 para ser pago em quatro prestações mensais imediatas e postecipadas por meio do SAC. Sabendo que a taxa nominal de juros é de 12% aa, determine o valor das prestações. Construa o quadro de amortização. Dica: taxa mensal efetiva i_m = 1% am.
8. Qual o valor dos pagamentos de uma compra a prazo no valor de $ 5.000,00 à vista para ser financiada em cinco pagamentos mensais e sucessivos a uma taxa de juros de 12% aa e diferidos em três meses pelo SAC? Quanto você deveria pagar se quisesse quitar toda a dívida no terceiro pagamento? Construa o quadro de amortização.
9. Entre no *site* da Caixa Econômica Federal (CEF) <www.cef.com.br>, pesquise os planos de financiamento habitacionais oferecidos e os identifique com os modelos vistos até agora.
10. Um empréstimo de $ 20.000,00 deverá ser amortizado em 10 prestações mensais antecipadas, sucessivas e constantes. A taxa de juros do empréstimo é de 24% aa. Determine o valor dos pagamentos mensais que o tomador deverá fazer e construa o quadro de amortização.

11. Você financiou sua casa própria em 48 prestações mensais pelo SAC. O valor da amortização contido em cada pagamento é de $ 1.000,00. A taxa de juros convencionada é de 12% aa. Determine o valor financiado e construa a planilha de amortização para os quatro primeiros pagamentos.
12. Um empréstimo de $ 5.000,00 deve ser amortizado pelo SPC em seis trimestres com carência de três trimestres. A taxa de juros nominal é de 8% aa e a capitalização trimestral. Determine o valor da prestação e construa o quadro de amortização. Calcule o saldo devedor remanescente após o pagamento da quarta prestação com a utilização da fórmula geral.
13. Um empréstimo de $ 25.000,00 deve ser amortizado em seis prestações pela Tabela Price, sem carência. Sabendo que a taxa de juros nominal é de 36% aa, determine o valor das prestações e construa o quadro de amortização. Determine o valor com o auxílio das fórmulas gerais: SD_3, J_3 e A_3.
14. Construa a planilha de amortização para um empréstimo de $ 5.000,00 a ser amortizado pelo SAC em cinco prestações mensais, postecipadas, sem prazo de carência. A taxa de juros nominal é de 18% aa.
15. O preço à vista de um eletrodoméstico é $ 500,00. A loja o está financiando por meio do SAC em quatro pagamentos mensais, postecipados, a uma taxa de juros efetiva de 2% am. Construa a planilha de financiamento e determine os valores básicos da prestação de ordem 3.

Resumindo

Nesta Unidade você estudou os modelos básicos de sistemas de amortização utilizados em financiamentos de diversas naturezas. Todos os exemplos foram resolvidos para o mesmo valor de empréstimo, mesmo prazo e mesma taxa de juros e você pôde observar, no entanto, que os valores despendidos para pagamento foram diferentes nos diversos modelos. Esperamos que você tenha atentado para o fato de que todos eles são absolutamente equivalentes porque foram solucionados com a utilização da mesma taxa efetiva de juros. O SPC tem larga aplicação no crédito direto ao consumidor e no sistema financeiro da habitação; o SAC é mais largamente utilizado no sistema financeiro da habitação e nos demais sistemas em aplicações comerciais diversas.

Bem! Chegamos ao final de mais uma Unidade da disciplina. Você entendeu bem todos os pontos abordados? Cumpriu com todas as atividades? Caso as tenha cumprido, está mais uma vez de parabéns e apto a seguir para a sexta Unidade da disciplina.

Respostas das atividades de aprendizagem

1. PMT = \$ 1.030,19
2. PV = \$ 6.423,98; J_3 = \$ 32,44
3. PMT = \$ 1.025,12; valor do pagamento = \$ 2.040,09 (terceiro pagamento + saldo devedor remanescente)
4. PV = \$ 6.487,53; J_3 = \$ 32,44
5. PMT = \$ 1.014,97; valor do pagamento = \$ 2.019,91 (terceiro pagamento + saldo devedor remanescente)
7. PMT = \$ 1.040,00; \$ 2.030,00; \$ 1.020,00; \$ 1.010
8. PMT = \$ 1.081,82; \$ 1.071,51; \$ 1.061,21; \$ 1.050,91; \$ 1.040,60
10. PMT = \$ 2.226,53
11. PV = \$ 48.000,00; A = \$ 1.000,00; PMT_1 = \$ 1.480,00; PMT_2 = 1.470,00; PMT_3 = 1.460,00
12. i_{ef} = 2% at; PMT = \$ 947,26; SD4 = \$ 2.786,44 (pagamento de PMT_4 + saldo devedor remanescente)
13. PMT = - \$ 4.614,93; J3 = \$ 514,63; SD3 = \$ 13.053,86; A3 = \$ 4.100,31
14. A = \$ 1.000,00; J_1 = 75,00; PMT_1 = \$ 1.075,00
15. i_{ef} = 3% am; A = \$ 125,00; J_3 = 5, PMT3 = \$ 130,00; SD_3 = \$ 125,00