Capítulo 6

Funções Reais Contínuas

Aula 6: Funções Reais Contínuas

Meta

Apresentar ao aluno os conceitos de função contínua, uniformemente contínua e demonstrar resultados relevantes em Análise como, por exemplo, o Teorema do Valor Intermediário e o Teorema de Weierstrass.

Objetivos

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de verificar se uma função é contínua ou uniformemente contínua e saber aplicar corretamente os Teoremas do Valor Intermediário e de Weierstarass.

Pré-requisitos

Aula 5, Fundamentos da Matemática e Cálculo II.

6.1 Introdução

Olá, nesta aula, convidamos o aluno ao estudo das funções contínuas e uniformemente contínuas em $\mathbb{R}$. Inicialmente definimos e exemplificamos funções contínuas. Veremos que o conjunto formado por estas funções é fechado para a soma, subtração, multiplicação e divisão (quando esta faz sentido), isto é, uma operação elementar de duas funções contínuas gera uma função contínua. Por conseguinte, obrigamos o domínio da função contínua ser um intervalo fechado e limitado (ou seja, compacto) para poder enunciar e provar alguns resultados importantíssimos em Análise, entre eles, o Teorema do Valor Intermediário. Este têm aplicação direta em determinação de raízes de polinômios. Em seguida, retiramos a hipótese do domínio ser um intervalo e continuamos com a condição de compacidade para obter o Teorema de Weierstrass. Este Teorema terá também aplicação na procura de zeros da função derivada (ver aula 7). Por fim, discutimos que funções são uniformemente contínuas e que condições devemos acrescentar a uma função contínua para termos uma função uniformemente contínua.

6.2 Continuidade e Exemplos

Definição 6.1 (Continuidade no Ponto)**.** Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X$. Dizemos que f é contínua no ponto $y \in X$ se $\forall\, \varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall\, x \in X$ com $|x - y| < \delta$, tem-se $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Caso contrário, f é dita descontínua em $y \in X$.

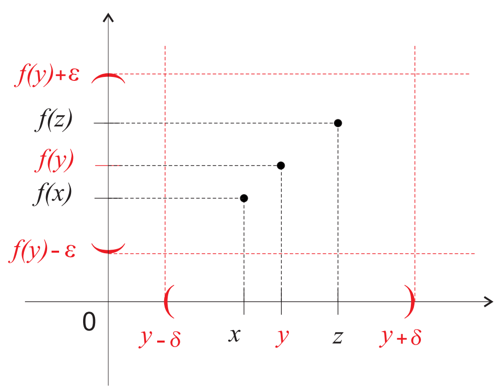

Figura 6.1: Continuidade em $y \in X$

Obs 6.1. O número positivo δ depende de ε e $y \in X$, ou seja, $\delta = \delta(\varepsilon, y)$.

Obs 6.2. Veja que y está no domínio de f. Não é necessário que y seja ponto de acumulação deste.

Obs 6.3. Veja que na definição 6.1, só importa o que ocorre em $X \cap (y-\delta, y+\delta)$. Por este fato, dizemos que a continuidade em um determinado ponto é um conceito local.

Exemplo 6.1. Defina $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$, $\forall\ x \in (0,1]$ e $f(0) = 1$. f é descontínua em 0. Devemos provar que $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que $\forall\ \delta > 0$, pode-se encontrar $x_\delta \in [0,1]$, com $|x_\delta - 0| < \delta$, satisfazendo a relação: $|f(x_\delta) - f(0)| \geq \varepsilon$. De fato, seja $\varepsilon = 1 > 0$. Assim, $\forall\ \delta > 0$ existe $x_\delta \in (0, \delta)$ (ver Teorema 1.6) tal que $|f(x_\delta) - f(0)| = |0 - 1| = 1 = \varepsilon$.

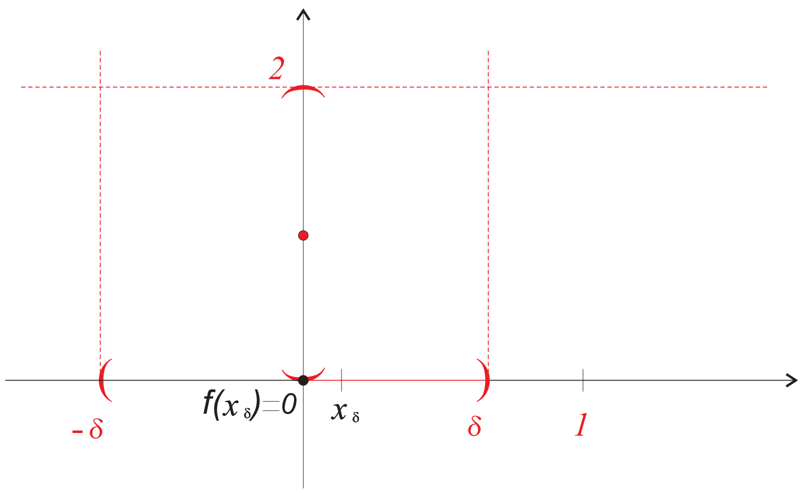

Figura 6.2: Função descontínua em 0

Exemplo 6.2. Seja $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma função. Vamos mostrar que x é contínua em $n \in \mathbb{N}$, independentemente da definição de x. Isto nos diz que toda sequência de números reais é uma função contínua em $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, seja $\delta = \frac{1}{2} > 0$, logo, $(n - 1/2, n + 1/2) \cap \mathbb{N} = \{n\}$. Com isso, $\forall\ m \in \mathbb{N}$ com $|m - n| < \frac{1}{2}$, tem-se $m \in (n - 1/2, n + 1/2)$. Logo, $m = n$. Consequentemente, $|f(m) - f(n)| = |f(n) - f(n)| = 0 < \varepsilon$.

Obs 6.4. Segue diretamente das definições 5.1 e 6.1 que se $y \in X \cap X'$, temos que f é contínua em $y \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to y} f(x) = f(y)$ (estas duas definições coincidem nesta situação) .

Exemplo 6.3. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = |x|$. Assim, $\lim\limits_{x \to 0^+} |x| = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} |x| = \lim\limits_{x \to 0^-} -x = 0$. Portanto, pelo Teorema 5.10, $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0 = |0|$. Com isso, f é contínua em 0 $(0 \in \mathbb{R}' = \mathbb{R}\ )$.

Definição 6.2 (Continuidade)**.** Seja $f : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é uma função contínua em X, ou simplesmente contínua, se f é contínua em cada ponto de X. Caso contrário, dizemos que f é descontínua em X, ou somente descontínua.

Exemplo 6.4. Toda função constante é contínua. De fato, seja $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = c =$ constante, então $\forall\ \varepsilon > 0$, existe $\delta = 1 > 0$ tal que $\forall\ x \in X$ com $|x - y| < \delta = 1$, tem-se $|f(x) - f(y)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. Ou seja, f é contínua em $y \in X$. Como y é arbitrário, então f é contínua.

Exemplo 6.5. A função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 0$, $\forall\ x \in (0, 1]$ e $f(0) = 1$, é descontínua em $[0, 1]$.

Exemplo 6.6. Toda sequência de números reais é uma função contínua.

Exemplo 6.7. Vimos no exemplo 5.7 que $\lim\limits_{x\to 0} \cos \dfrac{1}{x}$ não existe. Assim, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos \dfrac{1}{x}$, se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ é descontínua em 0. Já que, $\lim\limits_{x\to 0} \cos \dfrac{1}{x} \neq 0 = f(0)$.

Exemplo 6.8. Vimos nos exemplos 5.5 e 5.6 que $\lim\limits_{x\to y} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} y$ e $\lim\limits_{x\to y} \cos x = \cos y$, $\forall\ y \in \mathbb{R}$. Portanto, as funções seno e cosseno são contínuas.

Exemplo 6.9. Vimos no exemplo 5.8 que $\lim\limits_{x\to y} p(x) = p(y)$, $\forall\ p$ polinômio real e $y \in \mathbb{R}$. Ou seja, todo polinômio é uma função contínua.

Exemplo 6.10. Vimos que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ é contínua em 0. Por outro lado, $f(x) = |x| = x$ se $x > 0$ e $f(x) = |x| = -x$ se $x < 0$. Assim, pelo exemplo 5.8, f é continua em $\mathbb{R}$.

Proposição 6.1. *Sejam $Y \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ contínua em $y \in Y$. Então, a restrição $f|_Y : Y \to \mathbb{R}$ é contínua em $y \in Y$. (aqui $f|_Y(x) = f(x)$, $\forall\ x \in Y$).*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\forall\ x \in X$ com $|x - y| < \delta$, tem-se $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Portanto, $\forall\ x \in Y \subseteq X$ com $|x - y| < \delta$, tem-se $|f|_Y(x) - f|_Y(y)| < \varepsilon$. Com isso, $f|_Y$ é contínua em $y \in Y$. $\square$

Exemplo 6.11. No exemplo 6.8, vimos que a função seno é contínua em $\mathbb{R}$. Assim sendo, pela proposição 6.1, seno é uma função contínua em $[-\pi/2, \pi/2]$.

Teorema 6.1. *Sejam $X \subseteq Y_1 \cup Y_2$, onde Y_1, Y_2 são fechados, e $f : X \to \mathbb{R}$. Se $f|_{X\cap Y_1}$ e $f|_{X\cap Y_2}$ são contínuas, então $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua.*

Demonstração. Vamos mostrar que f é contínua em $y \in X \subseteq Y_1 \cup Y_2$. Assim, ou $y \in Y_1$ e $y \notin Y_2$, ou $y \in Y_2$ e $y \notin Y_1$, ou $y \in Y_1 \cap Y_2$. Se $y \in Y_1$ e $y \notin Y_2$, então, como $f|_{X\cap Y_1}$ é contínua, existe $\delta_1 > 0$ tal que $\forall\ x \in X \cap Y_1$ com $|x - y| < \delta_1$, tem-se $|f|_{X\cap Y_1}(x) - f|_{X\cap Y_1}(y)| < \varepsilon$. Por outro lado, como $y \notin Y_2 = \overline{Y_2}$, então, pelo Teorema 4.7, existe $\delta_2 > 0$ tal que $(y - \delta_2, y + \delta_2) \cap Y_2 = \emptyset$. Ou seja, se $|x - y| < \delta_2$, logo $x \notin Y_2$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Com isso, $\forall\ x \in X$ com $|x - y| < \delta \leq \delta_1, \delta_2$, tem-se que $x \notin Y_2$ e, consequentemente, $x \in Y_1$. Portanto, $x \in X \cap Y_1$ e $|x-y| < \delta_1$. Assim sendo, $|f(x) - f(y)| = |f|_{X\cap Y_1}(x) - f|_{X\cap Y_1}(y)| < \varepsilon$. O caso $y \in Y_2$ e $y \notin Y_1$ é análogo. Agora, se $y \in Y_1 \cap Y_2$, então existem $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ tais que $\forall\ x \in X \cap Y_1$ com $|x - y| < \lambda_1$, tem-se $|f|_{X\cap Y_1}(x) - f|_{X\cap Y_1}(y)| < \varepsilon$ e $\forall\ x \in X \cap Y_2$ com $|x - y| < \lambda_2$, tem-se $|f|_{X\cap Y_2}(x) - f|_{X\cap Y_2}(y)| < \varepsilon$ ($f|_{X\cap Y_1}$ e $f|_{X\cap Y_2}$ são contínuas). Neste caso, seja $\delta = \min\{\lambda_1, \lambda_2\} > 0$. Dessa forma, $\forall\ x \in X$ com $|x - y| < \delta \leq \lambda_1, \lambda_2$, tem-se $x \in X \cap Y_1$ e $|x - y| < \delta \leq \lambda_1$, logo $|f(x) - f(y)| = |f|_{X\cap Y_1}(x) - f|_{X\cap Y_1}(y)| < \varepsilon$, ou $x \in X \cap Y_2$ e $|x - y| < \delta \leq \lambda_2$, logo $|f(x) - f(y)| = |f|_{X\cap Y_2}(x) - f|_{X\cap Y_2}(y)| < \varepsilon$. Por fim, f é contínua em X. $\square$

Exemplo 6.12. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por: $f(x) = x$, se $x \geq 1$ e $f(x) = 3x - 2$, se $x \leq 1$. Assim, $f|_{(-\infty,1]}$ e $f|_{[1,\infty)}$ são contínuas (ver Teorema 6.1), onde $(-\infty, 1]$ e $[1, \infty)$ são conjuntos fechados (ver Teorema 4.3) e $\mathbb{R} = (-\infty, 1] \cup [1, \infty)$. Logo, f é contínua.

Teorema 6.2. *Sejam $X \subseteq \bigcup_{\mu\in F} Y_\mu$, onde Y_μ é aberto, $\forall\ \mu \in F$, $F \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto de índices qualquer, e $f : X \to \mathbb{R}$. Se $f|_{X\cap Y_\mu}$ é contínua $\forall\ \mu \in F$, então f é contínua em X.*

Demonstração. Seja $y \in X \subseteq \bigcup_{\mu\in F} Y_\mu$. Vamos provar que f é contínua em y. Assim sendo, existe $\mu_0 \in F$ tal que $y \in Y_{\mu_0}$. Por outro lado, Y_{μ_0} é aberto, consequentemente, existe $\delta_1 > 0$ tal que $(y - \delta_1, y + \delta_1) \subseteq Y_{\mu_0}$. Ou seja, $\forall\ x \in X$ com $|x - y| < \delta_1$, tem-se $x \in Y_{\mu_0}$. Mas, $f|_{X\cap Y_{\mu_0}}$ é contínua em y. Portanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que $\forall\ x \in X \cap Y_{\mu_0}$ com $|x - y| < \delta_2$, tem-se $|f|_{X\cap Y_{\mu_0}}(x) - f|_{X\cap Y_{\mu_0}}(y)| < \varepsilon$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Por conseguinte, $\forall\ x \in X$, com $|x - y| < \delta \leq \delta_1, \delta_2$, segue-se que $x \in Y_{\mu_0}$ e $|x - y| < \delta_2$. Por fim, $|f(x) - f(y)| = |f|_{X\cap Y_{\mu_0}}(x) - f|_{X\cap Y_{\mu_0}}(y)| < \varepsilon$. Ou equivalentemente, f é contínua em $y \in X$. Isto nos diz que f é contínua em X. $\square$

Exemplo 6.13. Defina $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ por $f(x) = -x$, se $x < 0$ e $f(x) = x$, se $x > 0$. Como $f|_{(-\infty,0)}$ e $f|_{(0,\infty)}$ são contínuas nos abertos $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$, e $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, então f é contínua em $\mathbb{R}^*$.

Exemplo 6.14. Seja $X = \mathbb{R} = (-\infty, 1) \cup [1, \infty)$. Observe que $(-\infty, 0)$ é aberto e $[0, \infty)$ é fechado (ver Teorema 4.3). É possível construir uma função descontínua tal que suas restrições $f|_{(-\infty,1)}$ e $f|_{[1,\infty)}$ são contínuas nos seus respectivos domínios. Por exemplo, seja $f : X \to \mathbb{R}$ por $f(x) = x$, se $x \in (-\infty, 1)$ e $f(x) = x - 1$, se $x \in [1, \infty)$. Esta função f é descontínua em 1, pois $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x = 1 \neq 0 = \lim\limits_{x\to 1^+} (x - 1) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ (ver Teorema 5.10). Ou seja $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1) = 0$.

Uma outra maneira de definir função contínua em um ponto está exposta no

Teorema 6.3 (Caracterização de Continuidade)**.** $f : X \to \mathbb{R}$ *é contínua em* $y \in X \Leftrightarrow$ $\forall\ (x_n) \subseteq X$ *com* $\lim x_n = y$*, tem-se* $\lim f(x_n) = f(y)$.

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que f é contínua em $y \in X$. Seja $(x_n) \subseteq X$ com $\lim x_n = y$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall\ x \in X$ com $|x - y| < \delta$, tem-se $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Como $\lim x_n = y$, então $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq N$, tem-se $x_n \in (y - \delta, y + \delta)$. Ou seja, $|x_n - y| < \delta$. Daí, $\forall\ n \geq N$, concluímos que $|f(x_n) - f(y)| < \varepsilon$. Isto é, $\lim f(x_n) = f(y)$.
$\Leftarrow$) Suponha que f é descontínua em $y \in X$. Assim $\exists\ \varepsilon > 0$, tal que $\forall\ \delta > 0$, encontra-se $x_\delta \in X$ com $|x_\delta - y| < \delta$ e $|f(x_\delta) - f(y)| \geq \varepsilon$. Faça $\delta = 1, \dfrac{1}{2}, ..., \dfrac{1}{n}, ...$ com $n \in \mathbb{N}$. Portanto, existe $(x_n) \subseteq X$ tal que $0 \leq |x_n - y| < \dfrac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(y)| \geq \varepsilon$. Pelo Teorema do Sanduíche, temos que $\lim x_n = y$ (ver exemplo 2.6) e $|f(x_n) - f(y)| \geq \varepsilon$. Se $\lim f(x_n) = f(y)$ teríamos então que $0 = \lim |f(x_n) - f(y)| \geq \varepsilon$. Ou seja, $\varepsilon \leq 0$. Dessa forma, $\lim f(x_n) \neq f(y)$. $\square$

Exemplo 6.15. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$, se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$, se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (f é chamada função característica de $\mathbb{Q}$). Seja $x \in \mathbb{Q}$. Assim, Pelo exemplo 4.15, temos que $x \in \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$. Ou seja, $\exists\ (x_n) \subseteq (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ tal que $\lim x_n = x$. Por outro lado, $\lim f(x_n) = \lim 0 = 0 \neq 1 = f(x)$, pois $x \in \mathbb{Q}$ e $(x_n) \subseteq (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Pelo Teorema 6.3, temos que f é descontínua em $x \in \mathbb{Q}$. Como $x \in \mathbb{Q}$ é arbitrário, então f é descontínua em $\mathbb{Q}$. Analogamente, f é descontínua em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Portanto, f é uma função descontínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$.

Teorema 6.4. *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas em $y \in X$ tais que $f(y) > g(y)$, então $\exists\ \delta > 0$ tal que $\forall\ x \in X$ com $|x - y| < \delta$, tem-se $f(x) > g(x)$.*

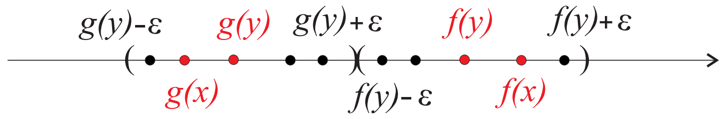

Figura 6.3: Idéia da demonstração

Demonstração. Seja $\varepsilon = \dfrac{f(y) - g(y)}{2} > 0$. Assim, $2\varepsilon = f(y) - g(y)$. Daí, $g(y) + \varepsilon = f(y) - \varepsilon$. Como f, g são contínuas em $y \in X$, então existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que $\forall\ x \in X$ com $|x - y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ e $\forall\ x \in X$ com $|x - y| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Portanto, $\forall\ x \in X$ com $|x - y| < \delta \leq \delta_1, \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ e $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$. Assim sendo, $f(y) - \varepsilon < f(x) < f(y) + \varepsilon$ e $g(y) - \varepsilon < g(x) < g(y) + \varepsilon$. Consequentemente, $\forall\ x \in X$ com $|x - y| < \delta$, tem-se $f(x) > f(y) - \varepsilon = g(y) + \varepsilon > g(x) \Rightarrow f(x) > g(x)$. □

Corolário 6.5 (Permanência de Sinal)**.** *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínuas em $y \in X$ tal que $f(y) > 0$ (respectivamente, < 0), então $\exists\ \delta > 0$ tal que $\forall\ x \in X$ com $|x - y| < \delta$, tem-se $f(x) > 0$ (respectivamente, < 0).*

Demonstração. Defina $g : X \to \mathbb{R}$ por $g(x) = 0$. Assim, g é constante. Logo, g é contínua (ver exemplo 6.4) e $g(y) = 0 < f(y)$ (respectivamente, $g(y) = 0 > f(y)$). Dessa forma, usando o Teorema 6.4, temos que $\exists\ \delta > 0$ tal que $\forall\ x \in X$ com $|x - y| < \delta$, tem-se $f(x) > g(x) = 0$ (respectivamente, $f(x) < g(x) = 0$). □

Exemplo 6.16. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções contínuas com $g(y) \neq 0$, para algum $y \in X$. Assim, pelo Corolário 6.5, temos que existe $\delta > 0$ tal que $\forall\ x \in X$ com $|x - y| < \delta$, tem-se $g(x) \neq 0$. Considere a função $f/g : D \to \mathbb{R}$ definida por $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$, $\forall\ x \in D$. Observe que o domínio D desta função contém somente pontos em que g não se anula. Dessa forma, qualquer $x \in X$ com $|x - y| < \delta$ está em D. Ou seja, $X \cap (y - \delta, y + \delta) \subseteq D$.

Exercícios de Fixação

1. Estabeleça, através da definição 6.2, quando uma função é descontínua em um ponto do seu domínio.

2. Seja $b \in (a, c)$. Suponha que f e g sejam contínuas em $[a, b]$ e $[b, c]$, respectivamente. Considere que $f(b) = g(b)$. Defina $h : [a, c] \to \mathbb{R}$ por $h(x) = f(x)$, para $x \in [a, b]$ e $h(x) = g(x)$, para $x \in (b, c]$. Prove que h é contínua em $[a, c]$.

3. Seja f definida por $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$, para $x \neq 2$. f pode ser definida em $x = 2$ de forma que f seja contínua em 2?

4. Sejam $k > 0$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$. Prove que f é contínua.

5. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = 2x$, se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = x + 3$, se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Encontre todos os pontos em que f é contínua.

6.3 Operações Elementares de Funções Contínuas

Teorema 6.6 (Operações Elementares de Funções Contínuas)**.** *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções contínuas em $y \in X$. Então são verdadeiras as seguintes afirmações:*

i) *A função $f + g : X \to \mathbb{R}$ é contínua em $y \in X$, em palavras, a soma de funções contínuas em y é contínua em y;*

ii) *A função $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ é contínua em $y \in X$, em palavras, o produto de funções contínuas em y é contínua em y;*

iii) *A função $f/g : D \to \mathbb{R}$ é contínua em $y \in X$ (ver exemplo 6.16), em palavras, a divisão de funções contínuas em y é contínua em y (D é o conjunto onde g não se anula);*

Demonstração. Sendo $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas em $y \in X$, tem-se, pelo Teorema 6.3, que $\forall\ (x_n) \subseteq X$ tal que $\lim x_n = y$, conclui-se $\lim f(x_n) = f(y)$ e $\lim g(x_n) = g(y)$. Dessa forma, utilizando o Teorema 2.11,
i) $\lim(f + g)(x_n) = \lim[f(x_n) + g(x_n)] = \lim f(x_n) + \lim g(x_n) = f(y) + g(y) = (f + g)(y)$. Portanto, usando, novamente, o Teorema 6.3, temos que $f + g$ é contínua em $y \in X$.
ii) $\lim(f \cdot g)(x_n) = \lim[f(x_n) \cdot g(x_n)] = \lim f(x_n) \cdot \lim g(x_n) = f(y) \cdot g(y) = (f \cdot g)(y)$.
iii) Pelo exemplo 6.16, temos que $\exists\ \delta > 0$ tal que $X \cap (y - \delta, y + \delta) \subseteq D$. Assim sendo, basta analisar a continuidade de $f/g : D \to \mathbb{R}$ em $X \cap (y - \delta, y + \delta)$, pois a continuidade num ponto é uma propriedade local. Portanto, $\lim(f/g)(x_n) = \lim[f(x_n)/g(x_n)] = \lim f(x_n)/\lim g(x_n) = f(y)/g(y) = (f/g)(y)$. Ou seja, f/g é contínua em $y \in X$. □

Obs 6.5. Os itens **i)** e **ii)** do Teorema 6.6 podem ser generalizados para uma quantidade finita de funções contínuas. Ou seja, se $f_1, f_2, ..., f_n$ são contínuas então $f_1 + f_2 + ... + f_n$ e $f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_n$ são contínuas.

Obs 6.6. Observe que segue do Teorema 6.6 **ii)** que se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em $y \in X$, então $cf : X \to \mathbb{R}$ também é, onde $c \in \mathbb{R}$ é constante. Já que toda função constante é contínua. Note também que, se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são contínuas em $y \in X$, então $f - g : X \to \mathbb{R}$ também é, pois $f - g = f + (-g)$ (ver Teorema 6.6).

Obs 6.7. Segue diretamente do Teorema 6.6 e observação 6.6 que se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são contínuas e $c \in \mathbb{R}$ então $f \pm g, f \cdot g, f/g, cf$ são contínuas nos seus respectivos domínios (ver exemplo 6.16).

Exemplo 6.17. Defina $\tan : X \to \mathbb{R}$ por $\tan x = \dfrac{\text{sen} x}{\cos x}$, $\forall\ x \in X$, onde $X = (\mathbb{R} \setminus \{(2z + 1)\pi/2 : z \in \mathbb{Z}\})$. Como tan é a divisão de funções contínuas, então tan é contínua em X.

Teorema 6.7 (Composta de Contínua)**.** *Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $y \in X$, tal que $f(X) \subseteq Y$. Seja $g : Y \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $f(y) \in Y$. Então $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em $y \in X$.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\lambda > 0$ tal que $\forall\ z \in Y$ com $|z - f(y)| < \lambda$, tem-se $|g(z) - g(f(y))| < \varepsilon$, pois g é contínua em $f(y) \in Y$. Por outro lado, como f é contínua em $y \in X$, temos que $\exists\ \delta > 0$ tal que $\forall\ x \in X$ com $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \lambda$. Pelo que foi feito acima, $|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(y)| = |g(f(x)) - g(f(y))| < \varepsilon$. Ou seja, $g \circ f$ é contínua em $y \in X$. $\square$

Obs 6.8. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua em X, tal que $f(X) \subseteq Y$. Seja $g : Y \to \mathbb{R}$ uma função contínua em Y. Então, pelo Teorema 6.7, $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em X.

Exemplo 6.18. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Vamos mostrar que f é contínua. Com efeito, f é produto das funções contínuas x (polinômio) e $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$, a qual é a composta de cosseno e $\frac{1}{x}$ (divisão de contínuas), quando $x \neq 0$. Portanto, pelos Teoremas 6.6 e 6.7, f é contínua em $x \neq 0$. Vamos agora verificar que f é contínua em 0. De fato, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$, pois $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ e $\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$, $\forall\ x \neq 0$ (ver Teorema 5.8). Portanto, f é contínua em 0. Com isso, f é contínua.

Exercícios de Fixação

1. Mostre que se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua, então $f^n : X \to \mathbb{R}$, dada por $f^n(x) = [f(x)]^n$ $(n \in \mathbb{N})$, é contínua.

2. Dê um exemplo de funções f, g descontínuas em $y \in \mathbb{R}$ tais que $f + g$ e $f \cdot g$ sejam contínuas em y.

3. Dê um exemplo de uma função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ descontínua em todos os pontos de $[0, 1]$, de modo que $|f|$ seja contínua em $[0, 1]$.

4. Sejam f, g contínuas em $\mathbb{R}$ e $X = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq g(x)\}$. Mostre que X é fechado.

6.4 Funções Contínuas Sobre Intervalos

Para o próximo resultado utilizaremos a definição de cisão de um conjunto (ver definição 4.6). O leitor que não lembra de tal definição está convidado a voltar no conteúdo recuperar esta teoria.

Teorema 6.8 (Teorema do Valor Intermediário)**.** *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $c \in \mathbb{R}$. Se $f(a) < c < f(b)$, então existe $x \in (a,b)$ tal que $f(x) = c$.*

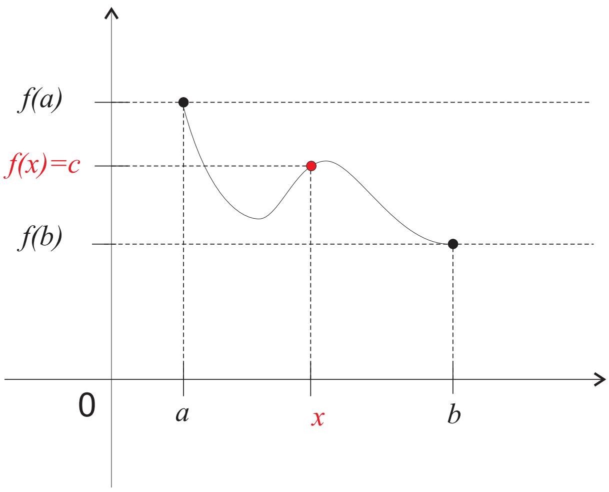

Figura 6.4: Teorema do Valor Intermediário

Demonstração. Considere os seguintes conjuntos: $A = \{y \in [a,b] : f(y) \leq c\}$ e $B = \{y \in [a,b] : f(y) \geq c\}$. Vamos mostrar que A e B são fechados. De fato, seja $y \in \overline{A}$ (respectivamente, $y \in \overline{B}$), assim existe $(x_n) \subseteq A$ (respectivamente, $\subseteq B$) tal que $\lim x_n = y$. Como f é contínua, então $\lim f(x_n) = f(y)$. Mas $f(x_n) \leq c$ (respectivamente, $f(x_n) \geq c$), pois $x_n \in A$ (respectivamente, $x_n \in B$), $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Portanto, $f(y) = \lim f(x_n) \leq c$ (respectivamente, $f(y) \geq c$). Portanto, $y \in A$ (respectivamente, $y \in B$). Ou seja, A é fechado (respectivamente, B é fechado). Portanto, $A \cap B = \overline{A} \cap B = A \cap \overline{B}$. Como $a \in A$ e $b \in B$, então $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$. Observe também que $[a,b] = A \cup B$. Se $A \cap B = \emptyset$, então $(A|B)$ é uma cisão não-trivial de $[a,b]$ (este é não-degenerado, pois $f(a) < f(b)$, ou seja, $a \neq b$). Mas, pelo Teorema 4.5, o intervalo $[a,b]$ só admite cisão trivial. Logo, $A \cap B \neq \emptyset$. Ou seja, $\exists\ x \in A$ e $x \in B$. Isto é, $f(x) \leq c$ e $f(x) \geq c$, com $x \in [a,b]$. Portanto, $f(x) = c$. Como $f(a) < c = f(x) < f(b)$, então $x \neq a$ e $x \neq b$. Por fim, $\exists\ x \in (a,b)$ tal que $f(x) = c$. $\square$

Exemplo 6.19. Considere o polinômio $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$. Mostraremos que p possui uma raiz em $(1, 3)$. De fato, $p(3) = -1 < 0 < 3 = p(1)$. Pelo Teorema 6.8, existe $x \in (1, 3)$ tal que $p(x) = 0$. Ou seja, existe $x \in (1, 3)$ raiz de p.

Exemplo 6.20. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Considere que $f(0) = f(1)$. Vamos mostrar que existe $x \in [0, 1/2]$ tal que $f(x) = f(x+1/2)$. Defina $g : [0, 1/2] \to \mathbb{R}$ por $g(y) = f(y) - f(y+1/2)$. Assim, pelos Teormas 6.6 e 6.7, g é contínua em $[0, 1/2]$. Observe que, $g(0) = f(0)-f(1/2)$ e $g(1/2) = f(1/2)-f(1) = f(1/2)-f(0)$. Ou seja, $g(0) = -g(1/2)$. Dessa forma, se $g(0) = 0$, então $f(0) - f(0 + 1/2) = 0$. Ou seja, $f(0) = f(0 + 1/2)$. Considere $x = 0 \in [0, 1/2]$. O problema está solucionado. Se $g(0) \neq 0$, então pelo fato que $g(0) = -g(1/2)$, tem-se que $g(0)$ e $g(1/2)$ tem sinais opostos. Sem perda de generalidade, suponha $g(0) < 0 < g(1/2)$. Com isso, pelo Teorema 6.8, existe $x \in (0, 1/2)$ tal que $g(x) = 0$. Isto é, $f(x) - f(x + 1/2) = 0$. Ou equivalentemente, $f(x) = f(x + 1/2)$.

Corolário 6.9 (Imagem Contínua de Intervalo é Intervalo)**.** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua, onde $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo. Então $f(I) = \{f(x) : x \in I\} \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo.*

Demonstração. Suponha, primeiramente, que f é uma função constante (contínua), isto é, $f(x) = \gamma =$ constante, $\forall\, x \in I$. Assim $f(I) = \{f(x) : x \in I\} = \{\gamma\} = [\gamma, \gamma]$. Ou seja, $f(I)$ é um intervalo degenerado. Considere, então, que f é não-constante. Se $f(I) \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto ilimitado inferiormente (respectivamente, superiormente) denote $\inf f(I) = -\infty$ (respectivamente, $\sup f(I) = \infty$). Como f é não-constante, então existem $f(\alpha) < f(\beta)$, com $\alpha, \beta \in I$. Logo, $\inf f(I) \leq f(\alpha) < f(\beta) \leq \sup f(I)$. Ou seja, $\inf f(I) < \sup f(I)$. Seja $c \in (\inf f(I), \sup f(I))$. Com isso, $\inf f(I) < c < \sup f(I)$. Pelas definições 1.12 e 1.11, existem $a, b \in I$ tais que $\inf f(I) \leq f(a) < c < f(b) \leq \sup f(I)$. Como f é contínua, então, utilizando o Teorema 6.8, existe $x \in (a, b) \subseteq I$ tal que $f(x) = c$. Dessa forma, $c \in f(I)$. Dessa forma, $(\inf f(I), \sup f(I)) \subseteq f(I)$. Dessa maneira, $f(I)$ é um intervalo com extremos $\inf f(I)$ e $\sup f(I)$. □

Obs 6.9. Não é possível dizer exatamente que tipo de intervalo é o intervalo $f(I)$ no Corolário 6.9, pois $\inf f(I), \sup f(I)$ podem estar ou não em $f(I)$. Por exemplo, considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos x$. Assim, $f((0, \pi/2)) = (0, 1)$, $f((-\pi/2, \pi/2)) = (0, 1]$ e $f((-4, 4)) = [-1, 1]$.

Exemplo 6.21 (Existência e Unicidade da Raiz n-ésima)**.** Defina $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ por $f(x) = x^n$. Sabemos que f é contínua (ver exemplo 5.8). Veja que $f(0) = 0$. Daí, pelo Corolário 6.9, temos que $f([0,\infty))$ é um intervalo contendo 0 contido em $[0,\infty)$ (contradomínio). Como , $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^n = \infty$, logo dado $A \in (0,\infty)$ existe $B > 0$ tal que $\forall\ x \in [0,\infty)$ com $x > B$, tem-se $f(x) > A$. Dessa forma, $f(2B) > A > 0 = f(0)$. Como $f([0,\infty))$ é um intervalo e $f(0) = 0$, então existe $x \in [0,\infty)$ tal que $f(x) = A$. Ou seja, $A \in f([0,\infty))$. Portanto, $f([0,\infty)) = [0,\infty)$. Isto é, f é sobrejetiva. Agora, sejam $x, y \in [0,\infty)$ com $x < y$, então $x^n < y^n$, isto é, $f(x) < f(y)$. Dessa maneira, f é injetiva. Assim, f é uma bijeção. Isto nos diz que dado $y \geq 0$, $\exists!\ x \geq 0$ tal que $f(x) = y$. Ou seja, $x^n = y$. Neste caso, dizemos que x é a única raiz n-ésima de y e escrevemos $x = \sqrt[n]{y}$.

Definição 6.3 (Homeomorfismo)**.** Considere que $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que uma função bijetora $f : X \to Y$ é um homeomorfismo se f e f^{-1} são contínuas.

Exemplo 6.22. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 1$. A função $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f^{-1}(y) = y - 1$ é a inversa de f. Logo, f é bijetiva. Observe que f e f^{-1} são funções polinomiais. Consequentemente, estas funções são contínuas (ver exemplo 5.8). Portanto, f é um homeomorfismo.

Exemplo 6.23. Sejam $X = [0,1) \cap [2,3]$ e $Y = [1,3]$. Defina $f : X \to Y$ por $f(x) = x + 1$, se $x \in [0,1)$ e $f(x) = x$, se $x \in [2,3]$. f é contínua (ver exemplo 5.8). Verifique que $f^{-1}(y) = y - 1$, se $y \in [1,2]$ e $f^{-1}(y) = y$, se $y \in [2,3]$, é a inversa de f. Ou seja, f é bijetiva. Por outro lado, f^{-1} é descontínua em $2 \in Y$. De fato, $\lim_{y\to 2^-} f^{-1}(y) = \lim_{y\to 2^-} (y - 1) = 1 \neq 2 = f^{-1}(2)$.

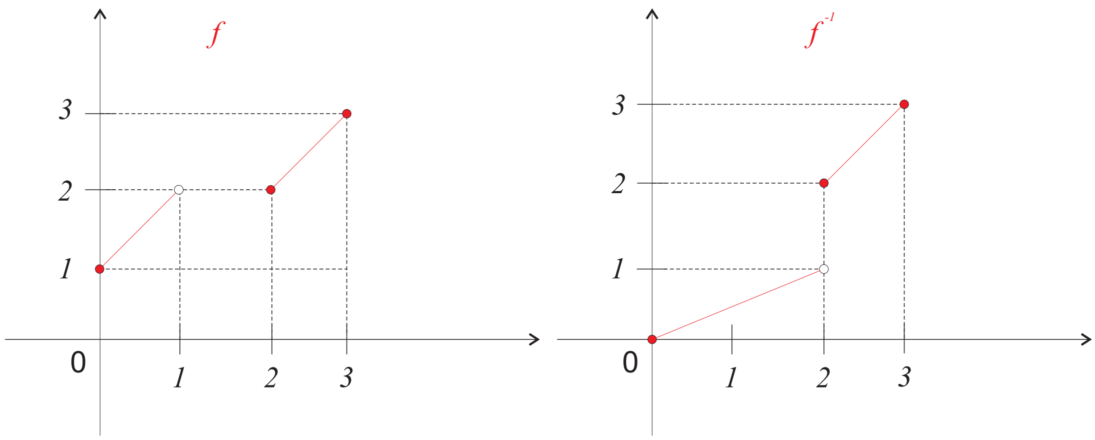

Figura 6.5: Não-homeomorfismo

Exercícios de Fixação

1. Mostre que a equação $x = \cos x$ tem solução no intervalo $[0, \pi/2]$. **Sugestão**: defina $f(x) = x - \cos x$ e use o Teorema 6.8.

2. Mostre que a função $f(x) = 2\ln x + \sqrt{x} - 2$ tem solução no intervalo $[1, 2]$ (ver definição 10.1).

3. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e assuma que $f(a) < 0 < f(b)$. Seja $X = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$. Mostre que $f(\sup X) = 0$. **Sugestão**: use o Teorema 6.5. Esta questão mostra outra maneira de provar o Teorema 6.8.

4. Examine a imagem de intervalos abertos e fechados através da função $f(x) = x^3$.

6.5 Funções Reais Contínuas Definidas em Compactos

Teorema 6.10 (Imagem Contínua de Compacto é Compacto)**.** *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua, onde $X \subseteq \mathbb{R}$ é compacto. Então, $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ é compacto.*

Demonstração. Vamos utilizar os Teoremas 4.9 e 6.3. Seja $(y_n) \subseteq f(X)$. Vamos provar que (y_n) possui uma subsequência que converge para um ponto de $f(X)$. Assim, $\exists\ (x_n) \subseteq X$ tal que $f(x_n) = y_n,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Como $(x_n) \subseteq X$ e X é compacto, então, usando o Teorema 4.9, existe (x_{n_k}) subsequência de (x_n) tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in X$. Como f é contínua, então, utilizando o Teorema 6.3, $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x) \in f(X)$. Assim, (y_{n_k}) é uma subsequência de (y_n) que converge para $f(x) \in f(X)$. Novamente usando o Teorema 4.9, temos que $f(X)$ é compacto. $\square$

Obs 6.10. Veja que o Teorema 6.10 nos diz que se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua, onde X é compacto, então f é limitada. Ou seja, $f(X)$ é limitado (ver definição 4.11).

Exemplo 6.24. A compacidade não pode ser retirada da hipótese do Teorema 6.10. De fato, considere a função $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Note que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$. Assim, $f((0,1))$ é ilimitado. Isto ocorre, pois $(0,1)$ não é compacto (limitado, mas não-fechado).

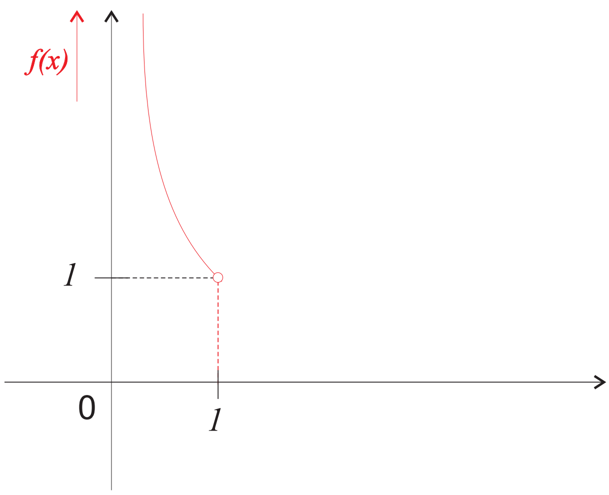

Figura 6.6: Função não-limitada

Teorema 6.11 (Teorema de Weierstrass)**.** *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua, onde $X \subseteq \mathbb{R}$ é compacto. Então existem $a, b \in X$ tais que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, $\forall\, x \in X$.*

Demonstração. Pelo Teorema 6.10, $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ é compacto. Assim sendo, $f(X)$ é fechado e limitado. Vimos no exemplo 4.12 que $\inf f(X), \sup f(X) \in \overline{f(X)} = f(X)$. Assim, existem $a, b \in X$ tais que $\inf f(X) = f(a)$ e $\sup f(X) = f(b)$. Portanto, pelas definições 1.11 e 1.12, temos que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, $\forall\, x \in X$. $\square$

Exemplo 6.25. A função $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ é contínua e $f((-1, 1)) = (-1, 1)$. Ou seja, f é limitada. Por outro lado, não existe $a \in (-1, 1)$ tal que $a = f(a) \leq f(x) = x$, $\forall\, x \in (-1, 1)$. Caso contrário, para $x = -1$, $a \leq -1$. Ou seja, $-1 < a \leq -1$. Isto é um absurdo. Analogamente, não existe $b \in (-1, 1)$ tal que $x \leq b$, $\forall\, x \in (-1, 1)$. Isto não contradiz o Teorema de Weierstrass, pois $(-1, 1)$ não é compacto.

Teorema 6.12. *Seja $f : X \to Y$ uma bijeção contínua, onde $X \subseteq \mathbb{R}$ é compacto e $Y \subseteq \mathbb{R}$. Então f é um homeomorfismo.*

Demonstração. Vendo a definição 6.3, basta provar que $f^{-1} : Y \to X$ é contínua. Seja $y \in Y$. Como f é bijetiva, então $y \in Y = f(X)$. Portanto, existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$. Suponha, por absurdo, que f^{-1} não é contínua em $y \in Y$. Assim, $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $\forall\, \delta > 0$, pode-se encontrar $y_\delta \in Y$ tal que $|y_\delta - y| < \delta$ e $|f^{-1}(y_\delta) - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon$. Faça, $\delta = 1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...$ Com isso, existe $(y_n) \subseteq Y$ tal que $0 \leq |y_n - y| < \frac{1}{n}$ e $|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon$. Observe que $(y_n) \subseteq Y = f(X)$. Assim, existe $(x_n) \subseteq X$ tal que $f(x_n) = y_n$. Portanto, $0 \leq \lim |y_n - y| \leq \lim \frac{1}{n} = 0$ e $|x_n - x| = |f^{-1}(f(x_n)) - f^{-1}(f(x))| \geq \varepsilon$. Ou seja, $\lim f(x_n) = \lim y_n = y = f(x)$ e $|x_n - x| \geq \varepsilon$. Como X é compacto, usando o Teorema 4.9, temos que existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a \in X$. Como f é contínua, então $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(a) \in X$. Por outro lado, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x) \in X$ (ver Teorema 2.2). Assim, $f(x) = f(a)$. Como f é injetiva, então $x = a$. Mas, $|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon$. Por conseguinte, $0 = |a - x| = \lim |x_{n_k} - x| \geq \varepsilon$. Isto contradiz o fato $\varepsilon > 0$. Dessa forma, f^{-1} é contínua. $\square$

Exemplo 6.26. A função seno é contínua em $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e bijetora. Pelo Teorema 6.12, a função inversa do seno, a qual é denotada por arcsen, é contínua em $[-1, 1]$.

Exercícios de Fixação

1. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(x) > 0$, $\forall\ x \in [a, b]$. Mostre que existe $y >$ tal que $f(x) \geq y$, $\forall\ x \in [a, b]$.

2. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que para cada $x \in [a, b]$ existe $y_x \in [a, b]$ que satisfaz $|2f(y_x)| \leq |f(x)|$. Prove que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

3. Seja $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sup\{x^2, \cos x\}$. Mostre que existe $y \in [0, \pi/2]$ tal que $f(y) \leq f(x)$, $\forall\ x \in [0, \pi/2]$. Mostre que y é solução da equação $x^2 = \cos x$.

6.6 Continuidade Uniforme em $\mathbb{R}$

Definição 6.4 (Continuidade Uniforme)**.** Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é uniformemente contínua, se $\forall\ \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\forall\ x, y \in X$ com $|x - y| < \delta$, tem-se $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

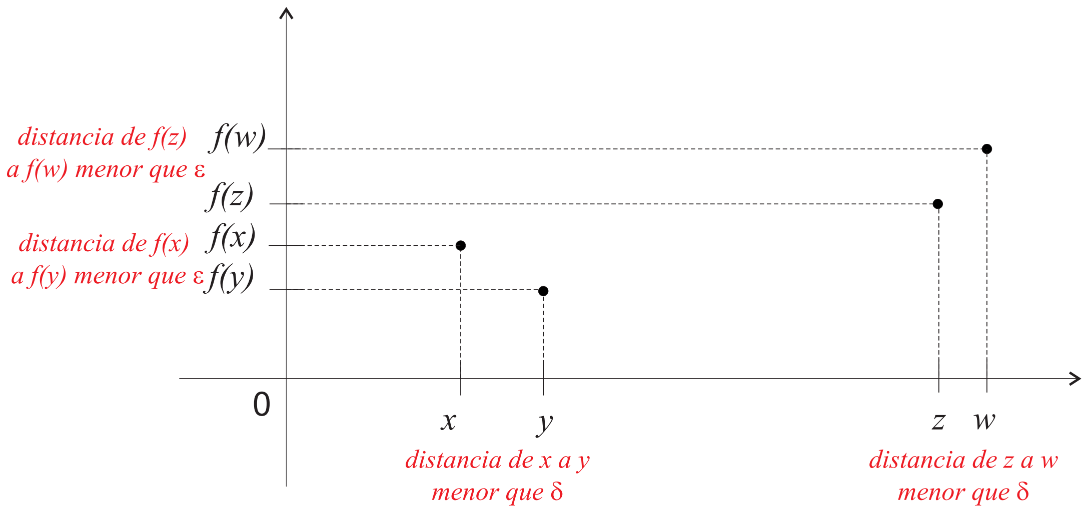

Figura 6.7: Continuidade uniforme

Obs 6.11. Na definição 6.4 δ depende somente de ε, i.e, $\delta = \delta(\varepsilon)$. A diferença entre continuidade uniforme e continuidade em um ponto está exatamente nesta dependência. Na continuidade em um ponto o δ depende também do ponto estudado.

Obs 6.12. Segue diretamente das definições 6.2 e 6.4 que toda função uniformemente contínua é contínua.

Vejamos que a recíproca da observação anterior não é verdadeira.

Exemplo 6.27. Seja $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Vimos que f é contínua (ver Teorema 6.6 e exemplo 5.8). Por outro lado, f não é uniformemente contínua. Com efeito, seja $\varepsilon = 1/2 > 0$, então $\forall\ \delta > 0$ existe $n_\delta \in \mathbb{N}$ tal que $n_\delta > \dfrac{1}{2\delta}$ (ver Teorema 1.2). Daí, $\dfrac{1}{n_\delta}, \dfrac{1}{2n_\delta} \in (0, \infty)$ e $\left|\dfrac{1}{n_\delta} - \dfrac{1}{2n_\delta}\right| = \left|\dfrac{1}{2n_\delta}\right| = \dfrac{1}{2n_\delta} < \delta$. Além disso, $\left|f\left(\dfrac{1}{n_\delta}\right) - f\left(\dfrac{1}{2n_\delta}\right)\right| = |n_\delta - 2n_\delta| = n_\delta \geq 1 > 1/2 = \varepsilon$. Ou seja, f não é uniformemente contínua.

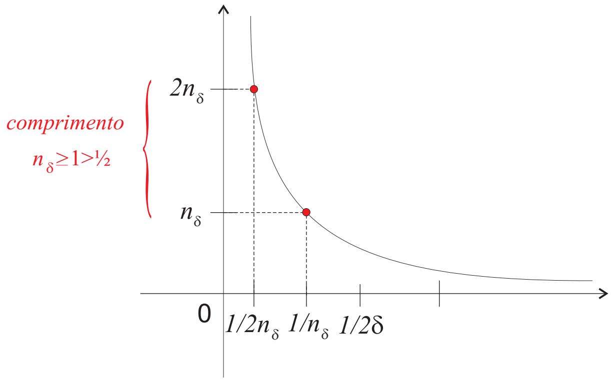

Figura 6.8: Função não uniformemente contínua

Obs 6.13. O exemplo aterior nos diz que a continuidade uniforme é um conceito global. Não é suficiente saber o que ocorre com a continuidade próximo a um ponto.

Exemplo 6.28. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ e b reais. Então $|f(x) - f(y)| = |ax + b - (ay + b)| = |a(x - y)| = |a||x - y|$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|} > 0$ tal que sempre que $|x - y| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$, tem-se $|f(x) - f(y)| = |a||x - y| < |a|\dfrac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon$. Ou seja, f é uniformemente contínua.

Definição 6.5 (Função Lipschitziana)**.** Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é uma função Lipschitziana se $\exists\ k > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$, $\forall\ x, y \in X$. Neste caso, k é chamada constante de Lipschitz para função f.

Obs 6.14. A constante de Lipschitz depende somente da função f, isto é, $k = k(f)$.

Exemplo 6.29. No exemplo 6.28 vimos que a função $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma função Lipschitziana com constante de Lipschitz $k = |a| > 0$.

Exemplo 6.30. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$. Afirmamos que f não é uma função Lipschitziana. De fato, considere $x, y \in [0, 1]$, com $x \neq y$. Assim sendo, $\dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = \dfrac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{|x - y|} = \left|\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}\right| = \left|\dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$. Assim sendo, considere as seguintes sequências $x_n = \dfrac{1}{n^2}$ e $y_n = \dfrac{1}{4n^2} \in [0, 1]$. Logo,

$$\frac{|f(x_n) - f(y_n)|}{|x_n - y_n|} = \frac{1}{\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{4n^2}}} = \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{1}{2n}} = \frac{2n}{3} \to \infty,$$

se $n \to \infty$. Portanto, dado $k > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{|f(x_n) - f(y_n)|}{|x_n - y_n|} > k$, $\forall\, n \geq N$. Ou seja, $|f(x_N) - f(y_N)| > k|x_N - y_N|$. Isto nos diz que f não é Lipschitziana.

Proposição 6.2. *Toda função Lipschitziana é uniformemente contínua.*

Demonstração. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função Lipschitziana com constante de Lipschitz $k > 0$. Vamos provar que f é uniformemente contínua. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, considere que $\delta = \varepsilon/k > 0$. Com isso, $\forall\, x, y \in X$ com $|x - y| < \delta = \varepsilon/k$, tem-se $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| < k\frac{\varepsilon}{k} < \varepsilon$. Ou seja, f é uniformemente contínua. $\square$

Exemplo 6.31. Defina $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Vimos que f não é uniformemente contínua. Logo, usando a Proposição 6.2, temos que f não é uma função Lipschitziana.

Vejamos agora uma outra maneira de definir função uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

Teorema 6.13 (Caracterização de Continuidade Uniforme)**.** *Seja* $X \subseteq \mathbb{R}$. $f : X \to \mathbb{R}$ *é uniformemente contínua* $\Leftrightarrow \forall\, (x_n), (y_n) \subseteq X$*, com* $\lim(x_n - y_n) = 0$*, tem-se* $\lim[f(x_n) - f(y_n)] = 0$.

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que f é uniformemente contínua. Assim sendo, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $\forall\, x, y \in X$, com $|x - y| < \delta$, tem-se $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Sejam $(x_n), (y_n) \subseteq X$, com $\lim(x_n - y_n) = 0$. Dessa forma, para $\delta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geq N$, tem-se $|x_n - y_n| < \delta$. Portanto, $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq N$. Ou seja, $\lim[f(x_n) - f(y_n)] = 0$.
$\Leftarrow$) Suponha que f não é uniformemente contínua. Assim sendo, $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $\forall\, \delta > 0$, encontram-se $x_\delta, y_\delta \in X$ com $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ e $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$. Faça $\delta = 1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...$ Logo, existem $(x_n), (y_n) \subseteq X$ tais que $0 \leq |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Portanto, $0 \leq \lim |x_n - y_n| \leq \lim \frac{1}{n} = 0$. Ou seja, $\lim(x_n - y_n) = 0$. Se $\lim[f(x_n) - f(y_n)] = 0$, então $0 = \lim |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Mas, $\varepsilon > 0$. Por fim, $\lim[f(x_n) - f(y_n)] \neq 0$. $\square$

Exemplo 6.32. Vamos usar o Teorema 6.13, para mostrar que a função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \cos(x^2)$, não é uniformemente contínua. Considere a sequência $x_n = \sqrt{2n\pi}$ e $y_n = \sqrt{(2n+1)\pi}$. Assim sendo, $\lim(x_n - y_n) = \lim[\sqrt{2n\pi} - \sqrt{(2n+1)\pi}] = \lim \dfrac{2n\pi - (2n+1)\pi}{\sqrt{2n\pi} + \sqrt{(2n+1)\pi}} = \lim \dfrac{-\pi}{\sqrt{2n\pi} + \sqrt{(2n+1)\pi}} = 0$. Por outro lado, $\lim[f(x_n) - f(y_n)] = \lim[\cos(2n\pi) - \cos((2n+1)\pi)] = \lim(1 + 1) = 2 \neq 0$. Portanto, usando o Teorema 6.13, temos que f não é uniformemente contínua.

O Teorema a seguir acrescenta uma hipótese sobre o domínio de uma função contínua de forma que esta seja uniformemente contínua.

Teorema 6.14. *Toda função real contínua definida em um conjunto compacto é uniformemente contínua.*

Demonstração. Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponha, por absurdo, que f não é uniformemente contínua. Assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall\ \delta > 0$, encontram-se $x_\delta, y_\delta \in X$ com $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ e $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$. Faça, $\delta = 1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...$ Com isso, $\exists\ (x_n), (y_n) \in X$ tais que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Como X é compacto, então, usando o Teorema 4.9, existe (y_{n_k}) subsequência de (y_n) tal que $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = y \in X$. Como $0 \leq |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, então $0 \leq \lim |x_n - y_n| \leq \lim \frac{1}{n} = 0$. Dessa forma, $\lim[x_n - y_n] = 0$. Pelo Teorema 2.2, temos que $\lim[x_{n_k} - y_{n_k}] = 0$. Mas, $x_{n_k} = (x_{n_k} - y_{n_k}) + y_{n_k}$. Logo, $\lim x_{n_k} = \lim[x_{n_k} - y_{n_k}] + \lim y_{n_k} = 0 + y = y \in X$. Como f é contínua, usando o Teorema 6.3, temos que $\lim f(x_{n_k}) = \lim f(y_{n_k}) = y$. Por outro lado, $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$. Portanto, $0 = |y - y| = \lim |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$. Isto é um absurdo, pois $\varepsilon > 0$. Logo, f é uniformemente contínua. $\square$

Exemplo 6.33. Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ dada por $f(x) = x^2$. Vimos que f é uma bijeção contínua (ver exemplo 5.8). Como $[0,1]$ é compacto, então pelo Teorema 6.12 f é um homeomorfismo. Ou seja, f^{-1}, a qual é dada por $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $\forall\ x \in [0,1]$, é contínua. Mais que isso, pelo Teorema 6.14, f^{-1} é uniformemente contínua. Vimos que f^{-1} não é Lipschitziana. Isto mostra que a recíproca da Proposição 6.2 não é verdadeira.

Exemplo 6.34. Seja $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$. Vamos verificar que f é Lipschitziana. De fato, $\forall\ x, y \in [1,\infty)$, tem-se $x, y \geq 1$. Consequentemente, $\sqrt{x}, \sqrt{y} \geq 1$. Portanto, $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 1 + 1 = 2$. Ou seja, $\dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \dfrac{1}{2}$. Com isso, $|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \left|\dfrac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right| = \dfrac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \dfrac{1}{2}|x - y|$. Por fim, $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{1}{2}|x - y|$. Assim sendo, f é Lipschitziana com constante de Lipschitz $1/2$. Dessa forma, pela Proposição 6.2, f é uniformemente contínua em $[1,\infty)$.

Exemplo 6.35 (Continuidade da Raiz Quadrada)**.** Vimos acima que a função raiz quadrada é contínua em $[0,1]$ e $[1,\infty)$ (conjuntos fechados). Utilizando o Teorema 6.1, obtemos que a função raiz quadrada é uma função contínua.

A continuidade uniforme em $\mathbb{R}$ é preservada por operações elementares. Veja o

Teorema 6.15 (Operações com Continuidade Uniforme)**.** *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ uniformemente contínuas. Então:*

i) *$f + g$ é uniformemente contínua, ou em palavras, a soma de funções uniformemente contínuas é uniformemente contínua;*

ii) *fg é uniformemente contínua se f, g são limitadas, ou em palavras, o produto de duas funções uniformemente contínuas e limitadas é uniformemente contínua;*

iii) *se $|f(x)| \geq k > 0$, $\forall\ x \in X$, então $1/f$ é uniformemente contínua em X.*

Demonstração. Sejam $(x_n), (y_n) \subseteq X$ tais que $\lim(x_n - y_n) = 0$. Como f, g são uniformemente contínuas, então, usando o Teorema 6.13, concluímos que $\lim[f(x_n) - f(y_n)] = 0$ e $\lim[g(x_n) - g(y_n)] = 0$.
i) Veja que $\lim[(f+g)(x_n) - (f+g)(y_n)] = \lim[f(x_n) + g(x_n) - f(y_n) - g(y_n)] = \lim[f(x_n) - f(y_n) + g(x_n) - g(y_n)] = \lim[f(x_n) - f(y_n)] + \lim[g(x_n) - g(y_n)] = 0$. Logo, $f + g$ é uniformemente contínua, pelo Teorema 6.13.
ii) Suponha que f, g são limitadas. Então $(f(x_n))$ e $(g(x_n))$ são limitadas. Portanto, $\lim[(fg)(x_n) - (fg)(y_n)] = \lim[f(x_n)g(x_n) - f(y_n)g(y_n)] = \lim[f(x_n)g(x_n) - f(y_n)g(x_n) + f(y_n)g(x_n) - f(y_n)g(y_n)] = \lim[f(x_n) - f(y_n)]g(x_n) + f(y_n)[g(x_n) - g(y_n)] = \lim\{[f(x_n) - f(y_n)]g(x_n)\} + \lim\{f(y_n)[g(x_n) - g(y_n)]\} = 0$, pois $\lim[f(x_n) - f(y_n)] = 0$, $\lim[g(x_n) - g(y_n)] = 0$ e $(f(x_n)), (g(x_n))$ são limitadas (ver Teorema 2.10).
iii) Como $|f(x)| \geq k > 0$, $\forall\ x \in X$, então $1/|f(x)| \leq 1/k$, $\forall\ x \in X$. Portanto, $1/|f(x_n)|, 1/|f(y_n)| \leq 1/k$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Logo, $1/|f(x_n)f(y_n)| \leq 1/k^2$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Com isso, $(1/[f(x_n)f(y_n)])$ é limitada. Dessa forma, $\lim[1/f(x_n) - 1/f(y_n)] = \lim\left[\dfrac{f(y_n) - f(x_n)}{f(x_n)f(y_n)}\right] = 0$, pois $\lim[f(y_n) - f(x_n)] = -\lim[f(x_n) - f(y_n)] = 0$ e $(1/[f(x_n)f(y_n)])$ é limitada (ver Teorema 2.10). □

Exemplo 6.36. A função $f(x) = x + \sqrt{x}$ é uniformemente contínua em $[1, \infty)$, pois as funções $g(x) = x$ e $h(x) = \sqrt{x}$ são uniformemente contínuas em $[1, \infty)$ (ver exemplos 6.28 e 6.34)

Vimos no exemplo 6.24 que a imagem de um conjunto limitado por uma função contínua não é um conjunto limitado. Para que esta imagem seja limitada precisamos de uma hipótese mais forte. Veja o

Teorema 6.16. *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ limitado e $f : X \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua. Então f é limitada. Ou seja, $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ é limitado.*

Demonstração. Suponha que f é ilimitada inferiormente. Isto é, $f(X)$ é ilimitado inferiormente. Seja $x_1 \in X$. Dado $f(x_1) - 1 \in \mathbb{R}$, existe $x_2 \in X$ tal que $f(x_2) < f(x_1) - 1$. Indutivamente, existe $(x_n) \subseteq X$ tal que $f(x_{n+1}) < f(x_n) - 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Assim sendo, $f(x_{n+2}) < f(x_{n+1}) - 1 < f(x_n) - 1 - 1 < f(x_n) - 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Portanto, seguindo este processo, encontramos $f(x_m) < f(x_n) - 1$, se $m > n$. Como X é limitado, então $(x_n) \subseteq X$ é limitada. Pelo Teorema 4.8, existe (x_{n_k}) subsequência de (x_n) tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Assim, $\lim\limits_{k\to\infty} [x_{n_{k+1}} - x_{n_k}] = x - x = 0$. Por outro lado, $f(x_{n_k}) - f(x_{n_{k+1}}) > 1$ $(n_k < n_{k+1})$. Como f é uniformemente contínua, então $0 = \lim\limits_{k\to\infty} [f(x_{n_k}) - f(x_{n_{k+1}})] \geq 1$. Absurdo! Ou seja, f é limitada inferiormente. Analogamente, prova-se que f é limitada superiormente. □

Corolário 6.17. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua e $y \in X'$. Então $\lim\limits_{x\to y} f(x)$ existe.*

Demonstração. Vamos utilizar o Teorema 5.5. Como $y \in X'$, então existe $(x_n) \subseteq (X \setminus \{y\})$ com $\lim x_n = y$. Pelo Teorema 2.3 temos que (x_n) é limitada. Com f é uniformemente contínua, então, usando o Teorema 6.16, temos que $(f(x_n))$ é limitada. Pelo Teorema 4.8, existe $(f(x_{n_k}))$ subsequência de $(f(x_n))$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = l$. Seja $(y_n) \subseteq (X \setminus \{y\})$ tal que $\lim y_n = y$. Então, $\lim(x_n - y_n) = \lim x_n - \lim y_n = y - y = 0$. Como f é uniformemente contínua, então pelo Teorema 6.13, temos que $\lim[f(x_n) - f(y_n)] = 0$. Dessa forma, $\lim[f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})] = 0$ (ver Teorema 2.2). Mas, $f(y_{n_k}) = [f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})] + f(x_{n_k})$. Logo, $\lim\limits_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} [f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})] + \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = 0 + l = l$. Portanto, $\lim\limits_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = l$. Dessa forma, $\lim\limits_{x\to y} f(x) = l$, usando o Teorema 5.5. □

Exemplo 6.37. Defina $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Vimos que $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ não existe. Assim sendo, f não é uniformemente contínua pelo Corolário 6.17.

Exercícios de Fixação

1. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua e $(x_n) \subseteq X$ é uma sequência de Cauchy, então $(f(x_n)) \subseteq \mathbb{R}$ é uma sequência de Cauchy.

2. Mostre que $f(x) = 1/x$ é uniformemente contínua sobre $Y = [y, \infty)$, onde $y > 0$.

3. Mostre que a função $f(x) = x^2$ não é uniformemente contínua em $[0, \infty)$.

4. Mostre que a função $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

5. Sejam $f(x) = x$ e $g(x) = \text{sen}x$. Mostre que f e g são uniformemente contínuas em $\mathbb{R}$. Mas fg não é.

6. Mostre que se f, g são uniformemente contínuas em $\mathbb{R}$ então $f \circ g$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

6.7 Conclusão

Caro aluno, ao final desta aula, é importante ressaltar que o estudo das funções contínuas nos conduz a um nível de abstração em Matemática muito mais elevado. Além disso, as definições e resultados desta aula também nos permitem representar graficamente uma função contínua, dentro do seu domínio, sem retirar a caneta do papel. Portanto, a continuidade faz necessário o uso de duas ferramentas de grande valhia em Matemática que são: provas analíticas e interpretação geométrica para seu entendimento por completo para um primeiro curso de Análise.

6.8 Resumo

Nesta aula, apresentamos ao aluno, como identificar as funções reais contínuas e uniformementes contínuas. Mostramos também que hipóteses devemos estabelecer para relacionar estes dois conceitos. Além disso, discutimos aplicações de resultados tais como os Teoremas do Valor Intermediário e de Weierstrass, os quais serão extremamente utilizados na teoria de derivadas a seguir.

6.9 Exercícios Propostos

Exercícios:

1. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções contínuas no ponto $y \in X$. Prove que são contínuas no ponto y as funções $p, q : X \to \mathbb{R}$, definidas por: $p(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $q(x) = \min\{f(x), g(x)\}$.

2. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas. Prove que se X é aberto então $Y = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ é aberto.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Prove que se $f(x) = 0$, $\forall\ x \in X$, então $f(x) = 0$, $\forall\ x \in \overline{X}$.

4. Prove que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua $\Leftrightarrow$ $f(\overline{X}) \subseteq \overline{f(X)}, \forall\ X \subseteq \mathbb{R}$.

5. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas no ponto $z \in X$. Suponha que, $\forall\ \delta > 0$, existem $x, y \in (z - \delta, z + \delta)$ tais que $f(x) < g(x)$ e $f(y) > g(y)$. Prove que $f(z) = g(z)$.

6. Seja $f : X :\to \mathbb{R}$ descontínua no ponto $y \in X$. Prove que existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: ou se pode achar uma sequência de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = y$ e $f(x_n) > f(y) + \varepsilon$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, ou acha-se (y_n) com $y_n \in X$, $\lim y_n = y$ e $f(y_n) < f(y) - \varepsilon$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tal que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$. Prove que existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $f(y) \leq f(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

8. Prove que não existe uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que assuma cada um dos seus valores $f(x)$, $x \in [a, b]$, exatamente duas vezes.

9. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua no conjunto compacto X. Prove que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $k_\varepsilon > 0$ tal que $x, y \in X$, $|y - x| \geq \varepsilon \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq k_\varepsilon |y - x|$.

10. Mostre que a função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, não é uniformemente contínua.

11. Dada $f : X \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua, defina $g : \overline{X} \to \mathbb{R}$ pondo $g(x) = f(x)$, se $x \in X$ é um ponto isolado e $g(x) = \lim\limits_{y \to x} f(y)$ se $x \in X'$. Prove que g é uniformemente contínua e $g(x) = f(x)$, $\forall\ x \in X$.

12. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ uniformemente contínuas. Prove que $p, q : X \to \mathbb{R}$ dadas por $p(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ e $q(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $\forall\ x \in X$, são uniformemente contínuas.

13. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas. Se $\overline{Y} \subseteq X$ e $f(y) = g(y)$, $\forall\ y \in Y$, então $f|_{\overline{Y}} = g|_{\overline{Y}}$.

14. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ aberto. $f : A \to \mathbb{R}$ é contínua $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(B)$ é aberto, $\forall\ B \subseteq \mathbb{R}$ aberto.

15. Seja $F \subseteq \mathbb{R}$ fechado. $f : F \to \mathbb{R}$ é contínua $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(G)$ é fechado, $\forall\ G \subseteq \mathbb{R}$ fechado.

6.10 Exercícios Resolvidos

Questões Resolvidas:

Ex1. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas. Prove que se X é fechado então $Z = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ é fechado.

Demonstração. Seja $z \in \overline{Z}$. Então, existe $(x_n) \subseteq Z$ tal que $\lim x_n = x$. Como $Z \subseteq X$ e X é fechado, então $x \in \overline{Z} \subseteq \overline{X} = X$. Por outro lado, f e g são contínuas. Assim sendo, pelo Teorema 6.3, $\lim f(x_n) = f(x)$ e $\lim g(x_n) = g(x)$. Como $(x_n) \subseteq Z$, temos que $f(x_n) = g(x_n)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, $f(x) = \lim f(x_n) = \lim g(x_n) = g(x)$. Ou seja, $f(x) = g(x)$. Isto nos diz que $x \in Z$. Portanto, $\overline{Z} \subseteq Z$. Por fim, Z é fechado. $\square$

Ex2. (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(a) \leq a$ e $b \leq f(b)$. Prove que existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = x$ (x é denominado ponto fixo de f).

Demonstração. Se $f(a) \leq a$ e $b \leq f(b)$, então $f(a) - a \leq 0 \leq f(b) - b$. Se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$, o exercício está resolvido, basta considerar $x = a$ ou $x = b$ respectivamente. Caso contrário, isto é, $f(a) - a < 0 < f(b) - b$. Defina $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ por $g(y) = f(y) - y$. Como f é contínua, então pelo exemplo 5.8 e Teorema 6.6, tem-se que g é contínua. Assim, $g(a) = f(a) - a < 0 < f(b) - b = g(b)$. Ou seja, $g(a) < 0 < g(b)$. Usando o Teorema 6.8, existe $x \in (a, b)$ tal que $g(x) = 0$. Isto é, $f(x) - x = 0$. Portanto, $f(x) = x$. $\square$

Ex3. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se periódica se existe $p > 0$ tal que $f(x + p) = f(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Prove que toda função contínua periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é limitada e existem $y, z \in \mathbb{R}$ tais que $f(y) \leq f(x) \leq f(z)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Por indução, prova-se que $f(x + np) = f(x)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, $f(x) = f(x - p + p) = f(x - p)$. Novamente, por indução, $f(x - np) = f(x)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Além disso, $f(x + 0p) = f(x)$. Portanto, $f(x + zp) = f(x)$, $\forall\ z \in \mathbb{Z}$. Pela Proposição 6.1, $f|_{[0,p]} \to \mathbb{R}$ é contínua em $[0, p]$. Como $[0, p]$ é compacto, então $f|_{[0,p]} \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua (ver Teorema 6.14). Pelo Teorema 6.11, existem $y, z \in [0, p]$ tais que $f(y) \leq f(x) \leq f(z)$, $\forall\ x \in [0, p]$. Observe que $\mathbb{R} = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} [zp, (z + 1)p]$. Dessa forma, dado $x \in \mathbb{R}$ existe $z_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $x \in [z_0 p, (z_0 + 1)p]$. Com isso, $z_0 p \leq x \leq (z_0 + 1)p$. Consequentemente, $0 \leq x - z_0 p \leq p$. Com isso, $f(y) \leq f(x - z_0 p) = f(x) \leq f(z)$. Por conseguinte, f é limitada. $\square$

Ex4. Dado um conjunto não-vazio $Y \subseteq \mathbb{R}$, defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pondo $f(x) = \inf\{|x-y| : y \in Y\}$. Prove que $|f(x) - f(z)| \leq |x - z|$, $\forall\, x, z \in \mathbb{R}$. Conclua que f é uniformemente contínua ($f(x) = d(x, Y)$ é denominada distância do elemento x ao conjunto Y).

Demonstração. Sejam $y \in Y$ e $x, z \in \mathbb{R}$. Assim sendo, $f(x) = \inf\{|x-y| : y \in Y\} \leq |x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y|$. Ou seja, $f(x) - |x-z| \leq |z-y|$, $\forall\, y \in Y$. Dessa forma, utilizando a definição 1.12, temos que $f(x) - |x-z| \leq \inf\{|z-y| : y \in Y\} = f(z)$. Ou equivalentemente, $f(x) - f(z) \leq |x-z|$, $\forall\, x, z \in \mathbb{R}$. Analogamente, verifica-se que $f(z) - f(x) \leq |x-z|$. Portanto, $|f(x) - f(z)| \leq |x-z|$, $\forall\, x, z \in \mathbb{R}$. Isto nos diz que f é Lipschitziana com constante de Lipschitz $k = 1$. Por fim, pela Proposição 6.2, f é uniformemente contínua. □

Ex5. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas, tais que $f(r) = g(r)$, $\forall\, r \in \mathbb{Q}$, prove que $f \equiv g$.

Demonstração. Vimos que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (ver exemplo 4.15). Vamos provar que $f(x) = g(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Seja $x \in \mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$. Assim, existe $(x_n) \subseteq \mathbb{Q}$ tal que $\lim x_n = x$. Como f e g são contínuas em $\mathbb{R}$ então $\lim f(x_n) = f(x)$ e $\lim g(x_n) = g(x)$. Como $(x_n) \subseteq \mathbb{Q}$, então, por hipótese $f(x_n) = g(x_n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Com isso, $f(x) = \lim f(x_n) = \lim g(x_n) = g(x)$. Ou seja, $f(x) = g(x)$. Isto nos diz que $f \equiv g$. □

Ex6. Sejam K compacto e F fechado, não-vazios. Mostre que existem $k \in K$ e $f \in F$ tais que $|k - f| \leq |x - y|$, $\forall\, x \in K$ e $y \in F$.

Demonstração. Defina $d(K, F) = \inf\{|x-y| : x \in K, y \in F\}$. Este número real não-negativo é chamado a distância entre os conjuntos K e F. Usando o exemplo 4.12, concluímos que $\inf\{|x-y| : x \in K, y \in F\} \in \overline{\{|x-y| : x \in K, y \in F\}}$. Assim sendo, existem $(x_n) \subseteq K$ e $(y_n) \subseteq F$ tais que $\lim |x_n - y_n| = d(K, F)$. Como K é compacto, então, pelo Teorema 4.9, $\exists\, (x_{n_k})$ subsequência de (x_n) tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = k \in K$. Por outro lado, utilizando o Teorema 2.2, temos que $\lim |x_{n_k} - y_{n_k}| = d(K, F)$. Observe que $|y_{n_k}| = |y_{n_k} - x_{n_k} + x_{n_k}| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k}|$. Ou seja, (y_{n_k}) é limitada, pois, $(y_{n_k} - x_{n_k})$ e (x_{n_k}) são limitadas (ver Teorema 2.3). Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe $(y_{n_{k'}})$ subsequência de (y_{n_k}) tal que $\lim\limits_{k'\to\infty} y_{n_{k'}} = f \in \overline{F} = F$ (F é fechado). Portanto, $k - f = \lim\limits_{k'\to\infty} x_{n_{k'}} - \lim\limits_{k'\to\infty} y_{n_{k'}} = \lim\limits_{k'\to\infty} [x_{n_{k'}} - y_{n_{k'}}]$. Portanto, $|k - f| = \lim\limits_{k'\to\infty} |x_{n_{k'}} - y_{n_{k'}}| = d(K, F) = \inf\{|x-y| : x \in K, y \in F\} \leq |x - y|$, $\forall\, x \in K, y \in F$. □

Auto-Avaliação

Sou capaz de verificar se uma função é contínua ou uniformemente contínua e saber aplicar os Teoremas do Valor Intermediário e de Weierstarass?

Proxima Aula

Caro aluno, na próxima aula, estudaremos derivada de funções reais. Recomendo a você, compreender a essência dos Teoremas do Valor Intermediário e de Weierstrass para facilitar o entendimento das aplicações de alguns resultados estabelecidos na próxima aula.

Referências Bibliográficas

[1] Bartle, R. G., Sherbert, D. R., *Introdution to Real Analysis*, Third Edition, New York, JohnWiley and Sons,Inc., 2000. 399p.

[2] Figueiredo, D., *Análise I*, Segunda Edição, Rio de Janeiro, LTC, 2008. 266p.

[3] Lages, E., *Curso de Análise vol. 1*, Décima Segunda Edição, Rio de Janeiro, IMPA, 2008. 431p.

[4] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition, New York, McGraw-Hill, Inc., 1976. 351p.

Professor Revisor

Professor Wilberclay Gonçalves Melo