Análise na Reta

Wilberclay Gonçalves Melo

CESAD
CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA - UFS

São Cristóvão/SE
2011

Análise na Reta

Elaboração de Conteúdo
Wilberclay Gonçalves Melo

Capa
Hermeson Alves de Menezes

FICHA CATALOGRÁFICA PRODUZIDA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

M528a Melo, Wilberclay Gonçalves
Análise na Reta / Wilberclay Gonçalves Melo;
Jr.. - São Cristóvão : Universidade Federal de Sergipe,
CESAD, 2011.

1. Matemática. 2. Análise. 3. Números Reais. 4. Limites.
I. Titulo.

CDU 517

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
Cidade Universitária Prof. “José Aloísio de Campos”
Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze
CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE
Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474

Sumário

1 Primeira Aula: Números Reais **1**

1.1 Introdução 2

1.2 Corpo dos Números Reais 3

1.3 Corpo Ordenado dos Números Reais 6

1.4 Relação de Ordem no Conjunto dos Números Reais 8

1.5 Módulo de um Número Real 11

1.6 Corpo Completo dos Números Reais 17

1.7 Conclusão 26

1.8 Resumo 26

1.9 Exercícios Propostos 27

1.10 Exercícios Resolvidos 29

2 Segunda Aula: Sequência de Números Reais **35**

2.1 Introdução 36

2.2 Sequências Limitadas e Convergentes 36

2.3 Sequências Monótonas 43

2.4 Resultados Importantes Envolvendo Convergência 46

2.5 Operações Elementares com Sequências 52

2.6 Limites Infinitos de Sequências 58

2.7 Operações Elementares com Limites Infinitos 60

2.8 Sequência de Cauchy 64

2.9 Conclusão 67

2.10 Resumo 68

2.11 Exercícios Propostos 68

2.12 Exercícios Resolvidos 70

3 Terceira Aula: Série de Números Reais **77**

3.1 Introdução 78

3.2 Convergência de Séries 78

3.3 Operações Elementares com Séries 84

3.4 Testes de Convergência para Séries 87

3.5 Rearranjo de Séries 98

3.6 Leitura Complementar: Teorema de Riemann 101

3.7 Conclusão 104

3.8 Resumo 105

3.9 Exercícios Propostos 105

3.10 Exercícios Resolvidos 106

4 Quarta Aula: Topologia dos Números Reais **111**

4.1 Introdução 112

4.2 Conjuntos Abertos 112

4.3 Conjuntos Fechados 117

4.4 Conjuntos Conexos 122

4.5 Conjunto Fronteira 126

4.6 Pontos de Acumulação e Conjuntos Discretos 129

4.7 Pontos de Acumulação Laterais 132

4.8 Conjuntos Compactos 134
4.9 Leitura Complementar: Caracterização de Conjuntos Compactos 137
4.10 Conclusão 142
4.11 Resumo 142
4.12 Exercícios Propostos 143
4.13 Exercícios Resolvidos 144

5 Quinta Aula: Limites de Funções Reais 151

5.1 Introdução 152
5.2 Limites de Funções Reais e Exemplos 152
5.3 Operações Elementares com Limites de Funções Reais 165
5.4 Limites Laterais de Funções Reais 171
5.5 Limites Infinitos e no Infinito de Funções Reais 179
5.6 Conclusão 186
5.7 Resumo 186
5.8 Exercícios Propostos 187
5.9 Exercícios Resolvidos 188

6 Sexta Aula: Continuidade e Continuidade Uniforme 195

6.1 Introdução 196
6.2 Continuidade e Exemplos 196
6.3 Operações Elementares com Funções Contínuas 206
6.4 Resultados Importantes Envolvendo Continuidade 209
6.5 Funções Reais Contínuas Definidas em Compactos 215
6.6 Continuidade Uniforme com Funções Reais 219
6.7 Operações Elementares com Continuidade Uniforme 227
6.8 Conclusão 230

6.9 Resumo 230

6.10 Exercícios Propostos 231

6.11 Exercícios Resolvidos 232

7 Sétima Aula: Derivadas de Funções Reais 245

7.1 Introdução 246

7.2 Derivadas e Exemplos 246

7.3 Operações Elementares com Funções Deriváveis 253

7.4 Comportamento Local de uma Função Real 263

7.5 Teoremas Importantes sobre Derivabilidade 270

7.6 Conclusão 278

7.7 Resumo 278

7.8 Exercícios Propostos 279

7.9 Exercícios Resolvidos 280

8 Oitava Aula: Fórmula de Taylor para Funções Reais 287

8.1 Introdução 288

8.2 Derivadas de Ordem Superior 288

8.3 Resultados Importantes sobre a Fórmula de Taylor 290

8.4 Conclusão 297

8.5 Resumo 298

8.6 Exercícios Propostos 298

8.7 Exercícios Resolvidos 299

9 Nona Aula: Integral a Riemann de Funções Reais 305

9.1 Introdução 306

9.2 Integral a Riemann e Exemplos 306

9.3 Operaçõe Elementares com a Integral a Riemann 320
9.4 Teoremas Importantes sobre Integrabilidade 330
9.5 Leitura Complementar 341
9.5.1 Desigualdade Tipo Gronwall e Equação de Fisher 342
9.5.2 Integral a Riemann-Stieltjes de Funções Reais 347
9.6 Conclusão 370
9.7 Resumo 371
9.8 Exercícios Propostos 371
9.9 Exercícios Resolvidos 372

10 Décima Aula: Logaritmo e Integração Imprópria 377

10.1 Introdução 378
10.2 Logaritmo Neperiano e Exponencial 378
10.3 Integrais Impróprias de Funções Reais 386
10.4 Leitura Complementar 395
10.4.1 Medida Nula e Teorema de Lebesgue 395
10.4.2 Exponencial e Logaritmo em Qualquer Base 400
10.5 Conclusão 409
10.6 Resumo 410
10.7 Exercícios Propostos 410
10.8 Exercícios Resolvidos 411

Capítulo 1

Primeira Aula: Números Reais

Curso: Licenciatura em Matemática

Professor-autor: Wilberclay Gonçalves Melo

Disciplina: Análise na Reta

Meta

Apresentar ao leitor os conceitos de ínfimo e supremo de alguns conjuntos formados por números reais.

Objetivos

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de aplicar corretamente as operações básicas envolvendo números reais, trabalhar com as propriedades elementares do módulo de um número real, e encontrar o ínfimo e o supremo de alguns conjuntos contituídos de números reais.

Pré-requisitos

Fundamentos da Matemática e Cálculo II.

1.1 Introdução

Nesta aula, estudaremos mais profundamente as operações de adição e multiplicação entre dois números reais. Mostraremos as principais propriedades herdadas de tais operações. Para que o aluno se convença da existência destas operações recomendo a leitura do livro [7]. Nosso material não visa a construção do conjunto dos números reais, mas o que podemos descobrir sobre este conjunto utilizando sua existência já provada em [7]. Mais a seguir, estabeleceremos a ideia de limite de uma sequência. Para isto, é importante conceituar módulo de um número real. Portanto, apresentaremos algumas desigualdades relevantes sobre tal definição. Um exemplo dessas desigualdades é, a muito conhecida e utilizada, desigualdade triangular. Estudaremos também conceitos essencias para um estudo da Integração a Riemann que são: supremo e ínfimo de conjuntos formados por números reais. Estas definições são o ponto crucial desta aula.

Aproveitamos este momento para esclarecer que as notações dispostas neste material podem ser encontradas em qualquer referência sobre Lógica Matemática (ver [16]), com exceção de algumas. Por exemplo, em algumas demonstrações aparecerão os seguintes símbolos: $\Rightarrow$) e $\Leftarrow$).

$\Rightarrow$) significará a prova da implicação direta da afirmação em questão;

$\Leftarrow$) nos dirá que estamos demonstrando a implicação recíproca exposta no mesmo resultado.

Em outros casos, utilizaremos a simbologia **i)** $\Rightarrow$ **ii)**. Esta indicará que, logo em seguida, faremos a prova de como chegar na informação contida em **ii)** usando a presente em **i)**.

É importante que o leitor procure responder os exercícios contidos neste material. Em todas as aulas, as atividades estarão dispostas no conteúdo, chamadas exercícios de fixação, no final da aula, como exercícios propostos, e por fim daremos uma lista, denominada exercícios resolvidos, para que o aluno tenha uma ideia de como as atividades desta disciplina devem ser respondidas.

Para finalizar esta nossa primeira conversa, afirmo que a maioria das figuras expostas neste material foi acescentada para um melhor acompanhamento das demonstrações subsequentes. Aproveito para agradecer ao aluno Natã Firmino Santana Rocha e a professora Débora Lopes da Silva por suas cooperações na contrução destes desenhos.

1.2 Corpo dos Números Reais

Nesta seção, consideraremos que os números reais já são conhecidos pelo leitor e que existem duas operações binárias envolvendo tais elementos. A seguir, mostraremos quais são as propriedades elementares satisfeitas por essas e, além disso, discutiremos a existência e unicidade de alguns elementos especiais. Por fim, verificaremos que as regras de sinal tão utilizadas são, de fato, válidas.

Propriedades 1.1 (Operações Elementares)**.** *Considere que estão estabelecidas as operações de adição e multiplicação em* $\mathbb{R}$*, isto é, existem duas aplicações* $+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, denominadas adição e multiplicação, respectivamente, denotadas por:*

$$+(x, y) = x + y \ \text{ e } \ \cdot\,(x, y) = xy, \forall\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Tais operações satisfazem as seguintes propriedades:

1. *(Associatividade)* $x + (y + z) = (x + y) + z$ *e* $x(yz) = (xy)z, \forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$*;*

2. *(Comutatividade)* $x + y = y + x$ *e* $xy = yx, \forall\ x, y \in \mathbb{R}$*;*

3. *(Elemento Neutro) Existem números reais* 0 *e* 1 *que satisfazem:*

$$0 + x = x + 0 = x \ \text{ e } \ 1x = x1 = x, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

   Os números 0 *e* 1 *são denominados elementos neutros da adição e multiplicação, respectivamente;*

4. *(Elemento Inverso) Dado um número real* x *existe um número denotado por* $(-x)$ *tal que*

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

Além disso, para cada número real $x \neq 0$ existe um número real denotado por x^{-1}, obedecendo as seguintes igualdades

$$xx^{-1} = x^{-1}x = 1.$$

Estes números são chamados elementos inversos a x, para a adição e para a multiplicação, respectivamente;

5. *(Distributividade) $(x + y)z = xz + yz$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$;*

Obs 1.1 (Definição de Corpo)**.** Todo conjunto $C \neq \emptyset$ munido de duas operações $+ : C \times C \to C$ e $\cdot : C \times C \to C$ com as mesmas propriedades estabelecidas em 1.1 é denomiado um corpo. Por isso, o conjunto dos númeors reais $\mathbb{R}$, munido das operações de adição e multiplicação, é dito um corpo. Um outro exemplo conhecido do leitor é o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ munido da adição e multiplicação usuais em $\mathbb{C}$, ou seja,

$$(a + bi) + (x + yi) = (a + x) + (b + y)i \text{ e } (a + bi) \cdot (x + yi) = (ax - by) + (ay + bx)i,$$

para quaisquer $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

A pergunta que pode ser feita neste momento é a seguinte: os elementos neutros e inversos para as operações de adição e multiplicação são únicos? A resposta está na seguinte afirmação.

Afirmação 1.1 (Unicidade)**.** *Os elementos neutros e inversos da adição e multiplicação em $\mathbb{R}$ são únicos.*

Demonstração. Considere que existe $z \in \mathbb{R}$ que satisfaz $xz = zx = x, \forall\ x \in \mathbb{R}$. Como $1 \in \mathbb{R}$, então

$$1 = 1z =^3 z.$$

Com isso, o elemento neutro da multiplicação é único. Analogamente, é possível provar que o elemento neutro da adição é único. Por outro lado, dado $x \in \mathbb{R}$, suponha que existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = y + x = 0$. Assim sendo,

$$y =^3 0 + y =^4 [(-x) + x] + y =^1 (-x) + (x + y) = (-x) + 0 =^3 (-x).$$

Portanto, o elemento inverso a x em relação a adição é único. Analogamente, prova-se que qualquer elemento inverso com respeito a multiplicação é único. $\square$

É sabido que existem outras duas operações elementares para o conjunto dos números reais: a subtração e a divisão. Então, por que não as apresentamos até agora? Veremos na definição a seguir que, estas aplicações têm definições imediatas a partir da adição e multiplicação.

Definição 1.1 (Subtração e Divisão)**.** A operação $-:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$-(x,y)=x-y:=x+(-y),\forall\ x,y\in\mathbb{R},$$

é denominada subtração em $\mathbb{R}$. Definimos a operação $\div:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ divisão em $\mathbb{R}$ por

$$\div(x,y)=x\div y:=xy^{-1},\forall\ x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}^*,$$

aqui $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Algumas técnicas básicas envolvendo números reais são utilizadas diariamente sem a devida explicação. Para que este abuso seja solucionado, vejamos o seguinte resultado.

Proposição 1.1. *Sejam $x,y,z\in\mathbb{R}$. Então, os seguintes itens são verdadeiros:*

i) *(Lei do Corte) $x+y=x+z\Rightarrow y=z$;*

ii) $x0=0x=0$*;*

iii) *(Sem Divisores de Zero) $xy=0\Rightarrow x=0$ ou $y=0$;*

iv) *(Regra de Sinais) $x(-y)=(-x)y=-(xy)$, $(-x)(-y)=xy$ e $-[(-x)]=x$.*

Demonstração. **i)** Veja que

$$x+y=x+z\Rightarrow(-x)+(x+y)=(-x)+(x+z)\Rightarrow^1[(-x)+x]+y=[(-x)+x]+z\Rightarrow^4 0+y=0+z\Rightarrow^3$$

$y=z$.
Logo, a Lei do Corte é válida.

ii) Portanto, por **i)**, concluímos que

$$x0+0=^3 x0=^3 x(0+0)=^5 x0+x0\Rightarrow 0=x0.$$

Por comutatividade $0x = 0$.

iii) Para provar **iii)** suponha que $x \neq 0$. Assim, existe $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$. Dessa forma, se $xy = 0$, temos que

$$x^{-1}(xy) = x^{-1}0 \Rightarrow^1 (x^{-1}x)y = 0 \Rightarrow^4 1y = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Isto nos diz que $\mathbb{R}$ não possui divisores de zero.

iv) Finalmente, observe que

$$xy + x(-y) =^5 x[y + (-y)] =^4 x0 = 0.$$

Com isso, $x(-y)$ é o elemento inverso de xy. Mas, o elemento inverso é único (ver afirmação 1.1). Por fim, $x(-y) = -(xy)$. As outras regras de sinais possuem provas análogas. $\square$

Obs 1.2 (Regra de Sinais)**.** Podemos concluir, a partir da regra de sinais, que

$$1(-1) = (-1)1 = -1, (-1)(-1) = 1 \text{ e } -[(-1)] = 1.$$

1.3 Corpo Ordenado dos Números Reais

A partir deste momento, vamos supor que existe um conjunto, entitulado conjunto dos números reais positivos, que satisfaz algumas propriedades já conhecidas serem verdadeiras. Tal conjunto nos permitirá estebelcer uma ordem parcial relacionando dois números reais. Por conseguinte, estaremos aptos a definir ínfimo e supremo de conjuntos limitados.

Definição 1.2 (Corpo Ordenado)**.** Dizemos que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado, pois existe um subconjunto $\mathbb{R}_+ \subseteq \mathbb{R}$, denominado conjunto dos números reais positivos, tal que:

1. $x + y, xy \in \mathbb{R}_+$, se $x, y \in \mathbb{R}_+$, em palavras, a soma e o produto de números positivos é novamente um número positivo;

2. (Lei da Tricotomia) Dado $x \in \mathbb{R}$, temos que ou $x = 0$, ou $x \in \mathbb{R}_+$, ou $(-x) \in \mathbb{R}_+$ (somente uma das afirmações é verdadeira).

Obs 1.3 (Corpo Ordenado)**.** Em geral, um corpo C qualquer é dito ordenado se existe um subconjunto $P \subseteq C$ satisfazendo as mesmas condições que $\mathbb{R}_+$ acima. Por este fato, estabelecemos a Definição 1.2.

É fácil, através da existência do conjunto $\mathbb{R}_+$, estabelecer quando um número real é negativo. Leia a definição a seguir.

Definição 1.3 (Números Negativos)**.** Chamaremos o conjunto

$$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : (-x) \in \mathbb{R}_+\}$$

de conjunto dos números reais negativos.

Obs 1.4. Unindo a Definição 1.3 à Lei da Tricotomia (ver Definição 1.2) concluímos que um número real ou é nulo, ou é positivo, ou é negativo, isto é, $\mathbb{R} = \{0\} \cup \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$, onde esta união é disjunta.

Através da regra de sinais, é louvável perguntarmos se quando multiplicamos um número real por ele mesmo encontramos um número positivo ou nulo. A resposta para esta pergunta está exposta no resultado abaixo.

Proposição 1.2. *O quadrado de um número real não-nulo é um número real positivo.*

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}^*$. Pela Lei da Tricotomia (ver Definição 1.2), concluímos que ou $x \in \mathbb{R}^+$, ou $(-x) \in \mathbb{R}^+$. Se $x \in \mathbb{R}^+$, então $x^2 = xx \in \mathbb{R}^+$, pela Definição 1.2. Ou seja, x^2 é positivo. Por outro lado, se $(-x) \in \mathbb{R}^+$, então $x^2 = (-x)(-x) \in \mathbb{R}^+$, pela Definição 1.2 e regra de sinais. Portanto, x^2 é positivo. $\square$

Exemplo 1.1. 1 é um número positivo. Com efeito, como $1 = 1 \cdot 1 = 1^2$ e 1^2 é positivo, então o resultado segue. Por conseguinte, -1 é negativo.

Obs 1.5 (Corpo Não-Ordenado)**.** A partir deste exemplo podemos concluir que o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é um exemplo de corpo que não é ordenado, pois $i^2 = -1$ é negativo.

1.4 Relação de Ordem no Conjunto dos Números Reais

Com a existência dos números reais positivos é possível estabelecer uma relação de ordem parcial em $\mathbb{R}$. Para determiná-la, precisaremos da seguinte definição.

Definição 1.4 (Menor ou Maior)**.** Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Dizemos que x é menor que y, ou que y é maior que x, se $y - x \in \mathbb{R}_+$.

Notação: $x < y$ ou $y > x$.

Obs 1.6. $x < y$ ou $y > x$, se existe $p \in \mathbb{R}_+$ tal que $y - x = p$, ou seja, $y = p + x$. Observe também que

$$x > 0 \Leftrightarrow x - 0 \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}_+.$$

Da mesma maneira, $x < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}_-$.

Vejamos a seguir o primeiro exemplo de um número real positivo, e consequentemente de um negativo.

Exemplo 1.2. $1 > 0$, pois $1 \in \mathbb{R}_+$. Analogamente, $-1 < 0$.

A proposição a seguir garante que é possível definir uma relação de ordem parcial em $\mathbb{R}$.

Proposição 1.3. *Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$, então:*

i) *(Transitividade) $x < y$ e $y < z \Rightarrow x < z$;*

ii) *(Tricotomia) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos que: ou $x = y$, ou $x < y$, ou $y < x$;*

iii) *(Monotonicidade) $x < y \Rightarrow x + z < y + z, xz < yz$, se $z > 0$ e $xz > yz$, se $z < 0$.*

Demonstração. **i)** Considere que $x < y$ e $y < z$. Assim sendo, usando a Definição 1.4, temos que $z - y > 0$ e $y - x > 0$. Então,

$$z - x = z - y + y - x > 0,$$

ver Definição 1.2 e observação acima. Isto prova a transitividade.

ii) Use a Lei da Tricotomia sobre $y - x \in \mathbb{R}$ para provar o segundo item. De fato,

$$y - x = 0, \text{ ou } y - x > 0, \text{ ou } x - y = -(y - x) > 0,$$

somente uma destas afirmações é válida. Equivalentemente, ou $y = x$, ou $x < y$, ou $y < x$. Isto prova a Tricotomia.

iii) Vamos provar a monotonicidade. Se $x < y$, então $y - x > 0$. Logo,

$$y + z - (x + z) = y - x > 0.$$

Portanto, $x + z < y + z$. Além disso, $z > 0$, encontramos

$$yz - xz = (y - x)z > 0,$$

através da Definição 1.2, isto é, $xz < yz$. Por outro lado, se $z < 0$, então

$$xz - yz = (x - y)z = (y - x)(-z) > 0,$$

pois $y - x, -z > 0$. Ou seja, $xz > yz$. □

Definição 1.5. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Dizemos que x é menor ou igual a y, ou que y é maior ou igual a x, se $x < y$ ou $x = y$.

Notação: $x \leq y$ ou $y \geq x$.

Vamos agora mostrar, através de um exemplo, que a média aritmética de dois números reais está localizada exatamente entre os mesmos.

Exemplo 1.3. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, com $x \leq y$. Então $x \leq \dfrac{x+y}{2} \leq y$. De fato,

$$x \leq \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow 2x \leq 2\frac{x+y}{2} \Leftrightarrow 2x \leq x + y \Leftrightarrow 2x - x \leq x + y - x \Leftrightarrow x \leq y.$$

Analogamente, prova-se que $\dfrac{x+y}{2} \leq y$.

Obs 1.7. "$\leq$" é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{R}$, pois as seguintes propriedades são verdadeiras:

a) (Reflexividade) $x \leq x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;

b) (Anti-simetria) $x \leq y$ e $y \leq x \Leftrightarrow x = y, x, y \in \mathbb{R}$;

c) (Transitividade) $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

Essas seguem diretamente da Proposição 1.3.

Considere, agora, que o conjunto dos números naturais é denotado por $\mathbb{N}$. Defina uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, indutivamente, por

$$f(1_{\mathbb{N}}) = 1_{\mathbb{R}} \text{ e } f(n + 1_{\mathbb{N}}) = f(n) + 1_{\mathbb{R}},$$

onde $n \in \mathbb{N}$,$1_{\mathbb{N}}$ e $1_{\mathbb{R}}$ são, respectivamente, os elementos neutros das multiplicações usuais de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$, esta última definida acima. Como $1_{\mathbb{R}} > 0$, então

$$1_{\mathbb{R}} < 1_{\mathbb{R}} + 1_{\mathbb{R}} < 1_{\mathbb{R}} + 1_{\mathbb{R}} + 1_{\mathbb{R}} < ...$$

Por conseguinte, $f(n) < f(m)$, se $n < m$, ou seja f é uma função injetora. Portanto, $f : \mathbb{N} \to f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{R}$ é uma bijeção. Com isso, podemos identificar $f(\mathbb{N})$ com $\mathbb{N}$. Com esta identificação garantimos que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$. Agora, seja $n \in \mathbb{N}$. Logo, $n \in \mathbb{R}$. Dessa forma, $-n \in \mathbb{R}$. Consequentemente, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$, onde $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos inteiros, já que $0 \in \mathbb{R}$. Por fim, sejam p, q números inteiros com $q \neq 0$. Assim sendo, $p, q \in \mathbb{R}$ e $p \div q = pq^{-1} \in \mathbb{R}$. Isto é, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, onde $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos racionais. Resumindo, obtemos

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

A última inclusão é própria, isto é, existe um número real que não é racional. Veremos a prova desta afirmação no decorrer do material.

Exercícios de Fixação

1. Prove que se $x, y \in \mathbb{R}$ então

i) $-(x + y) = (-x) + (-y)$;

ii) $\dfrac{1}{(-x)} = -\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

iii) $-\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{(-x)}{y}$.

2. Solucione as seguintes equações, justificando cada passo apropriado:

i) $2x + 5 = 8$;

ii) $x^2 = x$;

iii) $(x-1)(x+2) = 0$.

3. Se $x \in \mathbb{R}$ satisfaz $x \cdot x = x$. Prove que $x = 0$ ou $x = 1$.

4. Se $x, y \in \mathbb{R}$ são não-nulos, mostre que $\dfrac{1}{xy} = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{y}$.

5. Se $x, y \in \mathbb{Q}$, mostre que $x + y, x \cdot y \in \mathbb{Q}$.

6. Se $0 < x < y$, mostre que $x < \sqrt{xy} < y$.

7. Se $\forall\ \varepsilon > 0$ temos que $x \leq y + \varepsilon$, mostre que $x \leq y$.

8. Prove que $[(1/2)(x+y)]^2 \leq (1/2)(x^2 + y^2)$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que a igualdade é válida somente quando $x = y$.

9. Se $x > 1$, mostre que $x^n > 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Se $0 < x \leq 1$, prove que $x^n \leq x$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

1.5 Módulo de um Número Real

Nesta seção, definiremos módulo de um número real e estabeleceremos algumas propriedades inerentes a esta aplicação. Geometricamente, o módulo de um número real é a distância deste ao elmento neutro 0. Formalmente temos a seguinte definição.

Definição 1.6 (Módulo)**.** Definimos e denotamos o módulo de um número real x por

$$|x| \;=\; \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Obs 1.8. A Definição 1.6 é equivalnente a $|x| = \max\{x, -x\}$, onde $x \in \mathbb{R}$. Por conseguinte, $|x| \geq x, -x$, $x \in \mathbb{R}$. Por monotonicidade,

$$-|x| \leq x \leq |x|, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Além disso,

$$|x| \geq 0 \text{ e } |x| = |-x|, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 1.4. $|-3,5| = 3,5$ e $|3| = 3$ são exemplos de módulos.

Proposição 1.4. *Sejam $y, \delta \in \mathbb{R}$, então são equivalentes*

i) $|y| \leq \delta$*;*

ii) $-\delta \leq y \leq \delta$*.*

Demonstração. Observe que, por monotonicidade, chegamos as seguintes conclusões

$$|y| \leq \delta \Leftrightarrow \max\{y, -y\} \leq \delta \Leftrightarrow y \leq \delta \text{ e } -y \leq \delta \Leftrightarrow y \leq \delta \text{ e } y \geq -\delta \Leftrightarrow -\delta \leq y \leq \delta.$$

□

Obs 1.9. A Proposição 1.4 nos diz, implicitamente, que

$$|y| > \delta \Leftrightarrow y < -\delta \text{ ou } y > \delta.$$

Generalizando a proposição acima, podemos enunciar o seguinte resultado.

Corolário 1.1. *Sejam $x, a, \delta \in \mathbb{R}$. Então são equivalentes:*

i) $|x - a| \leq \delta$*;*

ii) $a - \delta \leq x \leq a + \delta$*.*

Demonstração. Faça $y = x - a$ e aplique a Proposição 1.4. Chegamos ao resultado

$$|x - a| \leq \delta \Leftrightarrow -\delta \leq x - a \leq \delta \Leftrightarrow a - \delta \leq x \leq a + \delta.$$

Esta última equivalência é verdadeira por monotonicidade. $\square$

Obs 1.10. Os resultados obtidos na Proposição 1.4 e no Corolário 1.1 continuam verdadeiros se substituirmos $\leq$ por $<$.

A proposição a seguir contém as informações sobre as propriedades elementares satifeitas pelo módulo de um número real.

Proposição 1.5. *Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. As seguintes desigualdades são válidas:*

i) *(Desigualdade Triangular) $|x + y| \leq |x| + |y|$, ou, em palavras, o comprimento de um dos lados de um triângulo é menor ou igual a soma dos comprimentos do outros dois lados;*

ii) *(Módulo do Produto) $|xy| = |x||y|$, ou, em palavras, o módulo do produto é o produto dos módulos;*

iii) *(Módulo da Divisão) Seja $y \neq 0$. Logo, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, ou, em palavras, o módulo da divisão é a divisão dos módulos. Aqui estamos usando a seguinte notação $xy^{-1} = \dfrac{x}{y}$;*

iv) $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Demonstração. **i)** Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Vimos que $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$. Assim sendo, somando membro a membro as desigualdades acima encontramos

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Usando a Proposição 1.4, obtemos a desigualdade triangular, isto é, $|x + y| \leq |x| + |y|$.

ii) Observe, agora, que

$$|x|^2 = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \geq 0; \\ (-x)^2, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Portanto, usando regra de sinais, obtemos

$$|x|^2 = x^2, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Dessa forma,

$$|xy|^2 = (xy)^2 = x^2y^2 = |x|^2|y|^2 = (|x||y|)^2,$$

ou seja,

$$(|xy| - |x||y|)(|xy| + |x||y|) = |xy|^2 - (|x||y|)^2 = 0.$$

Como $\mathbb{R}$ não tem divisores de zero, então, $|xy| = \pm|x||y|$. Por fim, $|xy| = |x||y|$, pois o módulo é sempre ≥ 0. Isto prova **ii)**.

iii) Primeiramente, vamos provar que $\left|\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{|y|}$. De fato, usando o item **ii)**, encontramos

$$|y||y^{-1}| = |yy^{-1}| = |1| = 1.$$

Usando a Afirmação 1.1, concluímos que $|y^{-1}| = |y|^{-1}$, ou seja, $\left|\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{|y|}$. Utilizando o item **ii)**, novamente, obtemos

$$\frac{|x|}{|y|} = |x|\frac{1}{|y|} = |x|\left|\frac{1}{y}\right| = \left|x\frac{1}{y}\right| = \left|xy^{-1}\right| = \left|\frac{x}{y}\right|.$$

iv) Veja que a primeira desigualdade em **iv)** já foi estabelecida. Para finalizar, utilize a desigualdade triangular para concluir que

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|.$$

Com isso, $|x| - |y| \leq |x - y|$. Analogamente, $|y| \leq |y - x| + |x|$. Logo, $-(|x| - |y|) \leq |x - y|$, ou seja,

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

□

Relembraremos, agora, como são definidos os intervalos em $\mathbb{R}$. Primeiramente enumeremos os intervalos que são denominados limitados.

Definição 1.7 (Intervalos Limitados)**.** Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Abaixo estão descritos os intervalos limitados em $\mathbb{R}$:

- (Intervalo fechado) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$;
- (Intervalo fechado à direita e aberto à esquerda) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$;
- (Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$;
- (Intervalo aberto) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.

Agora, listemos os intervalos que são ditos ilimitados.

Definição 1.8 (Intervalos Ilimitados)**.** Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Descrevemos abaixo os intervalos ilimitados em $\mathbb{R}$:

- $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$;
- (Intervalo fechado à direita) $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$;
- (Intervalo aberto à direita) $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$;
- (Intervalo fechado à esquerda) $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$;
- (Intervalo aberto à esquerda) $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$.

Obs 1.11. O intervalo [a,a]={a} é denominado intervalo degenerado. Qualquer intervalo que se escreve de maneira diferente deste é dito não-degenerado. Vimos que

$$|x - a| \leq \delta \Leftrightarrow a - \delta \leq x \leq a + \delta \Leftrightarrow x \in [a - \delta, a + \delta].$$

Analogamente,

$$|x - a| < \delta \Leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta \Leftrightarrow x \in (a - \delta, a + \delta).$$

A observação abaixo mostra relações existentes entre o módulo de um número e um intervalo.

Obs 1.12. Observe como podemos representar um elemento de um intervalo limitado:

$$|x-a| \leq \delta \Leftrightarrow a-\delta \leq x \leq a+\delta \Leftrightarrow x \in [a-\delta, a+\delta].$$

Analogamente,

$$|x-a| < \delta \Leftrightarrow a-\delta < x < a+\delta \Leftrightarrow x \in (a-\delta, a+\delta).$$

Exercícios de Fixação

1. Se $x \in \mathbb{R}$, mostre que $|x| = \sqrt{x^2}$.

2. Se $x, y \in \mathbb{R}$, mostre que $|x+y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0$.

3. Se $a, b \in (x, y)$, mostre que $|a-b| < y - x$.

4. Encontre $x \in \mathbb{R}$, tal que

i) $|4x-5| \leq 13$;

ii) $|x^2-1| \leq 3$.

5. Encontre $x \in \mathbb{R}$ que satisfaz $|x+1| + |x-2| = 7$.

6. Encontre $x \in \mathbb{R}$ que satisfaz

i) $|x-1| > |x+1|$;

ii) $|x| + |x+1| < 2$.

7. Mostre que se $x, y \in \mathbb{R}$, então

i) $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$;

ii) $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

1.6 Corpo Completo dos Números Reais

Nesta seção, incluiremos a ideia de ínfimo e supremo de um conjunto. Estes conceitos são essenciais para a definição, que estabeleceremos a seguir, de Integral a Riemann. Para este fim, apresentaremos inicialmente o seguinte conceito.

Definição 1.9 (Limitação Inferior e Superior)**.** Dizemos que um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é limitado inferiormente (respectivamente, limitado superiormente) se existe $c \in \mathbb{R}$ (respectivamente, existe $d \in \mathbb{R}$) tal que $c \leq x$ (respectivamente, $x \leq d$), $\forall\, x \in X$. Neste caso, c (respectivamente, d) é denominadado cota inferior (respectivamente, cota superior) de X.

Definição 1.10 (Conjunto Limitado)**.** Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é dito limitado se este é limitado inferior e superiormente.

A observação abaixo nos diz outras maneiras de definirmos conjunto limitado em $\mathbb{R}$.

Obs 1.13. $X \subseteq \mathbb{R}$ é limitado $\Leftrightarrow$ existe $c, d \in \mathbb{R}$ tais que $c \leq x \leq d$, $\forall\, x \in X$ $\Leftrightarrow$ existem $c, d \in \mathbb{R}$ tais que $X \subseteq [c, d]$ $\Leftrightarrow$ existe $M = \max\{|c|, |d|\}$ tal que $X \subseteq [-M, M]$ $\Leftrightarrow$ existe $M \in \mathbb{R}$ tais que $-M \leq x \leq M$, $\forall\, x \in X$ $\Leftrightarrow$ existe $M \in \mathbb{R}$ tais que $|x| \leq M$, $\forall\, x \in X$.

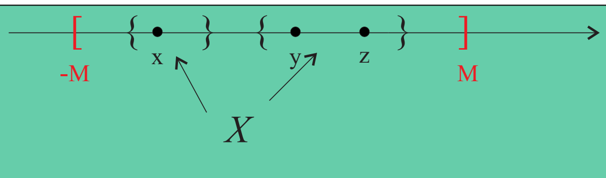

Figura 1.1: Conjunto Limitado

Obs 1.14. Segue da Observação 1.13 que qualquer subconjunto de um conjunto limitado é também um conjunto limitado.

Abaixo temos alguns exemplos de conjuntos limitados e ilimitados.

Exemplo 1.5. $\mathbb{N}$ é limitado inferiormente por 1, $\mathbb{R}_-$ é limitado superiormente por 0 e $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado inferior e superiormente, respectivamente, por 0 e 1. Os intervalos (a, b), $[a, b]$,$(a, b]$, $[a, b)$ são conjuntos limitados por a e b.

A definição a seguir nos dá possibilidades futuras de trabalharmos com a Integral a Riemann.

Definição 1.11 (Supremo)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não-vazio e limitado superiormente. O supremo do conjunto X, denotado por $\sup X$, é definido como sendo a menor das cotas superiores de X. Ou seja,

i) $\sup X$ é cota superior de X;

ii) se y é cota superior de X, então $\sup X \leq y$.

Obs 1.15. O item **ii)** pode ser substituído por uma das seguintes afirmações equivalentes:

ii') se $y < \sup X$ então y não é cota supeior de X;

ii") dado $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $\sup X - \varepsilon < x$.

Figura 1.2: Visualização do item **ii")**

O conjunto $\mathbb{R}$ é dito um corpo ordenado completo, pois cada $X \subseteq \mathbb{R}$ não-vazio e limitado superiormente possui supremo. Portanto, está garantida a existência do supremo neste caso.

Obs 1.16 (Corpo Completo)**.** Em geral, um corpo ordenado qualquer C é dito completo se existe supremo para qualquer subconjunto não-vazio e limitado superiormente de C. O conjunto $\mathbb{Q}$ munido da adição e multiplicação herdadas de $\mathbb{R}$ é um corpo. O subconjunto

$$X = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\} \subseteq \mathbb{Q}$$

não possui supremo em $\mathbb{Q}$ (ver exercícios da lista de exercícios propostos). Portanto, $\mathbb{Q}$ é exemplo de um corpo ordenado não-completo.

Os exemplos a seguir nos mostram como podemos utilizar o conceito de supremo de um conjunto formado por números reais.

Exemplo 1.6 (Supremo de Intervalos)**.** Veja que $\sup(0,1) = 1$. De fato, é fácil ver que 1 é cota superior de $(0,1)$. Além disso, dado $\varepsilon > 0$, existe $1 - \frac{\varepsilon}{2} \in (0,1)$ tal que

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1.$$

Portanto, $1 - \varepsilon$ não é cota superior de $(0,1)$. Logo, $\sup(0,1) = 1$. Observe que, $\sup(0,1) = 1 \notin (0,1)$. Analogamente, $\sup(0,1] = \sup[0,1) = \sup[0,1] = 1$. Em geral, para $a \leq b$, temos que

$$\sup(a,b) = \sup(a,b] = \sup[a,b) = \sup[a,b] = \sup(-\infty,b) = \sup(-\infty,b] = b.$$

Exemplo 1.7 (Supremo da Soma)**.** Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ não-vazios e limitados superiormente. Seja $X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$. Então $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$. Com efeito, existem $c, d \in \mathbb{R}$ tais que

$$x \leq c \text{ e } y \leq d, \forall\ x \in X, y \in Y.$$

Portanto,

$$x + y \leq c + d, \forall\ x + y \in X + Y,$$

ou seja, $X + Y$ é limitado superiormente. Analogamente, como $\sup X$ e $\sup Y$ são cotas superiores de X e Y, respectivamente, então

$$x + y \leq \sup X + \sup Y, \forall\ x + y \in X + Y.$$

Dado $\varepsilon > 0$, temos que existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que

$$\sup X - \frac{\varepsilon}{2} < x \text{ e } \sup Y - \frac{\varepsilon}{2} < y.$$

Somando estes dois resultados encontramos $\sup X + \sup Y - \varepsilon < x + y \in X + Y$. Isto nos diz que $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$.

Faremos, agora, um estudo similar ao de supremo de um conjunto.

Definição 1.12 (Ínfimo)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não-vazio limitado inferiormente. O ínfimo de X, denotado por $\inf X$, é definido como sendo a maior das cotas inferiores. Ou seja,

i) $\inf X$ é uma cota inferior de X;

ii) se y é cota inferior de X, então $y \leq \inf X$.

Obs 1.17. O item **ii)** da Definição 1.12 pode ser substituído por um dos seguintes itens equivalentes:

ii') se $\inf X < y$ então y não é cota inferior de X;

ii") dado $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $x < \inf X + \varepsilon$.

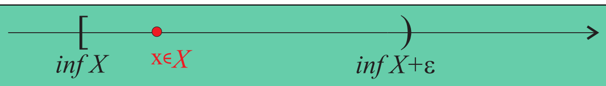

Figura 1.3: Visualização do item **ii")**

A seguir expomos alguns exemplos envolvendo o conceito de ínfimo de um conjunto contituído de números reais.

Exemplo 1.8 (Ínfimo de Intervalos)**.** Analogamente ao que foi feito no Exemplo 1.6, podemos concluir, para $a \leq b$, que

$$\inf(a,b) = \inf(a,b] = \inf[a,b) = \inf[a,b] = \inf[a,\infty) = \inf(a,\infty) = a.$$

Exemplo 1.9 (Ínfimo da Soma)**.** Se X, Y são não-vazios e limitados inferiormente, temos, analogamente ao Exemplo 1.7, que $\inf(X+Y) = \inf X + \inf Y$.

Exemplo 1.10. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ não-vazio e limitado inferiormente. Seja $a < 0$. Vamos provar que aX é limitado superiormente e $\sup(aX) = a \inf X$. De fato, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \leq x$, $\forall\, x \in X$. Portanto, por monotonicidade (ver Teorema 1.3),

$$ax \leq ac, \forall\, ax \in aX,$$

pois $a < 0$, ou seja, aX é limitado superiormente. Analogamente,

$$ax \leq a \inf X, \forall\, ax \in aX,$$

pois $\inf X$ é cota inferior de X. Dado $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $x < \inf X - \frac{\varepsilon}{a}$ (veja que $-\frac{\varepsilon}{a} > 0$). Portanto,

$$a \inf X - \varepsilon < ax, \text{ com } ax \in aX.$$

Com isso, $\sup(aX) = a \inf X$.

Obs 1.18. No Exemplo 1.10, vimos que, um conjunto não-vazio e limitado inferiormente possui ínfimo. Além disso, $\inf X = -\sup(-X)$.

O Teorema abaixo nos mostra uma maneira de provar que um conjunto formado somente por números naturais é ilimitado.

Teorema 1.2. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

i) $\mathbb{N}$ *é ilimitado superiormente em* $\mathbb{R}$*;*

ii) $\inf X = 0$*, onde* $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.

Demonstração. **i)** Suponha, por absurdo, que $\mathbb{N}$ é limitado superiormente. Como $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo, então existe $\sup \mathbb{N}$. Assim $\sup \mathbb{N} - 1$ não é cota superior de $\mathbb{N}$. Ou seja,

$$\exists\, n \in \mathbb{N} : \sup \mathbb{N} - 1 < n.$$

Dessa forma, $\sup \mathbb{N} < n + 1 \in \mathbb{N}$, absurdo, já que, $\sup \mathbb{N}$ é cota superior de $\mathbb{N}$.

ii) Observe que $0 \leq \frac{1}{n}, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Ou seja, 0 é cota inferior de X. Seja $y > 0$. vamos provar que y não é cota inferior de X. Usando o item **i)**, temos que

$$\exists\, n \in \mathbb{N} : \frac{1}{y} < n.$$

Ou seja, $y > \frac{1}{n}$ e $\frac{1}{n} \in X$. Portanto, $\inf X = 0$. □

Como um subconjunto de um conjunto limitado é limitado, então podemos afirmar o seguinte.

Obs 1.19. Como $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, então $\mathbb{R}$ é ilimitado superiormente.

Vejamos agora que condições precisamos para que uma certa quatidade de intervalos tenha interseção não-vazia.

Teorema 1.3 (Teorema dos Intervalos Encaixados)**.** *Sejam* $I_n = [x_n, y_n], \forall\, n \in \mathbb{N}$*, intervalos limitados fechados em* $\mathbb{R}$*. Considere que estes estejam encaixados da seguinte maneira:*

$$... \subseteq I_{n+1} \subseteq I_n \subseteq ... \subseteq I_2 \subseteq I_1.$$

Então, $\exists\, x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$*.*

Demonstração. Como $I_{n+1} \subseteq I_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Então, $x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Ou seja,

$$x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \leq ... \leq y_n \leq ... \leq y_2 \leq y_1.$$

Seja $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Então, X é limitado superiormente por y_1, pois $x_n \leq y_1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo, temos que: $x = \sup X$ existe. Além disso, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$x_m \leq y_n, \forall\, n \in \mathbb{N},$$

ou seja, y_n é cota superior de X, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Assim, $x \leq y_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$x_n \leq x \leq y_n, \forall\, n \in \mathbb{N},$$

isto é, $x \in I_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Por fim, $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. □

Exemplo 1.11. É importante que os intervalos do Teorema 1.3 sejam fechados. Por exemplo, considere os intervalos $I_n = (0, \frac{1}{n})$ são encaixados, mas $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$ (verifique!).

Exemplo 1.12. Considere os intervalos $I_n = [0, \frac{1}{n}]$, os quais são encaixados. O Teorema 1.3 nos garante que $\exists\, x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Na verdade, $x = 0$ (verifique!).

Em alguns momentos é muito simples encontrarmos o supremo ou ínfimo de determinados conjuntos. Vejamos um desses instantes.

Definição 1.13 (Máximo e Mínimo de Conjuntos)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Um número $x \in X$ é denominado elemento máximo (respectivamente, elemento mínimo) de X, e escrevemos $x = \max X$ (respectivamente, $x = \min X$), se X é cota superior (respectivamente cota inferior) de X.

Obs 1.20. Note que $x \in X$.

Exemplo 1.13. $\max[0, 1] = 1$ e $\min[0, 1] = 0$. Observe que $(0, 1)$ não possui máximo nem mínimo, porém possui supremo 1 e ínfimo 0.

Abaixo colocaremos algumas definições básicas sobre conjuntos formado por números.

Definição 1.14 (Conjunto Finito)**.** Seja X um conjunto de números. Dizemos que X é finito, se $X = \emptyset$ ou $\exists\ n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $f : \{1, 2, ..., n\} \to X$. Caso contrário, X é dito infinito.

Exemplo 1.14. O conjunto $\{0, \sqrt{2}\}$ é finito, pois a função $f : \{1, 2\} \to \{0, \sqrt{2}\}$ dada por $f(1) = 0$ e $f(2) = \sqrt{2}$, é uma bijeção.

Definição 1.15 (Conjunto Enumerável)**.** Dizemos que um conjunto de números X é enumerável se X é finito ou $\exists$ uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$. Caso contrário, X é dito não-enumerável.

Exemplo 1.15. O conjunto dos números pares $2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, ...\}$ é enumerável. Basta definir $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ por

$$f(n) = 2n, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

O primeiro exemplo que daremos de um conjunto não-enumerável é o nosso ambiente de estudo. Veja o seguinte corolário.

Corolário 1.4. $\mathbb{R}$ *é não-enumerável.*

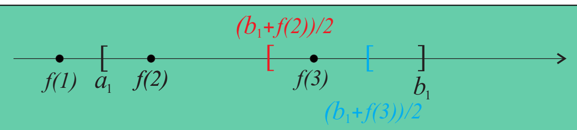

Figura 1.4: Passo 3 da iteração descrita na demonstração

Demonstração. Vamos provar que uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ não pode ser sobrejetiva. Como $\mathbb{R}$ é ilimitado superiormente $\exists\ a_1 \in \mathbb{R}$ tal que $f(1) < a_1$. Seja $I_1 = [a_1, b_1]$ um intervalo não-degenerado. Assim sendo, $f(1) \notin I_1$. Se $f(2) \in I_1$, então ou $f(2) \neq a_1$ ou $f(2) \neq b_1$. Considere, sem perda de generalidade, que $f(2) \neq b_1$. Ou seja, que $f(2) < b_1$. Construa $I_2 = \left[\frac{b_1 + f(2)}{2}, b_1\right]$. Logo, $I_2 \subseteq I_1$ e $f(2) \notin I_2$. Se $f(2) \notin I_1$, então, defina $I_2 = I_1$. De qualquer maneira,

$$f(j) \notin I_j, \forall\ j = 1, 2, \text{ e } I_2 \subseteq I_1.$$

Suponha que, indutivamente, estão definidos $I_1, I_2, ..., I_n$ tais que

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq ... \supseteq I_n, \text{ com } f(j) \notin I_j, \forall\ j = 1, 2, ..., n \text{ e } I_n = [a_n, b_n].$$

Se $f(n+1) \in I_n$, logo, ou $f(n+1) \neq a_n$ ou $f(n+1) \neq b_n$. Seja $f(n+1) \neq b_n$. Isto é, $f(n+1) < b_n$. Construa $I_{n+1} = \left[\frac{b_n + f(n+1)}{2}, b_n\right]$. Dessa forma, $I_{n+1} \subseteq I_n$ e $f(n+1) \notin I_{n+1}$. Se $f(n+1) \notin I_n$, então, defina $I_{n+1} = I_n$. Portanto, $I_1, I_2, ..., I_n, ...$ são intervalos tais que

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq ... \supseteq I_n \supseteq ... \text{ com } f(n) \notin I_n, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Pelo Teorema dos Intervalos Encaixados, $\exists\, x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Suponha, por absurdo, que $x = f(m)$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Logo, $x \notin I_m$. Isto é um absurdo. Com isso, $x \notin f(\mathbb{N})$. Ou seja f não é sobrejetiva. Por fim, $\mathbb{R}$ é não-enumerável. □

Agora estamos prontos para mostrar por que existem números reais que não são racionais.

Obs 1.21 (Irracionais)**.** Como $\mathbb{R} = \{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\} \cup \mathbb{Q}$, com união disjunta e $\mathbb{R}$ é não-enumerável, então $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ é não-enumerável, pois a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável (ver exercícios propostos). O conjunto $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ é denominado o conjunto dos números irracionais. Portanto, existem números irracionais em $\mathbb{R}$ (mais que isto, estes formam a "maioria "), ou seja, $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

Vamos generalizar o corolário anterior para intervalos de $\mathbb{R}$.

Corolário 1.5. *Seja I um intervalo não-degenerado. Então I é não-enumerável.*

Demonstração. Vamos provar, primeiramente, que $(-1, 1)$ é não-enumerável. Defina $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ por

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Vê-se facilmente que f é inversível e que $f^{-1} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1 - |y|}, \forall\, y \in (-1, 1),$$

verifique! Como $\mathbb{R}$ é não-enumerável, então $(-1, 1)$ é não-enumerável. Agora, vamos provar que o intervlao (x, y) é não-enumerável. Seja $g : (-1, 1) \to (x, y)$ definida por

$$g(z) = \frac{(y - x)z + x + y}{2}, \forall\, z \in (-1, 1),$$

É fácil ver que, g é uma função bijetora. Logo, (x, y) é não-enumerável. Seja I um intervalo não-degenerado. Então, $\exists\, x, y \in \mathbb{R} : (x, y) \subseteq I$. Como (x, y) é não-enumerável, então, I é não-enumerável. $\square$

A seguir mostraremos que todo intervalo não-degenerado de números reais é formado por números racionais e irracionais.

Teorema 1.6 (Densidade de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$)**.** *Todo intervalo não-degenerado contém um número racional e um número irracional.*

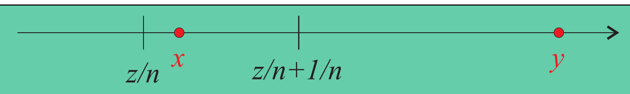

Figura 1.5: A distância de x a y é maior que $1/n$

Demonstração. Seja I um intervalo não-degenerado. Suponha que I não contém números irracionais. Assim, $I \subseteq \mathbb{Q}$. Mas, $\mathbb{Q}$ é enumerável. Portanto, I é enumerável. Mas, pelo corolário 1.5, I é não-enumerável. Assim sendo, I contém um irracional. Vamos provar que I contém um racional. De fato, sejam $x, y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ com $x < y$ e $[x, y] \subseteq I$. Pelo Teorema 1.2 $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente, ou seja, $\exists\ n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{1}{y-x}$. Ou equivalentemente, $y - x > \frac{1}{n}$. Observe que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{z\in\mathbb{Z}} \left[\frac{z}{n}, \frac{z+1}{n}\right].$$

Como $x \in \mathbb{R}$, então

$$\exists\ z \in \mathbb{Z} : \frac{z}{n} \leq x \leq \frac{z+1}{n}.$$

Como $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, então $\frac{z}{n} < x < \frac{z+1}{n}$. Por outro lado, $y - x > \frac{1}{n}$, logo,

$$x < \frac{z+1}{n} < y,$$

pois $[\frac{z}{n}, \frac{z+1}{n}]$ tem comprimento $\frac{1}{n}$. Com isso, $\frac{z+1}{n} \in [x, y] \subseteq I$. Por fim, $\frac{z+1}{n} \in I$ e $\frac{z+1}{n} \in \mathbb{Q}$. $\square$

Exercícios de Fixação

1. Seja $X = \{1 - (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$. Encontre $\inf X$ e $\sup X$.

2. Mostre que $\sup\{1 - 1/n : n \in \mathbb{N}\} = 1$.

3. Seja $X = \{1/m - 1/n : n, m \in \mathbb{N}\}$. Encontre $\inf X$ e $\sup X$.

4. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ não-vazio. Mostre que $x \in \mathbb{R}$ é um limite supeiror de $X \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}$ e $y > x \Rightarrow y \notin X$.

5. Mostre que o corpo dos números reais é arquimediano, isto é, dados $x, y \in \mathbb{R}$, com $0 < x < y$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $Nx > y$.

1.7 Conclusão

Caro aluno, ao final desta aula, é importante ressaltar a relevância do resultado que garante a existência de números irracionais e racionais em qualquer intervalo não-degenerado, já que podemos diminuir o quanto desejarmos o comprimento do intervalo que ainda assim encontramos tais números. Isto nos possibilita perguntar se é possível fazer um estudo no conjunto dos números reais de forma minuciosa, ou seja, podemos estudar o que ocorre próximo a um número real qualquer? A resposta é afirmativa e está exposta na aula 4.

1.8 Resumo

Nesta aula, apresentamos algumas propriedades decorrentes das operações elementares de adição e multiplicação com números reais. Como, por exemplo, existência de elementos neutros para estas duas operações. Provamos também algumas desigualdades relevantes da teoria de módulo de um número real que serão utilizadas no decorrer do material. Além disso, estudamos como encontrar o supremo e o ínfimo de um conjunto limitado qualquer formado por números reais. Estes números são de vital importância, pois, no caso da não existência de um maior ou menor elemento em um conjunto, estes elementos os substituem de uma maneira similar.

1.9 Exercícios Propostos

Exercícios:

1. Prove que a união enumerável de conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.

2. Prove que o produto cartesiano de conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.

3. Prove que $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^*$ e $\mathbb{Q}$ são conjuntos enumeráveis.

4. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Prove que $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.

5. Prove que $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|, \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$.

6. Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$. Prove que $|x - y| < z \Rightarrow |x| < |y| + z$.

7. Sejam $x, y > 0$. Prove que $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$. Ou seja, a média geométrica nunca supera a média aritmética.

8. Sejam $x, y > 0$, racionais. Prove que $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{x}, \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$.

9. Sejam $x \in \mathbb{Q}^*$ e $y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Prove que $xy, x + y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Dê exmplo de dois números x, y irracionais tais que $x + y, xy \in \mathbb{Q}$.

10. (Exemplo de Irracional) Prove que não existe racional cujo quadrado é 2.

11. Dados $a, b \in \mathbb{R}_+$, com $a^2 < 2 < b^2$. Sejam $x, y \in \mathbb{R}_+$ tais que

$$x < 1, x < \frac{2 - a^2}{2a + 1} \text{ e } y < \frac{b^2 - 2}{2b}.$$

Prove que $(a + x)^2 < 2 < (b - y)^2$ e $b - y > 0$. Em seguida, considere o conjunto limitado $X = \{a > 0 : a^2 < 2\}$ e conclua que o número real $c = \sup X$ cumpre $c^2 = 2$, isto é, $c = \sqrt{2}$.

12. Prove que todo subconjunto finito $X \subseteq \mathbb{R}$ possui ínfimo e supremo.

13. Prove que ínfimo, supremo, mínimo, máximo de um conjunto, quando existem, são únicos.

14. Sejam $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos não-vazios limitados. Prove que $\inf Y \leq \inf X \leq \sup X \leq \sup Y$.

15. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ não-vazio limitado superiormente. Dado $a \geq 0$. Prove que aX é limitado superiormente e que $\sup(aX) = a \sup X$.

16. Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ não-vazios e limitados inferiormente. Prove que $X + Y$ é limitado inferiormente e que $\inf(X + Y) = \inf X + \inf Y$.

17. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ não-vazio e limitado. Seja $a < 0$. Prove que $\inf(aX) = a \sup X$.

18. Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}_+$. Definamos $XY = \{xy : x \in X, y \in Y\}$. Prove que se X e Y forem limitados então XY é limitado com $\sup(XY) = \sup X \sup Y$ e $\inf(XY) = \inf X \inf Y$.

19. Sejam $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$ não-vazios. Suponha que X é limitado superiormente e que, para cada $y \in Y$, $\exists\, x \in X$ tal que $y \leq x$. Prove que $\sup X = \sup Y$.

20. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ chama-se limitada se $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto limitado. Neste caso, definimos $\sup f := \sup f(X)$ e $\inf f := \inf f(X)$. Prove que

i) mostre que $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$;

ii) considerando as funções $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, definidas por: $f(x) = x$ e $g(x) = -x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, mostre que $\sup(f + g) < \sup f + \sup g$ e que $\inf(f + g) > \inf f + \inf g$.

1.10 Exercícios Resolvidos

Questões Resolvidas:

Ex1. Sejam $0 < x < y$ números reais. Prove que $0 < y^{-1} < x^{-1}$.

Demonstração. Vamos provar, primeiramente, a seguinte afirmação: seja $x > 0$ um número real. Então $x^{-1} > 0$. Com efeito, vimos que $1 = xx^{-1}$. Portanto, $x^{-1} = x(x^{-1})^2 > 0$. Então, $x^{-1} > 0$ (ver Definição 1.2). Agora, provemos o **Ex**1. Se $0 < x < y$, então $x^{-1}, y^{-1} > 0$. Por monotonicidade e comutatividade, obtemos

$$0 < x(x^{-1}y^{-1}) < y(x^{-1}y^{-1}).$$

Consequentemente, $0 < y^{-1} < x^{-1}$. □

Ex2. (Desigualdade de Bernoulli) Prove que $(1+x)^n \geq 1 + nx$, $\forall\ x \geq -1$ e $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja $X = \{n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1 + nx\}$. Vamos provar por indução que $X = \mathbb{N}$. Note que $1 \in X$. De fato, $(1+x)^1 \geq 1 + 1x$. Suponha que, $n \in X$. Ou seja, $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Portanto,

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+x^2 \geq 1+x+nx = 1+(n+1)x,$$

onde a primeira desigualdade é verdadeira porque $1 + x \geq 0$. Isto mostra que, $n + 1 \in X$. Por indução, $X = \mathbb{N}$. Ou seja, $(1+x)^n \geq 1 + nx, \forall\ n \in \mathbb{N}$. □

Ex3. Sejam X não-vazio, limitado inferiormente e $a > 0$. Seja $aX = \{ax : x \in X\}$. Então $\inf(aX) = a \inf X$.

Demonstração. De fato,

$$\exists\ c \in \mathbb{R} : c \leq x, \forall\ x \in X.$$

Portanto, por monotonicidade, $ac \leq ax$, $\forall\ ax \in aX$. Ou seja, aX é limitado inferiormente. Analogamente, $a \inf X \leq ax$, $\forall\ ax \in aX$, pois $\inf X$ é cota inferior de X. Dado $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $x < \inf X + \frac{\varepsilon}{a}$. Portanto,

$$ax < a \inf X + \varepsilon, \text{ com } ax \in aX.$$

Com isso, $\inf(aX) = a \inf X$. □

Ex4. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ chama-se limitada se $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto limitado. Neste caso, definimos $\sup f := \sup f(X)$. Prove que:

i. a soma $f + g : X \to \mathbb{R}$ de duas funções limitadas $f, g : X \to \mathbb{R}$ é uma função limitada;

Demonstração. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções limitadas. Assim, $f(X), g(X) \subseteq \mathbb{R}$ são conjuntos limitados. Logo, existem $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que

$$a \leq f(x) \leq b \text{ e } c \leq g(x) \leq d, \forall\ x \in X.$$

Portanto,

$$a + c \leq f(x) + g(x) \leq b + d, \forall\ x \in X.$$

Isto nos diz que $f(X)+g(X)$ é limitado. Por definição, $f+g$ é uma função limitada. □

ii. Mostre que $(f + g)(X) \subseteq f(X) + g(X)$. Conclua que $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$ e que $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$;

Demonstração. Seja $a \in (f + g)(X)$. Assim,

$$a \in (f + g)(X) \Rightarrow a = (f + g)(x) = f(x) + g(x) \in f(X) + g(X), x \in X.$$

Logo, $a \in f(X) + g(X)$. Ou seja, $(f + g)(X) \subseteq f(X) + g(X)$. Usando os Exercícios Propostos, concluímos que

$$\sup(f + g) := \sup(f + g)(X) \leq \sup f(X) + \sup g(X) =: \sup f + \sup g.$$

Analogamente, $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$. □

Ex5. Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ não-vazios e limitados tais que $x \leq y$, $\forall\ x \in X, y \in Y$. Prove que $\sup X \leq \inf Y$. Além disso, prove que $\sup X = \inf Y \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ x \in X, y \in Y$ tais que $y - x < \varepsilon$.

Demonstração. A Definição 1.11 nos permite concluir que $\sup X \leq y$, $\forall\ y \in Y$. Utilizando a Definição 1.12, concluímos que $\sup X \leq \inf Y$. Vamos, agora, provar a equivalência enunciada.

$\Rightarrow$) Suponha que $\sup X = \inf Y$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, temos que existem $x \in X, y \in Y$ tais que $\sup X - \frac{\varepsilon}{2} < x$ e $y < \inf Y + \frac{\varepsilon}{2}$. Com isso,

$$y - x < \inf Y + \frac{\varepsilon}{2} - \sup X + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Leftarrow$) Suponha, por contraposição, que $\sup X < \inf Y$. Seja $\varepsilon = \inf Y - \sup X > 0$. Lembre que, $x \leq \sup X$ e $\inf Y \leq y$, $\forall\ x \in X, y \in Y$. Daí,

$$y - x \geq \inf Y - \sup X = \varepsilon, \forall\ x \in X, y \in Y.$$

Isto conclui a prova. $\square$

Auto-Avaliação

Sou capaz de utilizar as operações elementares de adição e multiplicação, do módulo e encontrar ínfimo e supremo de conjuntos limitados em $\mathbb{R}$?

Próxima Aula

Caro aluno, utilizaremos os conceitos e resultados obtidos sobre módulo e ordem parcial em $\mathbb{R}$ para na aula seguinte definirmos sequências de números reais convergentes.

Referências Bibliográficas

[1] Alonso, M.; Finn, E. J., *Física: Um Curso Universitário.* Segunda Edição, São Paulo, Edgard Blücher Ltda, 2009. 481p.

[2] Bartle, R. G.; Sherbert, D. R., *Introdution to Real Analysis*, Third Edition, New York, JohnWiley and Sons,Inc., 2000. 399p.

[3] Boyce, W. E.; DiPrima, R. C., *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.* Seventh Edition, New York, JohnWiley and Sons,Inc, 2001. 745p.

[4] Brasil, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

[5] Brauer, F.; Nohel, J. A., *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations.* University of Wisconsin, 1989.

[6] Dragomir, S. S., *Some Gronwall Type Inequalities and Applications.* Monograph. Victoria University of Technology, 2002.

[7] Ferreira, J., *A Construção dos Números.* Primeira Edição, Rio de Janeiro, SBM, 2010. 133p.

[8] Figueiredo, D., *Análise I.* Segunda Edição, Rio de Janeiro, LTC, 2008. 266p.

[9] Guillemin, V.; Pollack, A., *Differential Topology.* First Edition, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1974. 227p.

[10] King, A.C.; Billingham, J.; OTTO, S.R., *Differential Equations.* Linear, Nonlinear, Ordinary, Partial. Cambridge University Press. New York, 2003.

[11] Lima, E. L., *Análise Real.* Funções de uma variável, vol.1. 8°. ed. Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[12] Lima, E. L., *Análise Real,* vol.2. Rio de Janeiro, 2004.

[13] Lima, E. L., *Curso de Análise*, vol. 1, Décima Segunda Edição, Rio de Janeiro, IMPA, 2008. 431p.

[14] Melo, W., *Existência de soluções clássicas para as Equações de Burgers e Navier-Stokes.* Dissertação de Mestrado. UFPE, 2007.

[15] Munkres, J. R., *Topology.* Second Edition, New Jersey, Prentice Hall, Inc., 2000. 552p.

[16] Nolt, J.; Rohatys, D.; Varzi, A., *Theory and problems or logic.* Second edition, New York, McGraw-Hill, 2009. 279p.

[17] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis.* Third Edition, New York, McGraw-Hill, Inc., 1976. 351p.

[18] Smoller, J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations.* 2nd ed., Springer-Verlag, 1994.

[19] Tveito, A.; Winther, R., *Introduction to Partial Differential Equations.* A Computational Approach. New York, 1961.

Professor Revisor

Professor Paulo de Souza Rabelo