# Capítulo 3

# Terceira Aula: Série de Números Reais

## Meta

Apresentar e demonstrar os Testes de Convergência que determinam a convergência ou divergência de algumas séries.

## Objetivos

Ao final desta aula o aluno deverá ser capaz de identificar se uma série converge, converge absolutamente, converge condicionalmente ou diverge.

## Pré-requisitos

Aula 2, Fundamentos da Matemática e Cálculo II.

## 3.1 Introdução

Nesta aula, apresentaremos a você, caro leitor, a possibilidade de somarmos uma quantidade enumerável e infinita de números reais. A esta soma daremos o nome série. A primeira pergunta que surge, neste momento, é a seguinte: O resultado desta soma é um número real? A resposta é negativa. Mas, algumas séries podem estar tão próximas a um número real quanto desejarmos. Nosso estudo inicial é definir e exemplificar tais somas. Em seguida, exibiremos testes que identificam a convergência destas séries. Porém, como todo teste, existe possibilidade de que esses, em casos específicos, não funcionem. Então, a única maneira de você conhecer qual teste será conclusivo é a experiência obtida no estudo de atividades propostas. Por isso, recomendo a resolução dos exercícios listados nesta aula. Por fim, questionaremos se é possível comutar as parcelas de uma série sem alterar o resultado de sua soma. Veremos que isto ocorre somente sob algumas condições.

## 3.2 Convergência de Séries

Nesta seção, definiremos e exemplificaremos, de maneira precisa, o que significa, em Matemática, somar uma quantidade enumerável e infinita de números reais. É importante ressaltar que o nosso interesse no estudo destas somas é estudar sua convergência.

**Definição 3.1** (Série)**.** Seja $(x_n)$ uma sequência de números reais. A soma infinita dos termos de $(x_n)$, denotada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + ... + x_n + ...,$$

é denominada uma série de números reais. Neste caso, $x_n$ é chamado $n$-ésimo termo ou termo geral da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

**Obs 3.1.** Quando não houver possibilidade de confusão denotaremos a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ simplesmente por $\sum x_n$.

**Exemplo 3.1.** As somas

$$\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...,$$

$$\sum (-1)^n = -1 + 1 - 1 + ... + (-1)^n + ...$$

e

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ...$$

são exemplos de séries de números reais. No decorrer da teoria daremos mais exemplos de séries.

Os ingredientes que nos auxiliarão na definição de convergência para uma série estão definidos abaixo.

**Definição 3.2** (Somas Parciais)**.** Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ uma série. Defina a sequência $(s_n)$ pondo

$$s_1 = x_1 \text{ e } s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + ... + x_n, \forall\ n > 1.$$

Chamamos $s_n$ de $n$-ésima soma parcial da série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e a sequência $(s_n)$ é chamada sequência das somas parciais, ou simplesmente somas parciais, da série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

**Exemplo 3.2.** As $n$-ésimas somas parciais das séries $\sum \frac{1}{n}$, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ são respectivamente,

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n},\ \ t_n = -1 + 1 - 1 + ... + (-1)^n$$

e

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + ... + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Agora estamos prontos para definir quando uma série converge ou não.

**Definição 3.3** (Convergência de Séries)**.** Dizemos que uma série $\sum x_n$ é convergente se a sequência de somas parciais $(s_n)$ é convergente. Neste caso, $\sum x_n = x$, onde $x = \lim s_n$ é chamado a soma desta série. Caso contrário, dizemos que $\sum x_n$ é divergente.

**Obs 3.2.** Veja que

$$x = \lim s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Assim sendo, se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

**Exemplo 3.3.** Vimos que a $n$-ésima soma parcial da série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ é dada por

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}, \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\lim s_n = \lim \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

ou seja, $\sum \frac{1}{n(n+1)} = 1$ é uma série convergente.

**Exemplo 3.4.** $t_n = -1 + 1 - 1 + ... + (-1)^n$ é a $n$-ésima soma parcial da série $\sum(-1)^n$. Assim,

$$(t_{2n}) = (0, 0, ..., 0, ...) \text{ e } (t_{2n-1}) = (-1, -1, ..., -1, ...).$$

Logo, $(t_n)$ é divergente (ver Teorema 2.2). Portanto, $\sum(-1)^n$ é divergente.

O resultado a seguir nos dá uma condição necessária para que uma série seja convergente.

**Teorema 3.1.** *Se a série* $\sum x_n$ *converge, então* $\lim x_n = 0$.

*Demonstração.* Suponha que $\sum x_n = x$. Seja $(s_n)$ a sequência de somas parciais desta série. Assim, $\lim s_n = x$ (ver Definição 3.3). Usando o Teorema 2.2, concluímos que $\lim s_{n+1} = x$. Portanto,

$$\lim(s_{n+1} - s_n) = \lim s_{n+1} - \lim s_n = x - x = 0.$$

Mas,

$$s_{n+1} - s_n = x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1} - (x_1 + x_2 + ... + x_n) = x_{n+1}.$$

Consequentemente, utilizando a Proposição 2.1, chegamos a

$$\lim x_n = \lim x_{n+1} = \lim(s_{n+1} - s_n) = 0.$$

□

**Obs 3.3.** Veremos no Exemplo 10.11 que a série $\sum \frac{1}{n}$ é divergente, mas $\lim \frac{1}{n} = 0$. Portanto, a recíproca do Teorema 3.1 não é verdadeira.

**Obs 3.4.** A contrapositiva do Teorema 3.1 nos diz que $\lim x_n \neq 0 \Rightarrow \sum x_n$ diverge. Esta observação tem aplicação direta em exemplos. Veja os dois exemplos a seguir.

**Exemplo 3.5.** A série $\sum \frac{n+1}{n}$ é uma série divergente, pois

$$\lim \frac{n+1}{n} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0,$$

ver contrapositiva do Teorema 3.1.

**Exemplo 3.6.** A série $\sum \frac{n^2}{3n^2+2}$ é divergente, porque

$$\lim \frac{n^2}{3n^2 + 2} = \lim \frac{1}{3 + \frac{2}{n^2}} = \frac{1}{3} \neq 0,$$

ver Teorema 3.1.

Vamos estudar algumas séries especiais, denominadas séries geométricas. Identificaremos alguns casos onde estas convergem e qual o valor de sua soma.

**Exemplo 3.7** (Série Geométrica)**.** Sejam $a, r \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. Chamamos a série

$$\sum ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ...$$

de série geométrica com razão $r$. Vamos provar que $\sum ar^{n-1}$ converge se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geq 1$. De fato,

1. se $|r| = 1$, então $r = \pm 1$. Logo, $\sum ar^{n-1} = \sum a$ ou $\sum ar^{n-1} = \sum a(-1)^{n-1}$, as quais divergem pelo Teorema 3.1.

2. Considere então que $|r| \neq 1$. Seja

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$$

a $n$-ésima soma parcial de série $\sum ar^{n-1}$. Com isso,

$$rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} + ar^n.$$

Portanto, $s_n - rs_n = a - ar^n$. Consequentemente, $(1-r)s_n = a(1-r^n)$. Por fim,

$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r},$$

pois $|r| \neq 1$. Se $|r| < 1$, então $\lim |r|^n = 0$ (ver Proposição 2.2). Ou equivalentemente, $\lim r^n = 0$. Assim sendo,

$$\lim s_n = \lim \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}.$$

Se $|r| > 1$, então $\lim r^n$ não existe (ver Proposição 2.3). Daí, $(s_n)$ é divergente. Ou seja,

$$\sum ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \text{ converge se } |r| < 1 \text{ e } \sum ar^{n-1} \text{ diverge se } |r| \geq 1.$$

Séries geométricas podem ser utilizadas para transformar alguns números decimais em frações irredutíveis. Veja o exemplo a seguir.

**Exemplo 3.8.** A série $\sum \frac{23}{100}(1/100)^{n-1}$ é uma série geométrica de raio $1/100 < 1$. Logo a série

$$\sum \frac{23}{100}(1/100)^{n-1} = \frac{23}{1-1/100} = 23/99$$

converge. Assim,

$$\begin{aligned}
5,2323... &= 5 + 0,2323... \\
&= 5 + 0,23 + 0,0023 + 0,000023 + ... \\
&= 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{100^2} + \frac{23}{100^3} + ... + \frac{23}{100^{n-1}} + ... \\
&= 5 + \sum \frac{23}{100}(1/100)^{n-1} \\
&= 5 + 23/99 \\
&= \frac{518}{99}.
\end{aligned}$$

## Exercícios de Fixação

**1.** Mostre que a convergência da série não é afetada se mudarmos um número finito de termos. Neste caso, a soma não necessariamente é a mesma.

**2.** Utilizando frações parciais mostre que:

**i)** $\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1$;

**ii)** $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

**3.** Utilizando série geométrica, expresse os números $0,7373...$ e $0,222...$ como um número racional.

**4.** Determine se a série é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule sua soma:

**i)** $\sum 6(0,9)^{n-1}$;

**ii)** $\sum \frac{(-\pi)^n}{3^{n+1}}$.

## 3.3 Operações Elementares com Séries

Nesta seção, mostraremos as mais elementares operações com séries convergentes. Exibiremos, também, vários exemplos para esclarecer por que outras operações, tão simples quanto as apresentadas no próximo resultado, não são verdadeiras para algumas séries de números reais.

**Teorema 3.2** (Operações com Séries)**.** *Sejam* $\sum x_n$ *e* $\sum y_n$ *séries convergentes e* $k \in \mathbb{R}$*, então:*

**i)** $\sum(x_n + y_n) = \sum x_n + \sum y_n$;

**ii)** $\sum kx_n = k\sum x_n$.

*Demonstração.* Considere que $\sum x_n = x$ e $\sum y_n = y$. Sejam $(s_n)$ e $(t_n)$ as sequências das somas parciais para as séries $\sum x_n$ e $\sum y_n$, respectivamente, então $\lim s_n = x$ e $\lim t_n = y$.
**i)** Assim sendo, com o Teorema 2.11, concluímos que

$$\lim(s_n + t_n) = \lim s_n + \lim t_n = x + y,$$

mas,

$$\begin{aligned} s_n + t_n &= x_1 + x_2 + ... + x_n + y_1 + y_2 + ... + y_n \\ &= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + ... + (x_n + y_n) \end{aligned}$$

é a $n$-ésima soma parcial da série $\sum(x_n + y_n)$. Logo, $\sum(x_n + y_n)$ converge para $x + y$. Ou seja,

$$\sum(x_n + y_n) = x + y = \sum x_n + \sum y_n.$$

**ii)** Analogamente,

$$\lim ks_n = k \lim s_n = kx,$$

ver Teorema 2.11. Por outro lado,

$$ks_n = k(x_1 + x_2 + ... + x_n) = kx_1 + kx_2 + ... + kx_n$$

é a $n$-ésima soma parcial para a série $\sum kx_n$. Portanto, $\sum kx_n$ converge para $kx$. Isto é,

$$\sum kx_n = kx = k \sum x_n.$$

$\square$

No item **i)** do Teorema 3.2, podemos substituir a operação soma pela subtração, que ainda assim o resultado é verdadeiro. Veja a observação abaixo.

**Obs 3.5.** Considere que $\sum x_n$ e $\sum y_n$ são séries convergentes. Daí,

$$\sum(x_n - y_n) = \sum[x_n + (-y_n)] = \sum x_n + \sum(-y_n) = \sum x_n - \sum y_n.$$

**Exemplo 3.9.** Olhe que

$$\begin{aligned}
\sum \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}} &= \sum \left[\frac{3^{n-1}}{6^{n-1}} - \frac{1}{6^{n-1}}\right] = \sum \left[\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{6^{n-1}}\right] \\
&= \sum \left[\frac{1}{2^{n-1}} - \sum \frac{1}{6^{n-1}}\right] = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1-\frac{1}{6}} \\
&= \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

Se multiplicarmos cada termo de uma série divergente por uma constante real não-nula, não modificaremos a divergência de tal série. Veja a observação abaixo.

**Obs 3.6.** Observe que se $\sum x_n$ é divergente, então $\sum kx_n$ é divergente, onde $k \neq 0$. Suponha, por absurdo, que $\sum kx_n$ é convergente, então, pelo Teorema 3.2, $1/k \sum kx_n$ é convergente e

$$1/k \sum kx_n = \sum (1/k)kx_n = \sum x_n.$$

Portanto, $\sum x_n$ é convergente. Absurdo, pois, $\sum x_n$ é divergente! Logo, $\sum kx_n$ é divergente.

**Exemplo 3.10.** As séries

$$\sum \frac{4}{n} = \sum 4\frac{1}{n}, \ \sum \frac{1}{5n} = \sum \frac{1}{5}\frac{1}{n} \text{ e } \sum \frac{-1}{n} = \sum (-1)\frac{1}{n}$$

são divergentes (ver Exemplo 10.11).

Se retirarmos a hipótese de convergência de somente uma das séries no item **i)** do Teorema 3.2, a conclusão deixa de ser verdadeira. Olhe a observação abaixo.

**Obs 3.7.** Note que se $\sum x_n$ é convergente e $\sum y_n$ é divergente, então $\sum[x_n+y_n]$ é divergente. Suponha, por absurdo, que $\sum[x_n + y_n]$ é convergente, então, pelo Teorema 3.2,

$$\sum[(x_n + y_n) - x_n] \text{ é convergente e } \sum[(x_n + y_n) - x_n] = \sum y_n.$$

Portanto, $\sum y_n$ é convergente. Absurdo, pois, $\sum y_n$ é divergente! Logo, $\sum[x_n + y_n]$ é divergente.

**Exemplo 3.11.** A série $\sum \frac{3^n+n}{n3^n}$ é divergente, pois

$$\sum \frac{3^n + n}{n3^n} = \sum \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{3^n}\right],$$

onde $\sum \frac{1}{n}$ é divergente (ver Exemplo 10.11) e $\sum \frac{1}{3^n} = \sum \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ é convergente (ver Exemplo 3.7).

Agora, se retirarmos a hipótese de convergência das séries $\sum x_n$ e $\sum y_n$ no item **i)** do Teorema 3.2, nada pode ser inferido sobre a convergência de $\sum[x_n+y_n]$. O exemplo a seguir discute este fato.

**Exemplo 3.12.** Olhe que se $\sum x_n$ e $\sum y_n$ são divergentes, não podemos concluir que $\sum[x_n+y_n]$ é divergente. Por exemplo,

$$\sum \left[\frac{1}{n} + \frac{-1}{n}\right] = \sum 0 = 0$$

é convergente, porém as séries $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$ e $\displaystyle\sum \frac{-1}{n}$ são divergentes (ver Exemplo 10.11).

Os dois exemplos abaixo discutem o que ocorre com a multiplicação e divisão termo a termo de duas séries convergentes.

**Exemplo 3.13.** Sabemos que

$$\sum \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \text{ e } \sum \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2},$$

ver Exemplo 3.7. Portanto,

$$\sum \frac{1}{2^{n-1}} \sum \frac{1}{3^{n-1}} = 2\frac{3}{2} = 3.$$

Por outro lado,

$$\sum \frac{1}{2^{n-1}}\frac{1}{3^{n-1}} = \sum \frac{1}{2^{n-1}}\frac{1}{3^{n-1}} = \sum \frac{1}{6^{n-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{6}{5}.$$

Logo,

$$\sum \frac{1}{2^{n-1}} \sum \frac{1}{3^{n-1}} = 3 \neq \frac{6}{5} = \sum \frac{1}{2^{n-1}}\frac{1}{3^{n-1}},$$

ou seja,

$$\sum \frac{1}{2^{n-1}} \sum \frac{1}{3^{n-1}} \neq \sum \frac{1}{2^{n-1}}\frac{1}{3^{n-1}}.$$

Dessa forma, mesmo que $\sum x_n$ e $\sum y_n$ sejam convergentes, não é verdade que

$$\sum x_n y_n = \sum x_n \sum y_n.$$

**Exemplo 3.14.** Veja que $\sum \frac{1}{2^{n-1}} = 2$ e $\sum \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{3}{2}$. Por outro lado,

$$\sum \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \Big/ \left(\frac{1}{3^{n-1}}\right) = \sum \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}} = \sum \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

é divergente (ver Exemplo 3.7). Portanto, mesmo que $\sum x_n$ e $\sum y_n$ sejam convergentes, não é verdade que $\sum (x_n/y_n)$ seja convergente.

## Exercícios de Fixação

**1.** Calcule a soma da série $\sum \frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}$.

**2.** Determine se as séries $\sum \frac{1+3^n}{2^n}$, $\sum \frac{1+3^n}{2^n}$ e $\sum \frac{1}{10n}$ convergem ou divergem. Se for convergente calcule sua soma.

## 3.4 Testes de Convergência para Séries

Neste momento, estamos interessados em elaborar alguns testes que verifiquem a convergência ou divergência de algumas séries contituídas de números reais.

**Teorema 3.3** (Teste da Comparação)**.** *Sejam* $\sum x_n$ *e* $\sum y_n$ *séries tais que* $x_n, y_n \geq 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. *Seja* $N \in \mathbb{N}$. *Então,*

**i)** $\sum y_n$ *é convergente e* $x_n \leq y_n$, $\forall\ n \geq N \Rightarrow \sum x_n$ *é convergente;*

**ii)** $\sum y_n$ *é divergente e* $x_n \geq y_n$, $\forall\ n \geq N \Rightarrow \sum x_n$ *é divergente.*

*Demonstração.* Consideraremos nos dois itens que $N = 1$. Sejam $(s_n)$ e $(t_n)$ as sequências das somas parciais das séries $\sum x_n$ e $\sum y_n$, respectivamente

**i)** Suponha que $\sum y_n = y$ e $x_n \leq y_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Logo, $\lim t_n = y$. Dessa forma,

$$0 \leq s_n = x_1 + x_2 + ... + x_n \leq y_1 + y_2 + ... + y_n = t_n, \forall\ n \in \mathbb{N},$$

pois $0 \leq x_n \leq y_n$. Mas $(t_n)$ é convergente, logo $(t_n)$ é limitada (ver Teorema 2.3). Ou seja, existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $t_n \leq d$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Com isso, $0 \leq s_n \leq t_n \leq d$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Com isso, $(s_n)$ é limitada. Agora, vejamos por que $(s_n)$ é monótona. De fato,

$$s_{n+1} = x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1} = s_n + x_{n+1} \geq s_n, \forall\ n \in \mathbb{N},$$

pois $x_n \geq 0$. Ou seja, $(s_n)$ é não-decrescente. Dessa forma $(s_n)$ é monótona e limitada. Pelo Teorema 2.4, $(s_n)$ é convergente. Logo, $\sum x_n$ é convergente.

**ii)** Façamos a prova por contraposição. Suponha que $\sum x_n$ é convergente e $x_n \geq y_n$, $\forall\ n \geq N$. Assim, pelo item **i)**, $\sum y_n$ é convergente. □

**Obs 3.8.** Na demonstração do Teorema 3.3 consideramos que $N = 1$, pois

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{N} x_n + \sum_{n=N}^{\infty} x_n.$$

Usando esta última igualdade a prova segue de maneira análoga.

**Exemplo 3.15.** A série $\sum \frac{n-1}{n4^n}$ é convergente? Observe que

$$\frac{n-1}{n4^n} \leq \frac{1}{4^n} \Leftrightarrow 4^n n - 4^n \leq 4^n n \Leftrightarrow -4^n \leq 0.$$

Como

$$\sum \frac{1}{4^n} = \sum \frac{1}{4}\frac{1}{4^{n-1}}$$

é uma série geométrica convergente (razão $1/4 < 1$). Pelo Teorema 3.3, $\sum \dfrac{n-1}{n4^n}$ é convergente.

**Exemplo 3.16.** Veremos no Exemplo 10.11 que $\sum \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e é divergente para $p \leq 1$. Usaremos este fato para ilustrar o Teorema 3.3. A série $\sum \frac{1}{2n+3}$ é convergente? Veja que

$$\frac{1}{2n+3} \geq \frac{1}{5n} \Leftrightarrow 5n \geq 2n+3 \Leftrightarrow 3n \geq 3 \Leftrightarrow n \geq 1.$$

Como $\sum \frac{1}{5n}$ é divergente, então $\sum \frac{1}{2n+3}$ é divergente.

**Teorema 3.4** (Teste da Comparação por Limites)**.** *Sejam* $\sum x_n$ *e* $\sum y_n$ *séries tais que* $x_n, y_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = x > 0 \Rightarrow \sum x_n \textit{ converge } \Leftrightarrow \sum y_n \textit{ converge }.$$

*Demonstração.* Veja que

$$x/2 < \lim \frac{x_n}{y_n} = x < 2x,$$

pois $x > 0$. Logo, utilizando o Teorema 2.5, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$x/2 < \frac{x_n}{y_n} < 2x, \forall\, n \geq N.$$

Como $y_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, então

$$xy_n/2 < x_n < 2xy_n, \forall\, n \geq N.$$

Se $\sum x_n$ é convergente, então, $\sum 2x_n/x$ é convergente (ver Teorema 3.2). Por conseguinte, usando o Teorema 3.3, concluímos que $\sum y_n$ também é, pois $y_n < 2x_n/x$, $\forall\, n \geq N$. Se $\sum x_n$ é divergente, então $\sum x_n/2x$ é divergente (ver observações do Teorema 3.2). Com isso, usando o fato que $x_n/2x < y_n$, $\forall\, n \geq N$, concluímos que $\sum y_n$ é divergente usando o Teorema 3.3. □

**Exemplo 3.17.** A série $\sum \frac{1}{3^n-1}$ é convergente? Considere a série geométrica convergente $\sum \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} \sum \frac{1}{3^{n-1}}$ com razão $1/3 < 1$ (ver Exemplo 3.7). Observe que

$$\lim \frac{1}{3^n-1} 3^n = \lim \frac{1}{1-\frac{1}{3^n}} = 1 > 0,$$

ver Proposição 2.2. Dessa forma, usando o Teorema 3.4, temos que $\sum \frac{1}{3^n-1}$ é uma série convergente.

**Exemplo 3.18.** Considere a série $\sum n$. Esta série é divergente, pois $\lim n = \infty \neq 0$ (ver Teorema 3.1). Vamos verificar que a série $\sum \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^2}}$ é divergente usando o Teorema 3.4. Com efeito,

$$\lim \frac{\frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^2}}}{n} = \lim \frac{\frac{n^2(2+\frac{3}{n})}{\sqrt{n^2(\frac{5}{n^2}+1)}}}{n} = \lim \frac{n^2(2+\frac{3}{n})}{n^2\sqrt{\frac{5}{n^2}+1}} = \lim \frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{\frac{5}{n^2}+1}} = 2 > 0.$$

Consequentemente, com o Teorema 3.4, obtemos que a série $\sum \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^2}}$ é divergente.

Veremos a seguir uma condição suficiente para que uma série seja convergente. Para este fim, precisaremos da seguinte definição.

**Definição 3.4** (Convergência Absoluta)**.** Uma série $\sum x_n$ é dita absolutamente convergente se a série $\sum |x_n|$ é convergente.

**Exemplo 3.19.** A série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^\pi}$ é uma série absolutamente convergente, pois $\sum \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^\pi}\right| = \sum \frac{1}{n^\pi}$ converge (ver Exemplo 10.11).

**Exemplo 3.20.** A série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}$ é absolutamente convergente, pois

$$\sum \left|\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}\right| = \sum \frac{1}{2^{n-1}}$$

é uma série geométrica com razão 1/2 (ver Exemplo 3.7).

**Exemplo 3.21.** A série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ não é absolutamente convergente, pois $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ é divergente (ver Exemplo 10.11).

O teste que será apresentado, logo em seguida, serve para verificar convergência de séries que tem sinais opostos termo a termo. A definição abaixo caracteriza precisamente tais somas.

**Definição 3.5** (Série Alternada)**.** Uma série é dita alternada se esta pode ser escrita na forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n = -x_1 + x_2 - ... + (-1)^n x_n + ...$$

ou
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}y_n = y_1 - y_2 + ... + (-1)^n y_n + ...$$
com $x_n, y_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

**Exemplo 3.22.** A série
$$\sum \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - ... + \frac{(-1)^n}{n} + ...$$
é uma série alternada.

**Exemplo 3.23.** A série
$$\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} + ...$$
não é uma série alternada.

Antes de enunciar o Teste de Leibniz, é importante ressaltar que tal ferramenta não serve para determinar se uma série alternada é divergente.

**Teorema 3.5** (Teste de Leibniz)**.** *Seja $(x_n)$ uma sequência decrescente tal que* $\lim x_n = 0$. *Então, a série alternada $\sum(-1)^n x_n$ é convergente.*

*Demonstração.* Seja $(s_n)$ a sequência formada pelas somas parciais de $\sum(-1)^n x_n$. Vamos provar que $(s_n)$ é convergente. Iremos analisar as subsequências $(s_{2n})$ e $(s_{2n-1})$ de $(s_n)$. Como $(x_n)$ é decrescente, então
$$s_{2n+2} = -x_1 + x_2 + ... + x_{2n} - x_{2n+1} + x_{2n+2} = s_{2n} - x_{2n+1} + x_{2n+2} < s_{2n}, \forall\, n \in \mathbb{N},$$
pois $x_{2n+1} > x_{2n+2}$. Ou seja, $(s_{2n})$ é decrescente. Portanto, $... < s_{2n} < ... < s_4 < s_2$. Agora, vamos estudar a subsequência $(s_{2n-1})$ de $(s_n)$. Veja que
$$s_{2n+1} = -x_1 + x_2 + ... - x_{2n-1} + x_{2n} - x_{2n+1} = s_{2n} + x_{2n} - x_{2n+1} > s_{2n}, \forall\, n \in \mathbb{N},$$
pois $x_{2n} > x_{2n+1}$. Isto é, $(s_{2n-1})$ é crescente. Com isso, $s_1 < s_3 < ... < s_{2n-1} < ....$ Além disso,
$$s_{2n} = -x_1 + x_2 + ... - x_{2n-1} + x_{2n} = s_{2n-1} + x_{2n} \geq s_{2n-1}, \forall\, n \in \mathbb{N},$$

já que $x_{2n} \geq 0$. Por fim,

$$s_1 < s_3 < ... < s_{2n-1} < ... < s_{2n} < ... < s_4 < s_2.$$

Ou seja, $(s_{2n})$ e $(s_{2n-1})$ são sequências monótonas e limitadas. Assim, usando o Teorema 2.4, concluímos que $\lim s_{2n} = x$ e $\lim s_{2n-1} = y$. Mas, $s_{2n} = s_{2n-1} + x_{2n}$ e $\lim x_n = 0$. Daí, $\lim s_{2n} = \lim s_{2n-1} + \lim x_{2n} \Rightarrow x = y + 0 = y$ (ver Teorema 2.2). Dessa forma, $\lim s_n = x$ (ver exercícios de sequências). Isto nos diz que a série alternada $\sum (-1)^n x_n$ é convergente. $\square$

**Exemplo 3.24.** Considere a série alternada $\sum \frac{(-1)^n}{n}$. Seja $x_n = 1/n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Observe que

$$\lim x_n = \lim \frac{1}{n} = 0.$$

Além disso, $(x_n) = (1/n)$ é decrescente, pois $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Com efeito,

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow n+1 \geq n \Leftrightarrow 1 \geq 0, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Pelo Teorema 3.5, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente.

**Exemplo 3.25.** Considere a série alternada $\sum \frac{(-1)^n (n+1)}{n}$. Defina $x_n = \dfrac{n+1}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Com isso,

$$\lim x_n = \lim \frac{n+1}{n} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0.$$

Dessa forma, não podemos aplicar o Teorema 3.5. A seguir veremos uma outra maneira de verificar a convergência desta série.

Veremos a seguir que toda série absolutamente convergente converge.

**Teorema 3.6.** *Seja $\sum x_n$ uma série. Então, se $\sum |x_n|$ converge temos que $\sum x_n$ é também convergente. Além disso, $|\sum x_n| \leq \sum |x_n|$.*

*Demonstração.* Sejam

$$t_n = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| + ... \text{ e } s_n = x_1 + x_2 + ... + x_n + ...$$

as $n$-ésimas somas parciais das séries $\sum |x_n|$ e $\sum x_n$, respectivamente. Como $\sum |x_n|$ é convergente, então $(t_n)$ é convergente. Usando o Teorema 2.14, concluímos que $(t_n)$ é de Cauchy.

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m < n$. Dessa forma, a desigualdade triangular nos permite concluir que

$$\begin{aligned}
|s_n - s_m| &= |x_1 + x_2 + ... + x_m + x_{m+1} + ... + x_n - (x_1 + x_2 + ... + x_m)| \\
&= |x_{m+1} + ... + x_n| \\
&\leq |x_{m+1}| + ... + |x_n| \\
&= ||x_{m+1}| + ... + |x_n|| \\
&= ||x_1| + |x_2| + ... + |x_m| + |x_{m+1}| + ... + |x_n| - (|x_1| + |x_2| + ... + |x_m|)| \\
&= |t_n - t_m|.
\end{aligned}$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n, m \geq N$, tem-se que $|t_n - t_m| < \varepsilon$. Portanto,

$$|s_n - s_m| \leq |t_n - t_m| < \varepsilon, \forall\, n, m \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente, $(s_n)$ é de Cauchy. Com o Teorema 2.15, obtemos que $(s_n)$ é convergente. Por fim, $\sum x_n$ é uma série convergente. Além disso,

$$|s_n| = |x_1 + x_2 + ... + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| = t_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

e, portanto,

$$\left|\sum x_n\right| = |\lim s_n| = \lim |s_n| \leq \lim t_n = \sum |x_n|,$$

ver exercícios resolvidos de sequências. Isto é, $|\sum x_n| \leq \sum |x_n|$ □

**Obs 3.9.** A recíproca do Teorema 3.6 é falsa. Por exemplo, a série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente (ver Exemplo 3.24), mas $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ é divergente (ver Exemplo 10.11).

**Exemplo 3.26.** Considere a série $\sum \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^4}$. Lembre que

$$\left|\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^4}\right| \leq \frac{\left|\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right|}{n^4} \leq \frac{1}{n^4}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, usando o Teorema 3.3, $\sum \left|\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^4}\right|$ é convergente, já que $\sum \frac{1}{n^4}$ é convergente (ver Exemplo 10.11). Com isso, $\sum \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^4}$ é uma série absolutamente convergente. Dessa forma, pelo Teorema 3.6, concluímos que $\sum \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^4}$ é uma série convergente.

**Exemplo 3.27.** Considere a série alternada $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$. Observe que $\sum \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\right| = \sum \frac{1}{n^3}$ é uma série convergente (ver Exemplo 10.11). Logo, $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$ é uma série absolutamente convergente. Utilizando o Teorema 3.6, temos que $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$ é uma série convergente.

Enunciaremos a seguir os dois testes de convergência para séries de números reais mais famosos do Cálculo.

**Teorema 3.7** (Teste da Razão)**.** *Seja $x_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então,*

**i)** $\lim \left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = x < 1 \Rightarrow \sum x_n$ *é absolutamente convergente;*

**ii)** $\lim \left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = x > 1$ *ou* $\lim \left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \infty \Rightarrow \sum x_n$ *é divergente;*

*Demonstração.* **i)** Suponha que $\lim \left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = x < 1$. Seja $x < k < 1$ (ver Teorema 1.6). Logo, $\lim \left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = x < k < 1$, então, utilizando o Teorema 2.5, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < k = \frac{k^{n+1}}{k^n}, \forall\, n \geq N.$$

Logo, $\dfrac{|x_{n+1}|}{k^{n+1}} < \dfrac{|x_n|}{k^n}$, $\forall\, n \geq N$. Dessa forma, a sequência $\left(\frac{|x_n|}{k^n}\right)_{n \geq N}$ é uma sequência não-crescente e

$$0 < ... < \frac{|x_{n+1}|}{k^{n+1}} < \frac{|x_n|}{k^n} < ... < \frac{|x_N|}{k^N},$$

ou seja, $\left(\frac{|x_n|}{k^n}\right)_{n \geq N}$ é uma sequência monótona e limitada (por 0 e $|x_N|/k^N$). Seja $M = |x_N|/k^N$. Com isso, $\frac{|x_n|}{k^n} \leq M$, $\forall\, n \geq N$. Ou seja, $|x_n| \leq Mk^n$, $\forall\, n \geq N$. Como $\sum Mk^n = \sum (Mk)k^{n-1}$ é uma série geométrica de razão $k < 1$, temos que $\sum Mk^n$ é convergente. Por fim, pelo Teorema 3.3, concluímos que $\sum |x_n|$ é convergente, isto é, $\sum x_n$ é absolutamente convergente.

**ii)** Considere que $\lim |\frac{x_{n+1}}{x_n}| = x > 1$. Com isso, pelo Teorema 2.5, concluímos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\frac{x_{n+1}}{x_n}| > 1$, $\forall\, n \geq N$. Portanto,

$$|x_{n+1}| > |x_n|, \forall\, n \geq N.$$

Consequentemente, $|x_n| \geq |x_N|$, $\forall\ n \geq N$. Afirmamos que $\lim x_n \neq 0$. Caso contrário, $\lim x_n = 0$, encontramos

$$0 = \lim |x_n| \geq |x_N|.$$

Logo $0 \leq |x_N| \leq 0$. Ou seja, $|x_N| = 0$, Assim, $x_N = 0$. Isto é um absurdo, pois $x_N \neq 0$. Logo, $\lim x_n \neq 0$. Utilizando o Teorema 3.1, concluímos que $\sum x_n$ é divergente. Analogamente, se $\lim |\frac{x_{n+1}}{x_n}| = \infty$, temos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > 1, \forall\ n \geq N.$$

Portanto, $\sum x_n$ é divergente, exatamente pelo mesmo motivo exibido no caso $\lim |\frac{x_{n+1}}{x_n}| = x > 1$. □

**Obs 3.10.** Se $\lim |\frac{x_{n+1}}{x_n}| = 1$, então não podemos concluir nada sobre a convergência da série $\sum x_n$ a partir deste fato. Vejamos exemplos que garantem esta afirmação. Considere a série $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente (ver Exemplo 10.11). Veja que

$$\lim \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim \left|\frac{1}{(n+1)^2} n^2\right| = \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \lim \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 = 1^2 = 1.$$

Por outro lado, a série $\sum \frac{1}{n}$ divergente (ver Exemplo 10.11) satisfaz:

$$\lim \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim \left|\frac{1}{(n+1)} n\right| = \lim \frac{n}{n+1} = \lim \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

**Exemplo 3.28.** Considere a série $\sum \frac{(-1)^{n+1}n}{2^n}$. Vamos utilizar o Teorema 3.7 para verificar se esta série converge ou diverge. Seja $x_n = \frac{(-1)^{n+1}n}{2^n}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Note que

$$\begin{aligned} \lim \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| &= \lim \left|\frac{(-1)^{n+2}(n+1)}{2^{n+1}} \frac{2^n}{(-1)^{n+1}n}\right| = \lim \frac{n+1}{2}\frac{1}{n} \\ &= \lim \frac{1}{2}\frac{n+1}{n} = \lim \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} < 1. \end{aligned}$$

Utilizando o Teorema 3.7, concluímos que $\sum \frac{(-1)^{n+1}n}{2^n}$ é uma série absolutamente convergente.

**Exemplo 3.29.** A série $\sum \frac{n!}{n}$ é divergente. Para isto, seja $x_n = \frac{n!}{n}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Assim sendo,

$$\lim \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim \left|\frac{(n+1)!}{n+1}\frac{n}{n!}\right| = \lim \frac{(n+1)n!}{n+1}\frac{n}{n!} = \lim n = \infty.$$

Portanto, usando o Teorema 3.7, $\sum \frac{n!}{n}$ é uma série divergente.

**Teorema 3.8** (Teste da Raiz). *Seja* $\sum x_n$ *uma série. Então:*

**i)** $\lim \sqrt[n]{|x_n|} = x < 1 \Rightarrow \sum x_n$ *é absolutamente convergente;*

**ii)** $\lim \sqrt[n]{|x_n|} = x > 1 \Rightarrow \sum x_n$ *é divergente.*

*Demonstração.* **i)** Suponha que $\lim \sqrt[n]{|x_n|} = x < 1$. Pelo Teorema 1.6 existe $q \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim \sqrt[n]{|x_n|} = x < q < 1.$$

Com isso, usando o Teorema 2.5, concluímos que

$$\exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \sqrt[n]{|x_n|} < q, \forall\ n \geq N.$$

Portanto,

$$|x_n| < q^n, \forall\ n \geq N.$$

Sabemos que a série geométrica

$$\sum q^n = \sum q q^{n-1}$$

é convergente, pois tem razão $q < 1$ (ver Exemplo 3.7). Com o Teorema 3.3, obtemos que $\sum |x_n|$ é convergente, isto é, $\sum x_n$ é absolutamente convergente.

**ii)** Agora, suponha que

$$\lim \sqrt[n]{|x_n|} = x > 1.$$

Com isso, pelo Teorema 2.5, concluímos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sqrt[n]{|x_n|} > 1, \forall\ n \geq N.$$

Portanto,

$$|x_n| > 1, \forall\ n \geq N.$$

Se $(x_n)$ é convergente, temos que $\lim |x_n| \geq 1 > 0$ (ver Proposição 2.1). Logo, $\lim |x_n| > 0$. Ou seja, $\lim |x_n| \neq 0$. Ou equivalentemente, $\lim x_n \neq 0$ (ver exercícios de sequências). Assim, $\sum x_n$ é divergente (ver Teorema 3.1). Se $(x_n)$ é divergente, então utilizando o Teorema 3.1, concluímos que $\sum x_n$ é divergente. De qualquer forma, $\sum x_n$ é divergente. $\square$

**Obs 3.11.** Se $\lim \sqrt[n]{|x_n|} = 1$ nada pode ser concluído sobre a convergência da série a partir deste fato. Vamos verificar esta afirmação dando dois exemplos. Primeiramente considere a série $\sum 1$. Veja que

$$\lim \sqrt[n]{|1|} = \lim 1 = 1.$$

Por outro lado, $\sum 1$ é divergente pelo fato que $\lim 1 = 1 \neq 0$ (ver Teorema 3.1). Agora, considere a série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$. Com isso,

$$\lim \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{n}} = 1,$$

ver exercícios de sequências. Mas, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente (ver Exemplo 3.24). Por isso, nada podemos concluir sobre a convergência de uma série se $\lim \sqrt[n]{|x_n|} = 1$. A série pode ser convergente, como também pode ser divergente.

**Exemplo 3.30.** Dada a série $\sum \left(\frac{n+4}{4n+1}\right)^n$, temos que

$$\lim \sqrt[n]{\left(\frac{n+4}{4n+1}\right)^n} = \lim \frac{n+4}{4n+1} = \lim \frac{1+\frac{4}{n}}{4+\frac{1}{n}} = \frac{1}{4} < 1.$$

Portanto, usando o Teorema 3.8, concluímos que $\sum \left(\frac{n+4}{4n+1}\right)^n$ é convergente.

**Exemplo 3.31.** Considere a série $\sum 3^n$. Observe que $\lim \sqrt[n]{3^n} = \lim 3 = 3 > 1$. Deste modo, usando o Teorema 3.8, concluímos que $\sum 3^n$ é divergente.

Para terminar esta seção exibiremos um exemplo de uma série que converge, mas não absolutamente. A definição abaixo denomina as séries que satisfazem esta propriedade.

**Definição 3.6** (Convergência Condicional)**.** Dizemos que uma série $\sum x_n$ é condicionalmente convergente se $\sum x_n$ é convergente e $\sum |x_n|$ é divergente

**Exemplo 3.32.** Vimos que a série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ é condicionalmente convergente (ver Exemplos 3.21 e 3.24).

# Exercícios de Fixação

**1.** Estabeleça a convergência ou a divergência das séries

$$\sum 2^{-\frac{1}{n}}, \sum \frac{n}{(n+1)(n+2)} \text{ e } \sum \frac{n}{2^n}.$$

**2.** Estabeleça a convergência ou a divergência das séries

$$\sum \frac{[n^2(n+1)]^{-\frac{1}{2}}}{n}, \sum \frac{n!}{n^n} \text{ e } \sum \frac{(-1)^n n}{n+1}.$$

**3.** Discuta a convergência ou a divergência das séries

$$\sum \frac{2^n}{\mathrm{e}^n}, \sum \frac{n!}{\mathrm{e}^n} \text{ e } \sum \frac{n^n}{\mathrm{e}^n}.$$

**4.** Discuta a convergência ou a divergência das séries

$$\sum \frac{n!^2}{(2n)!}, \sum \frac{n!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot (2n+1)} \text{ e } \sum \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot (2n+1)}.$$

## 3.5 Rearranjo de Séries

Nesta seção, veremos a hipótese que é necessária para que a permuta de alguns termos de uma série convergente seja realizada sem alteração de sua soma.

**Definição 3.7** (Rearranjo)**.** Dizemos que uma série $\sum y_n$ é o rearranjo de uma série $\sum x_n$ se existe bijeção $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $y_n = x_{f(n)}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

**Exemplo 3.33.** Defina $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, por $f(2n-1) = 2n$ e $f(2n) = 2n-1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. $f$ é um bijeção. Seja $x_n = 1/2^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Considere a série

$$\sum \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...$$

Com isso, para $y_n$ dado por

$$y_{2n} = x_{f(2n)} = x_{2n-1} = 1/2^{2n-1} \text{ e } y_{2n-1} = x_{f(2n-1)} = x_{2n} = 1/2^{2n}, \forall\, n \in \mathbb{N},$$

temos que

$$\sum y_n = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + ... = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + ...$$

é o rearranjo gerado pela bijeção $f$.

O resultado a seguir garante que a convergência absoluta é o ingrediente que faltava para podermos alterar a ordem dos termos de uma série sem que haja uma mudança no valor de sua convergência.

**Teorema 3.9** (Teorema do Rearranjo)**.** *Seja $\sum x_n = x$ uma série absolutamente convergente. Então, qualquer rearranjo $\sum y_n$ de $\sum x_n$ tem soma $x$, ou seja, $\sum y_n = \sum x_n$.*

*Demonstração.* Como $\sum x_n$ é absolutamente convergente, então, pelo Teorema 3.6, $\sum x_n$ é convergente, digamos que $\sum x_n = x$. Sejam $(s_n)$, $(t_n)$ e $(p_n)$ as sequências de somas parciais das séries $\sum x_n$, $\sum |x_n|$ e $\sum y_n$, respectivamente. Assim sendo, $\lim s_n = x$. Como $\sum x_n$ é absolutamente convergente, então $\sum |x_n|$ é convergente. Portanto, $(t_n)$ é uma sequência convergente. Pelo Teorema 2.14, $(t_n)$ é de Cauchy. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\ n \geq N, \text{ tem-se } |s_N - x| < \varepsilon/2 \text{ e } |t_n - t_N| < \varepsilon/2,$$

ver definições 2.4 e 2.12. Ou seja,

$$\begin{aligned} \sum_{m=N+1}^{n} |x_m| &= |x_{N+1}| + |x_{N+2}| + ... + |x_n| \\ &= |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| - (|x_1| + |x_2| + ... + |x_N|) \\ &= |t_n - t_N| < \varepsilon/2, \end{aligned}$$

isto é, $\displaystyle\sum_{m=N+1}^{n} |x_m| < \varepsilon/2$, $\forall\ n \geq N$. Como $\sum y_n$ é o rearranjo de $\sum x_n$, então existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $y_n = x_{f(n)}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Deste modo, existem únicos e distintos $a_1, a_2, ..., a_N$ tais que $f(a_i) = i$, $\forall\ i = 1, 2, ..., N$. Seja $M = \max\{a_1, a_2, ..., a_N\}$. Logo, $1 \leq a_i \leq M$, $\forall\ i = 1, 2, ..., N$. Ou seja, $\{a_1, a_2, ..., a_N\} \subseteq \{1, 2, ..., M\}$ $(\Rightarrow N \leq M)$. Assim, a soma

$$p_M = y_1 + y_2 + ... + y_M = x_{f(1)} + x_{f(2)} + ... + x_{f(M)}$$

contém os termos $x_1, x_2, ..., x_N$, pois

$$\{f(a_1) = 1, f(a_2) = 2, ..., f(a_N) = N\} \subseteq \{f(1), f(2), ..., f(M)\}.$$

Dessa forma, $\forall\ n > M \geq N$, tem-se que

$$\begin{aligned}
|p_n - s_N| &= |y_1 + ... + y_n - (x_1 + ... + x_N)| \\
&= |x_{f(1)} + ... + x_{f(n)} - (x_1 + ... + x_N)| \\
&= |x_{f(1)} + ... + x_{f(M)} + x_{f(M+1)} + ... + x_{f(n)} - (x_1 + ... + x_N)| \\
&\leq \sum_{m=N+1}^{n} |x_m| < \varepsilon/2.
\end{aligned}$$

Com isso, $\forall\ n > M$, tem-se que

$$|p_n - x| = |p_n - s_N + s_N - x| \leq |p_n - s_N| + |s_N - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Isto nos diz que $\lim p_n = x$. Ou seja, $\sum y_n = x = \sum x_n$. □

**Obs 3.12.** O Teorema 3.9 nos garante que quando a série é absolutamente convergente a convergência desta série independe da ordem em que as parcelas aparecem. Ou seja, podemos comutar os termos desta série que o resultado obtido será uma série que converge para o mesmo valor que a original.

**Exemplo 3.34.** No Exemplo 3.33, vimos que a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por $f(2n-1) = 2n$ e $f(2n) = 2n - 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, gera o rearranjo

$$\sum y_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + ...$$

para a série $\sum \frac{1}{2^n}$. Como

$$\sum \frac{1}{2^n} = \sum \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1$$

é absolutamente convergente, então, pelo Teorema 3.9,

$$\sum y_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + ... = 1.$$

## Exercícios de Fixação

**1.** Se a série $\sum x_n$ é condicionalmente convergente, mostre que existe um rearranjo desta série cuja sequência das somas parciais tende a $\infty$.

**2.** Se $\sum x_n$ é absolutamente convergente, é verdade que cada rearranjo desta série é absolutamente convergente?

## 3.6 Leitura Complementar: Teorema de Riemann

Nesta leitura complementar, enunciaremos e demonstraremos o Teorema de Riemann. Este nos informa, em palavras, que dado um número real qualquer, é possível permutarmos os termos de uma série condicionalmente convergente de forma que o resultado tenha como soma este valor considerado inicialmente. A prova deste resultado, dada neste material, necessita da definição abaixo.

**Definição 3.8** (Partes Positiva e Negativa de uma Sequência)**.** Seja $(x_n)$ uma sequência. Defina, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n^+ = \max\{x_n, 0\}$ e $x_n^- = \max\{-x_n, 0\}$. Chamamos $x_n^+$ e $x_n^-$, respectivamente, as partes positiva e negativa de $x_n$.

**Obs 3.13.** Segue diretamente da Definição 3.8 $x_n^+, x_n^- \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$|x_n| = x_n^+ + x_n^-, \text{ e } x_n = x_n^+ - x_n^-, \forall\, n \in \mathbb{N},$$

ver Definição 1.6.

**Exemplo 3.35.** Considere a sequência $(x_n)$, onde $x_n = (-1)^n$. As partes positiva e negativa de $x_n$ são, respectivamente,

$$x_n^+ = \max\{1, 0\} = 1 \text{ e } x_n^- = \max\{-1, 0\} = 0, \text{ se n é par},$$

e

$$x_n^+ = \max\{-1, 0\} = 0 \text{ e } x_n^- = \max\{-(-1), 0\} = 1, \text{ se n é ímpar}.$$

Usaremos a Definição 3.8 para provar que se retirarmos a hipótese que $\sum |x_n|$ converge do Teorema 3.9 e continuar supondo que $\sum x_n$ converge, então podemos encontrar um rearranjo de $\sum x_n$ convergindo para qualquer número real que desejarmos. Isto está formalmente enunciado no Teorema abaixo.

**Teorema 3.10** (Teorema de Riemann)**.** *Seja* $\sum x_n$ *uma série condicionalmente convergente. Seja* $y \in \mathbb{R}$ *um número qualquer. Então, existe um rearranjo* $\sum y_n$*, de* $\sum x_n$*, tal que* $\sum y_n = y$*.*

*Demonstração.* Seja $y \in \mathbb{R}$. Suponha que $\sum x_n$ é condicionalmente convergente. Ou seja, $\sum x_n$ converge, mas $\sum |x_n|$ diverge. Assim sendo, $\sum x_n^+$ e $\sum x_n^-$ divergem. Com efeito, lembre que $x_n = x_n^+ - x_n^-$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Logo, utilizando as observações do Teorema 3.2, concluímos que se ou $\sum x_n^+$ ou $\sum x_n^-$ converge, então $\sum x_n$ diverge. Absurdo, pois $\sum x_n$ converge. Suponha, por absurdo, que $\sum x_n^+$ e $\sum x_n^-$ convergem. Como $|x_n| = x_n^+ + x_n^-$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, então

$$\sum |x_n| = \sum [x_n^+ + x_n^-] = \sum x_n^+ + \sum x_n^-$$

converge. Absurdo, pois $\sum |x_n|$ diverge. Consequentemente, $\sum x_n^+$ e $\sum x_n^-$ divergem. Sejam $(s_n^+)$ e $(s_n^-)$ as sequências das somas parciais para as séries $\sum x_n^+$ e $\sum x_n^-$, respectivamente. Como $x_n^+, x_n^- \geq 0$, então

$$s_{n+1}^+ = s_n^+ + x_{n+1}^+ \geq s_n^+ \text{ e } s_{n+1}^- = s_n^- + x_{n+1}^- \geq s_n^-.$$

Logo, $(s_n^+)$ e $(s_n^-)$ são sequências monótonas (crescentes). Como $\sum x_n^+$ e $\sum x_n^-$ divergem, então $(s_n^+)$ e $(s_n^-)$ divergem (ver Definição 3.3). Pelo Teorema 2.4, $(s_n^+)$ e $(s_n^-)$ são sequências ilimitadas. As sequências $(s_n^+)$ e $(s_n^-)$ são crescentes, logo limitadas inferiormente por $s_1^+$ e $s_1^-$, respectivamente. Dessa forma, $(s_n^+)$ e $(s_n^-)$ são ilimitadas superiormente. Vamos agora criar um algorítmo para encontrar o rearranjo de $\sum x_n$ que converge para $y$. Começe a somar os primeiros termos positivos da série $\sum x_n$ na ordem em que eles aparecem. Em algum momento esta soma ultrapassará $y$, isto ocorre já que $(s_n^+)$ é ilimitada superiormente, ou seja, existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$y < s_{n_1}^+ = x_1^+ + x_2^+ + ... + x_{m_1}^+$$

a soma dos primeiros termos positivos da série $\sum x_n$ na ordem em que eles aparecem até $x_{m_1}$ (ver Definição 3.8), isto é, os termos $x_1^+, x_2^+, ..., x_{m_1}^+$ encontrados serão os primeiros termos do rearranjo que estamos procurando $(x_1^+ + x_2^+ + ... + x_{m_1}^+ > y)$. Agora, começe a adicionar à soma $x_1^+ + x_2^+ + ... + x_{m_1}^+$ os termos negativos de $\sum x_n$ na ordem em que eles aparecem, a partir de $x_1$, até que a soma seja inferior a $y$, isto sempre ocorre pois $(s_n^-)$ é ilimitada superiormente, ou seja, existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$y - s_{n_1}^+ > -s_{m_2}^- = -x_1^- - x_2^- - ... - x_{m_2}^-,$$

a soma dos termos negativos da série $\sum x_n$, a partir de $x_1$, na ordem em que eles aparecem (ver Definição 3.8) até $x_{m_2}$ $(x_1^+ + x_2^+ + ... + x_{m_1}^+ - x_1^- - x_2^- - ... - x_{m_2}^- < y)$. Acrescente estes termos negativos aos termos positivos já encontrados para o rearranjo procurado, ou seja,

$$x_1^+ + x_2^+ + ... + x_{m_1}^+ - x_1^- - x_2^- - ... - x_{m_2}^-$$

é a $n_2-$ésima soma parcial do rearranjo procurado, onde $n_2 = m_1 + m_2$. Repita o processo, a partir de $x_{m_1}$. Com este processo encontramos um rearranjo $\sum y_n$ (o qual posui os mesmos termos da série $\sum x_n$, só que com parcelas comutadas) de $\sum x_n$. Denote $n_1 = m_1$. Seja $(t_n)$ a sequência das somas parciais de $\sum y_n$, então palo algorítmo criado, encontramos a seguinte desigualdade:

$$t_{n_{2k}} < y < t_{n_{2k-1}}, \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Pela escolha dos índices $n_k$, temos que

$$0 < t_{n_{2k-1}} - y \leq x_{m_{2k-1}}^+ \text{ e } 0 < y - t_{n_{2k}} \leq -x_{m_{2k}}^-, \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Como

$$|x_n| = x_n^+ + x_n^- \geq x_n^+, x_n^- \geq 0 \text{ e } \lim x_n = 0,$$

ver Teorema 3.1, então $\lim x_n^+ = \lim x_n^- = 0$ (ver Teorema 2.8). Pelo Teorema 2.2, obtemos que

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_{2k-1}}^+ = \lim_{k\to\infty} x_{n_{2k}}^- = 0.$$

Usando o Teorema 2.8, concluímos que

$$\lim_{k\to\infty} (t_{n_{2k-1}} - y) = \lim_{k\to\infty} (y - t_{n_{2k}}) = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{k\to\infty} t_{n_{2k-1}} = \lim_{k\to\infty} t_{n_{2k}} = y.$$

Por fim, $\lim\limits_{k\to\infty} t_{n_k} = y$ (ver exercícios de sequências). Como $x_n^-, x_n^+ \geq 0$, então

$$n_{2k-1} \leq n \leq n_{2k} \Rightarrow t_{n_{2k-1}} \leq t_n \leq t_{n_{2k}}, \forall\ k \in \mathbb{N}$$

e

$$n_{2k} \le n \le n_{2k+1} \Rightarrow t_{n_{2k}} \le t_n \le t_{n_{2k+1}}, \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente, $\lim t_n = y$. Isto é, $\sum y_n = y$. $\square$

**Exemplo 3.36.** Vamos encontrar um rearranjo para a série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ que converge para 0. Vamos utilizar o algoritmo explicado na demonstração do Teorema 3.10. Veja que $1 > 0$. Assim, o rearranjo tem como primeiro termo 1. Agora some a 1 todos os termos negativos da série até encontrar um resultado $< 0$, ou seja,

$$1 - 1/2 - 1/4 - 1/6 - 1/8 < 0.$$

Estes são os 5 primeiros termos do rearranjo. Acrescente a esta soma a soma dos númeors positivos, após o 1, de forma que o resultado seja $> 0$. Isto é,

$$1 - 1/2 - 1/4 - 1/6 - 1/8 + 1/3 > 0.$$

Continuando o processo encontraremos o rearranjo

$$1 - 1/2 - 1/4 - 1/6 - 1/8 + 1/3 - ...,$$

o qual convergirá para 0, pelo Teorema 3.10.

## Exercícios de Fixação

**1.** Encontre um rearranjo da série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ que converge para 1.

**2.** Encontre um rearranjo da série $\sum \frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}}$ que converge para 2.

## 3.7 Conclusão

Caro leitor, ao final desta aula, é importante ressaltar que é possível indentificar qual teste de convergência para uma série deve ser utilizado para obtermos um resultado conclusivo. Por exemplo, quando o termo geral de uma série envolve fatoriais, produtos ou constantes elevadas a um número natural é provável que o Teste da Razão afirme se a série converge ou diverge. Ou se o $n$-ésimo termo da série for da forma $x_n^n$, o Teste da Raiz é o melhor candidato entre os testes de convergência. Portanto, convidamos o leitor a resolver a maior quantidade de exercícios possível para que este identifique rapidamente qual teste deve ser utilizado com uma alta possibilidade de acerto. Ou que pelo menos você conheça quais testes que com certeza não serão úteis.

## 3.8 Resumo

Nesta aula, apresentamos alguns testes para verificar se uma série é convergente ou divergente. Os principais testes são: Teste da Comparação, Teste da Razão e Teste da Raiz. Além destes testes, discutimos algumas operações elementares envolvendo séries.

## 3.9 Exercícios Propostos

**Exercícios:**

**1.** Dadas as séries $\sum x_n, \sum y_n$, com $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ e $y_n = \ln(1 + 1/n)$, mostre que $\lim x_n = \lim y_n = 0$. Calcule explicitamente as $n$-ésimas somas parciais $s_n$ e $t_n$ destas séries e mostre que $\lim s_n = \lim t_n = \infty$, logo as séries dadas são divergentes.

**2.** Prove que a série $\sum \ln n/n^2$ é convergente.

**3.** Se $\sum x_n$ é convergente e $x_n \geq 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ então a série $\sum x_n y^n$, é absolutamente convergente, $\forall\ y \in [-1, 1]$ e $\sum x_n \mathrm{sen}(ny)$, $\sum x_n \cos(ny)$ são absolutamente convergentes $\forall\ y \in \mathbb{R}$.

**4.** Se $\sum x_n$ é absolutamente convergente e $\lim y_n = 0$, ponha $z_n = x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + ... + x_n y_0 = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$ e prove que $\lim z_n = 0$.

**5.** Se $\sum x_n^2$ e $\sum y_n^2$ convergem, prove que $\sum x_n y_n$ converge absolutamente.

**6.** Prove: uma série $\sum x_n$ é absolutamente convergente $\Leftrightarrow$ a sequência das somas parciais $(s_n)$ é limitada.

**7.** Determine se a série $\sum (\ln n/n)^n$ é convergente usando os Testes da Razão e Raiz.

**8.** Prove: se $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n \geq ... \geq 0$ e $\sum x_n$ converge então $\lim nx_n = 0$.

**9.** Dada uma sequência de números positivos $x_n$ com $\lim x_n = x$, prove que

$$\lim \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = x.$$

**10.** Determine para quais valores de $x$ cada uma das séries é convergente: $\sum n^n x^n$, $\sum x^n/n^n$, $\sum n! x^n$, $\sum x^n/n^2$.

**11.** Se uma série é condicionalmente convergente, prove que existem alterações da ordem dos seus termos de modo a tornar sua soma igual a $\infty$ e $-\infty$.

**12.** Efetue explicitamente um rearranjo dos termos da série

$$\sum (-1)^{n+1}/n = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + ...$$

de omodo que sua soma se torne igual a zero.

## 3.10 Exercícios Resolvidos

**Questões Resolvidas:**

**Ex1.** Use o Teste da Comparação para provar que a série $\sum 1/n^2$ é convergente, a partir da convergência de $\sum 2/n(n+1)$.

*Demonstração.* Como $\sum 1/n^2$ é convergente, então, pelo Teorema 3.2, $\sum 2/n^2$ é convergente.

Além disso,

$$\frac{2}{n(n+1)} \leq \frac{2}{n^2} \Leftrightarrow \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow n(n+1) \geq n^2 \Leftrightarrow n^2+n \geq n^2 \Leftrightarrow n \geq 1, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Pelo Teorema 3.3 $\sum 2/n(n+1)$ é convergente. $\square$

**Ex2.** Se $\sum x_n$ é absolutamente convergente, prove que $\sum x_n^2$ converge.

*Demonstração.* Como $\sum x_n$ é absolutamente convergente, então $\sum |x_n|$ é convergente. Usando o Teorema 3.1, concluímos que $\lim |x_n| = 0$. Portanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geq N$, tem-se $|x_n| < 1$ (faça $\varepsilon = 1 > 0$ na Definição 2.5). Com isso,

$$x_n^2 = |x_n|^2 \leq |x_n| \Leftrightarrow |x_n|^2 - |x_n| \leq 0 \Leftrightarrow |x_n|(|x_n| - 1) \leq 0, \forall\, n \geq N.$$

Mas, esta última desigualdade é satisfeita, já que $|x_n| < 1$, $\forall\, n \geq N$. Logo, utilizando o Teorema 3.3, $\sum x_n^2$ é convergente. $\square$

**Ex3.** Determine para quais valores de $x$ a série $\sum n^k x^n$ é convergente.

*Demonstração.* Veja que

$$\lim \left| \frac{(n+1)^k x^{n+1}}{n^k x^n} \right| = \lim \left( \frac{n+1}{n} \right)^k |x| = |x| \lim \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^k = |x|.$$

Usando o Teorema 3.7, $\sum n^k x^n$ é absolutamente convergente para $|x| < 1$ e divergente para $|x| > 1$. Para $x = 1$ ou $x = -1$, encontramos as séries $\sum n^k$ ou $\sum n^k(-1)^n$. Estas séries são divergentes, pois os termos gerais destas séries são ilimitados (logo, divergentes). Dessa forma, $\sum n^k x^n$ converge absolutamente no intervalo $(-1, 1)$ e diverge para os valores de $x$ que satisfazem $|x| \geq 1$. $\square$

# Auto-Avaliação

Sou capaz de determinar, utilizando os testes de convergência, se uma série é convergente?

# Proxima Aula

Caro leitor, na próxima aula, estudaremos o conjunto dos números reais de uma forma mais minuciosa. Apresentaremos um trabalho sobre a topologia usual em $\mathbb{R}$.

# Referências Bibliográficas


[1] Alonso, M.; Finn, E. J., *Física: Um Curso Universitário.* Segunda Edição, São Paulo, Edgard Blücher Ltda, 2009. 481p.

[2] Bartle, R. G.; Sherbert, D. R., *Introdution to Real Analysis*, Third Edition, New York, JohnWiley and Sons,Inc., 2000. 399p.

[3] Boyce, W. E.; DiPrima, R. C., *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.* Seventh Edition, New York, JohnWiley and Sons,Inc, 2001. 745p.

[4] Brasil, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

[5] Brauer, F.; Nohel, J. A., *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations.* University of Wisconsin, 1989.

[6] Dragomir, S. S., *Some Gronwall Type Inequalities and Applications.* Monograph. Victoria University of Technology, 2002.

[7] Ferreira, J., *A Construção dos Números.* Primeira Edição, Rio de Janeiro, SBM, 2010. 133p.

[8] Figueiredo, D., *Análise I.* Segunda Edição, Rio de Janeiro, LTC, 2008. 266p.

[9] Guillemin, V.; Pollack, A., *Differential Topology.* First Edition, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1974. 227p.

[10] King, A.C.; Billingham, J.; OTTO, S.R., *Differential Equations.* Linear, Nonlinear, Ordinary, Partial. Cambridge University Press. New York, 2003.

[11] Lima, E. L., *Análise Real.* Funções de uma variável, vol.1. 8°. ed. Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[12] Lima, E. L., *Análise Real,* vol.2. Rio de Janeiro, 2004.

[13] Lima, E. L., *Curso de Análise*, vol. 1, Décima Segunda Edição, Rio de Janeiro, IMPA, 2008. 431p.

[14] Melo, W., *Existência de soluções clássicas para as Equações de Burgers e Navier-Stokes.* Dissertação de Mestrado. UFPE, 2007.

[15] Munkres, J. R., *Topology.* Second Edition, New Jersey, Prentice Hall, Inc., 2000. 552p.

[16] Nolt, J.; Rohatys, D.; Varzi, A., *Theory and problems or logic.* Second edition, New York, McGraw-Hill, 2009. 279p.

[17] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis.* Third Edition, New York, McGraw-Hill, Inc., 1976. 351p.

[18] Smoller, J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations.* 2nd ed., Springer-Verlag, 1994.

[19] Tveito, A.; Winther, R., *Introduction to Partial Differential Equations.* A Computational Approach. New York, 1961.

# Professor Revisor

Professor Paulo de Souza Rabelo