Capítulo 4

Quarta Aula: Topologia dos Números Reais

Meta

Definir o que são pontos interior, aderente, de acumulação e de fronteira. Além disso, determinar quais conjuntos são compactos em $\mathbb{R}$.

Objetivos

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de caracterizar conjuntos abertos, fechados e compactos em $\mathbb{R}$.

Pré-requisitos

Aula 3, Fundamentos da Matemática e Cálculo II.

4.1 Introdução

Nesta aula, discutiremos a topologia usual do conjunto dos números reais. Dentro desse contexto, trabalharemos com alguns conjuntos que possuem características especiais. Entre esses destacamos: os conjuntos denominados abertos, fechados e compactos. Os conteúdos encontrados aqui serão demonstrados e exemplificados, na maioria dos casos, com os resultados estabelecidos na aula 2.

4.2 Conjuntos Abertos

Nesta seção, definiremos alguns subconjuntos de $\mathbb{R}$ denominados abertos. Mostraremos alguns exemplos para um melhor entendimento do leitor, e por fim, exibiremos alguns resultados que caracterizam tais conjuntos.

Definição 4.1 (Ponto Interior)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é ponto interior a X, e escrevemos $x \in \text{int}X$, se $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq X$. O conjunto

$$\text{int}X = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ é ponto interior a } X\}$$

é chamado conjunto interior de X.

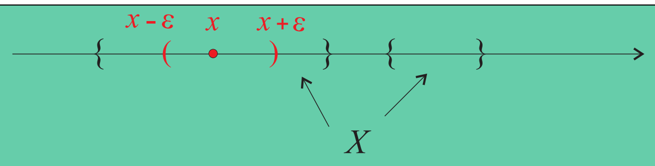

Figura 4.1: $x \in \text{int}X$

Obs 4.1. O número real positivo ε depende somente de x, isto é, $\varepsilon = \varepsilon(x)$.

A seguir veremos que o interior de qualquer conjunto formado por números reais está contido no próprio conjunto.

Obs 4.2. Observe que $\text{int}X \subseteq X$, $\forall\ X \subseteq \mathbb{R}$. De fato, considere $X \neq \emptyset$ e seja $x \in \text{int}X$, então $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que

$$x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq X.$$

Portanto, $x \in X$. Ou seja, int$X \subseteq X$. Agora, seja $X = \emptyset$. Suponha, por absurdo, que existe $x \in$ int$\emptyset$. Dessa forma, $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que

$$x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \emptyset.$$

Absurdo! Por fim,

$$\text{int}\emptyset = \emptyset \subseteq \emptyset.$$

Obs 4.3. Se $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$, então int$X \subseteq$ int$Y$. Com efeito, dado $x \in$ int$X$, temos que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq X.$$

Por outro lado $X \subseteq Y$. Consequentemente,

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq Y.$$

Dessa forma, $x \in$ int$Y$. Ou seja int$X \subseteq$ int$Y$.

Nos dois exemplos abaixo estabeleceremos alguns pontos interiores e não-interiores de intervalos de $\mathbb{R}$.

Exemplo 4.1. Seja $x \in (a, b)$. Note que $x \in$ int(a, b). De fato, seja

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{x-a}{2}, \frac{b-x}{2}\right\} > 0.$$

Logo, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (a, b)$.

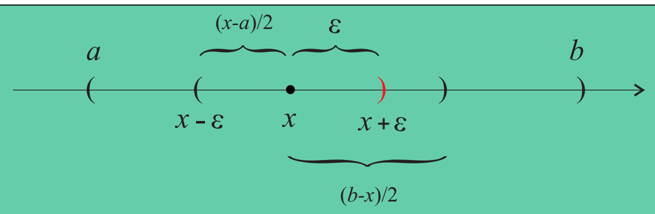

Figura 4.2: $x \in$ int(a, b), considerando $\varepsilon = (x - a)/2$

Analogamente, prova-se que qualquer ponto de $(a, \infty), (-\infty, b)$, $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ é ponto interior.

Exemplo 4.2. O ponto a não é interior a $[a, b]$, pois $\forall\ \varepsilon > 0$ temos que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \not\subseteq [a, b]$. De fato, pelo Teorema 1.6, existe

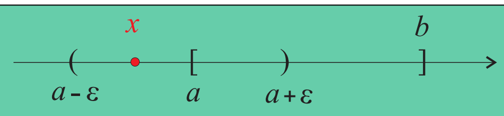

Figura 4.3: $a \notin \mathrm{int}[a,b]$

$$x \in (a-\varepsilon, a) \subseteq (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

racional. Com isso, $x < a$. Isto é $x \notin [a,b]$. Isto nos diz que $a \notin$ int $[a,b]$. Analogamente, prova-se que $b \notin$ int $[a,b]$. Como $(a,b) \subseteq [a,b]$, então

$$(a,b) = \mathrm{int}(a,b) \subseteq \mathrm{int}[a,b] \subseteq [a,b].$$

Mas, $a, b \notin$ int $[a,b]$. Portanto,

$$(a,b) \subseteq \mathrm{int}[a,b] \subseteq (a,b).$$

Ou seja, $\mathrm{int}[a,b] = (a,b)$. Analogamente,

$$\mathrm{int}[a,\infty) = (a,\infty), \mathrm{int}(-\infty,b] = (-\infty,b).$$

Abaixo daremos exemplos de conjuntos não-vazios que têm interiores vazios.

Exemplo 4.3 (Interior de $\mathbb{Q}$)**.** Afirmamos que $\mathrm{int}\mathbb{Q} = \emptyset$. Suponha, por absurdo, que existe $x \in \mathrm{int}\mathbb{Q}$. Logo, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \mathbb{Q}.$$

Mas, usando o Teorema 1.6, existem irracionais em $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, contradição! Então, $\mathrm{int}\mathbb{Q} = \emptyset$. Analogamente, $\mathrm{int}(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \emptyset$

Definição 4.2 (Conjunto Aberto)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. O conjunto X é dito aberto em $\mathbb{R}$ se $\mathrm{int}X = X$.

Obs 4.4. Como $\mathrm{int}X \subseteq X$, $\forall\ X \subseteq \mathbb{R}$, então para provar que um conjunto X é aberto, basta provar que $X \subseteq \mathrm{int}X$. Ou seja, que todo ponto do conjunto é interior a este.

Exemplo 4.4. Vimos no Exemplo 4.1 que (a,b), (a,∞), $(-\infty,b)$ e $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ são exemplos de conjuntos abertos em $\mathbb{R}$. O conjunto $\emptyset$ é aberto, pois $\mathrm{int}\emptyset = \emptyset$.

Exemplo 4.5. O Exemplo 4.2 nos garante que os conjuntos $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ não são abertos.

O exemplo a seguir nos diz que o interior de qualquer conjunto é aberto.

Exemplo 4.6. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$, então int$X$ é aberto, isto é,

$$\text{int}(\text{int}X) = \text{int}X.$$

Seja $x \in \text{int}X$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq X.$$

Com isso,

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \text{int}(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \text{int}X,$$

ver observação 4.3. Ou seja, $x \in \text{int}(\text{int}X)$. Dessa forma, $\text{int}X \subseteq \text{int}(\text{int}X)$. Isto é, int$X$ é aberto.

Vejamos quais interseções e uniões de conjuntos abertos são abertos.

Teorema 4.1 (União e Interseção de Abertos)**.** *As seguintes afirmações são válidas:*

i) *A interseção finita de conjuntos abertos é um conjunto aberto;*

ii) *A união arbitrária de conjuntos abertos é um conjunto aberto.*

Demonstração. **i)** Sejam X_1 e X_2 conjuntos abertos. Vamos provar que $X_1 \cap X_2$ é um conjunto aberto. Seja $x \in X_1 \cap X_2$, então $x \in X_1$ e $x \in X_2$. Portanto, existem $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tais que

$$(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subseteq X_1 \text{ e } (x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subseteq X_2.$$

Seja $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$. Dessa forma,

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1), (x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2).$$

Consequentemente,

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq X_1, X_2.$$

Assim,

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq X_1 \cap X_2.$$

Isto nos diz que $x \in \text{int}(X_1 \cap X_2)$. Ou seja, $X_1 \cap X_2$ é aberto. A prova do caso geral segue por indução sobre a quantidade de abertos.

ii) Seja $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma família qualquer de abertos. Vamos provar que $X = \cup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ é aberto. Seja $x \in X$. Portanto, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x \in X_{\lambda_0}$. Como X_{λ_0} é aberto, então existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq X_{\lambda_0} \subseteq X.$$

Assim, $x \in \text{int}X$. Ou seja, X é aberto. □

Obs 4.5. Não podemos afirmar que a interseção qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto. Por exemplo, seja

$$X_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Sabemos que X_n é aberto, para cada $n \in \mathbb{N}$. É fácil ver que

$$\cap_{n\in\mathbb{N}} X_n = \{0\}.$$

Porém, $\{0\}$ não é aberto. Suponha, por absurdo, que $\text{int}\{0\} = \{0\}$. Assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(-\varepsilon, \varepsilon) = (0-\varepsilon, 0+\varepsilon) \subseteq \{0\}.$$

Mas, usando o Teorema 1.6, existe um irracional em $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Daí, $(-\varepsilon, \varepsilon) \not\subseteq \{0\}$. Logo, $\{0\}$ não é aberto.

Exercícios de Fixação

1. Mostre que $\mathbb{Z}$ não é aberto.

2. Mostre que $\mathcal{C}\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{N}\}$ é aberto.

3. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Seja $Y = \cup A$, onde $A \subseteq X$ é aberto. Mostre que Y é aberto. Mostre que, $x \in Y \Leftrightarrow x \in \text{int}X$.

4.3 Conjuntos Fechados

Nesta seção, definiremos pontos aderentes e, a partir destes, classificaremos alguns subconjuntos como fechados em $\mathbb{R}$. Para terminar, exibiremos alguns resultados provenientes da definição de tais coleções.

Definição 4.3 (Ponto Aderente)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é ponto aderente a X se existe uma sequência $(x_n) \subseteq X$ tal que $\lim x_n = x$.

Exibiremos, abaixo, alguns exemplos de pontos aderentes e não-aderentes a alguns conjuntos.

Exemplo 4.7. Todo ponto $x \in X$ é ponto aderente a X. De fato, considere a sequência constante

$$x_n = x \in X, \forall\, n \in \mathbb{N},$$

ver Exemplo 2.4. Assim sendo, $\lim x_n = x$. Portanto, x é aderente a X.

Exemplo 4.8. Observe que 0 é aderente a $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, pois $(1/n) \subseteq X$ e $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Exemplo 4.9. O ponto a é aderente a (a, b). Com efeito, a sequência $(a + 1/n)$ para n suficientemente grande está contida em (a, b) e $\lim \left(a + \frac{1}{n}\right) = a$.

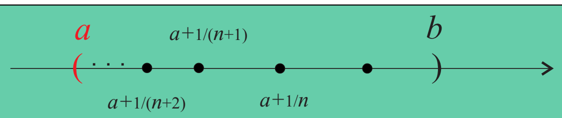

Figura 4.4: a é ponto aderente a (a, b)

Analogamente, b é aderente a (a, b). Analogamente, prova-se que a e b são aderentes a $(a, b]$, $[a, b), [a, b], (a, \infty), [a, \infty)$, $(-\infty, b), (-\infty, b]$. Observe que, se $(x_n) \subseteq (a, b)$ é uma sequência convergente, então

$$a < x_n < b, \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq \lim x_n \leq b.$$

Ou seja, se x é aderente a (a, b), então $x \in [a, b]$. Dessa forma, $b + 1$ não é aderente a (a, b). Analogamente, se x é aderente a $(a, \infty), [a, \infty)$ então $x \in [a, \infty)$. E se x é aderente a $(-\infty, b), (-\infty, b]$ então $x \in (-\infty, b]$.

Exemplo 4.10. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não-vazio, limitado inferiormente. Então, $\inf X$ é um ponto aderente de X. De fato, dado $n \in \mathbb{N}$ existe $(x_n) \subseteq X$ tal que

$$\inf X \leq x_n < \inf X + \frac{1}{n},$$

ver Definição 1.12. Usando o Teorema do Sanduíche, temos que $\lim x_n = \inf X$ (ver Exemplo 2.5). Ou seja, $\inf X$ é aderente a X. Analogamente, $\sup X$ é aderente a X, caso X seja não-vazio e limitado superiormente.

Definição 4.4 (Fecho)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Chamamos o conjunto

$$\overline{X} = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ é ponto aderente a } X\}$$

de fecho do conjunto X.

Obs 4.6. Segue da Definição 4.4 que se $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$, então $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$. De fato, seja $x \in \overline{X}$, então existe

$$(x_n) \subseteq X \text{ tal que } \lim x_n = x;$$

Por outro lado, $X \subseteq Y$. Assim sendo,

$$(x_n) \subseteq Y \text{ tal que } \lim x_n = x.$$

Portanto, $x \in \overline{Y}$.

Qualquer conjunto está contido no próprio fecho. Veja a explicação para este fato a seguir.

Exemplo 4.11. O Exemplo 4.7 nos permite concluir que $X \subseteq \overline{X}$, $\forall\, X \subseteq \mathbb{R}$.

Exemplo 4.12. Note que $0 \in \overline{\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}}$, ver Exemplo 4.8.

O exemplo abaixo nos diz que para encontrar o fecho de um intervalo basta acrescentar os extremos a este, caso existam e não estejam em tais conjuntos.

Exemplo 4.13. O Exemplo 4.9 nos garante que

$$\overline{(a, b)} = \overline{(a, b]} = \overline{[a, b)} = \overline{[a, b]} = [a, b].$$

Além disso,

$$\overline{(a,\infty)} = \overline{[a,\infty)} = [a,\infty) \text{ e } \overline{(-\infty,b)} = \overline{(-\infty,b]} = (-\infty,b].$$

O ínfimo e o supremo de um conjunto não-vazio e limitado pertencem ao fecho deste.

Exemplo 4.14. Se X é um conjunto não-vazio e limitado, então $\inf X, \sup X \in \overline{X}$, ver Exemplo 4.10.

Definição 4.5 (Conjunto Fechado)**.** Dizemos que $X \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto fechado em $\mathbb{R}$ se $X = \overline{X}$.

Obs 4.7. Vimos que $X \subseteq \overline{X}$, $\forall\ X \subseteq \mathbb{R}$. Assim para provar que X é fechado basta mostrar que $\overline{X} \subseteq X$.

Exemplo 4.15. Os conjuntos $[a,b]$ e $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ são fechados.

Exemplo 4.16. $(a,b), (a,b], [a,b), (a,\infty), (-\infty,b)$ são exemplos de conjuntos não-fechados (ver Exemplo 4.13).

Uma outra maneira de caracterizar ponto aderente está enunciada no seguinte resultado.

Teorema 4.2 (Caracterização do Fecho)**.** $x \in \overline{X} \Leftrightarrow$ *dado* $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$*, é verdade que* $X \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \neq \emptyset$*.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que $x \in \overline{X}$. Então existe $(x_n) \subseteq X$ tal que $\lim x_n = x$. Com isso, dado $\varepsilon > 0$,

$$\exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_N \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon).$$

Mas, $x_N \in X$, pois $(x_n) \subseteq X$. Portanto,

$$x_N \in X \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon),$$

ou seja, $X \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \neq \emptyset$.

$\Leftarrow$) Dado $n \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$X \cap \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) \neq \emptyset,$$

isto é,

$$\exists\ x_n \in X \cap \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right),$$

ou seja,

$$\exists\ (x_n) \subseteq X, \text{ com } x - \frac{1}{n} < x_n < x + \frac{1}{n}.$$

Usando o Teorema do Sanduíche, concluímos que $\lim x_n = x$ (ver Exemplo 2.5). Dessa forma, $x \in \overline{X}$. $\square$

Vejamos exemplos de conjuntos cujo fecho é o conjunto dos números reais.

Exemplo 4.17 (Fecho de $\mathbb{Q}$)**.** É verdade que $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. De fato, dados $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ sabemos, pelo Teorema 1.6, que

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \text{ e } (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \neq \emptyset.$$

Logo, $x \in \overline{Q}, \overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}$. Ou seja, $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

O resultado a seguir nos mostra uma maneira de relacionarmos as definições de conjuntos abertos e fechados.

Teorema 4.3. *$X \subseteq \mathbb{R}$ é fechado $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}X$ é aberto, onde $\mathcal{C}X = \mathbb{R}\backslash X$ é o conjunto complementar de X em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que X é fechado, isto é, $\overline{X} = X$. Vamos provar que $\mathcal{C}X$ é aberto. Seja $x \in \mathcal{C}X$. Logo, $x \notin X$. Consequentemente, $x \notin \overline{X}$. Usando o Teorema 4.2, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$X \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \emptyset,$$

ou seja,

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \mathcal{C}X.$$

Dessa forma, $x \in \operatorname{int}(\mathcal{C}X)$. Por fim, $\mathcal{C}X \subseteq \operatorname{int}(\mathcal{C}X)$. Isto nos diz que, $\mathcal{C}X$ é aberto.

$\Leftarrow$) Agora, considere que $\mathcal{C}X$ é aberto, isto é, $\operatorname{int}(\mathcal{C}X) = \mathcal{C}X$. Seja $x \in \overline{X}$. Vamos provar que $x \in X$. Utilizando o Teorema 4.2, temos que, dado $\varepsilon > 0$ tem-se

$$X \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \neq \emptyset.$$

Portanto,

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \nsubseteq \mathcal{C}X.$$

Então, $x \notin \text{int}(\mathcal{C}X) = \mathcal{C}X$. Logo, $x \in X$. Com isso, $\overline{X} \subseteq X$. Ou seja, X é fechado. □

No exemmplo abaixo, veremos dois exemplos de conjuntos abertos e fechados simultaneamente.

Exemplo 4.18. Vimos que $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ são abertos. Logo, $\emptyset = C\mathbb{R}$ e $\mathbb{R} = C\emptyset$ são fechados. Isto nos mostra que aberto e fechado não são caracterizações excludentes.

Proposição 4.1. *É fato que*

$$\mathcal{C}\overline{X} = \text{int}(\mathcal{C}X), \forall\ X \subseteq \mathbb{R}.$$

Em particular, $\overline{X}$ é fechado.

Demonstração. Usando o Teorema 4.2, temos que

$$x \in \mathcal{C}\overline{X} \Leftrightarrow x \notin \overline{X} \Leftrightarrow \exists\ \varepsilon > 0 : X \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \emptyset \Leftrightarrow (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \mathcal{C}X \Leftrightarrow x \in \text{ int}(\mathcal{C}X).$$

Assim sendo, pelo exemplo 4.6, $\mathcal{C}\overline{X} = \text{int}(\mathcal{C}X)$ é aberto. Utilizando o Teorema 4.3, $\overline{X}$ é fechado, isto é, $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$. □

Teorema 4.4. *As seguintes afirmações são válidas:*

i) *A união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado;*

ii) *A interseção qualquer de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*

Demonstração. **i)** Sejam X_1, X_2 fechados. Então $X = X_1 \cup X_2$ é fechado. De fato,

$$\mathcal{C}X = \mathcal{C}(X_1 \cup X_2) = \mathcal{C}X_1 \cap \mathcal{C}X_2.$$

Como X_1 e X_2 são fechados, então

$$\mathcal{C}X_1 \text{ e } \mathcal{C}X_2 \text{ são abertos,}$$

pelo Teorema 4.3. Vimos no Teorema 4.1 que $\mathcal{C}X_1 \cap \mathcal{C}X_2$ é aberto. Portanto, $\mathcal{C}X$ é aberto. Novamente usando o Teorema 4.3, concluímos que X é fechado. O caso geral segue por indução sobre o número de fechados.

ii) Seja $(X_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ uma família qualquer de conjuntos fechados. Seja $X = \cap_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$. Portanto,

$$\mathcal{C}X = \mathcal{C}(\cap_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma) = \cup_{\gamma\in\Gamma}(\mathcal{C}X_\gamma).$$

Como cada X_γ é fechado, então, pelo Teorema 4.3, $\mathcal{C}X_\gamma$ é aberto. Usando o Teorema 4.1, concluímos que $\cup_{\gamma\in\Gamma}(\mathcal{C}X_\gamma)$ é aberto. Ou seja, $\mathcal{C}X$ é aberto. Ou equivalentemente, X é fechado, pelo Teorema 4.1. □

Obs 4.8. Observe que a união qualquer de fechados não, necessariamente, é fechado. De fato,

$$(0,1) = \cup_{x\in(0,1)}\{x\}.$$

Veja que

$$\mathcal{C}\{x\} = (-\infty, x) \cup (x, \infty).$$

Logo, $\mathcal{C}\{x\}$ é aberto (ver Teorema 4.1). Então, $\{x\}$ é fechado. Porém $(0,1)$ não é fechado. Ou seja, temos uma união de fechados que não é fechado.

Exercícios de Fixação

1. Mostre que $\mathbb{N}$ é fechado.

2. Mostre que $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ não é fechado.

3. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Seja $Y = \cap A$, onde $A \supseteq X$ é fechado. Então Y é fechado.

4.4 Conjuntos Conexos

Vamos inserir pré-requisitos para podermos provar que os únicos conjuntos que são abertos e fechados em $\mathbb{R}$ são $\emptyset$ e $\mathbb{R}$. Primeiramente, estabeleceremos a seguinte definição.

Definição 4.6 (Cisão)**.** Dizemos que $(X|Y)$ é uma cisão do conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ se

$$A = X \cup Y \text{ e } X \cap \overline{Y} = \overline{X} \cap Y = \emptyset.$$

Obs 4.9. A cisão $(A|\emptyset)$ é denominada cisão trivial de $A \subseteq \mathbb{R}$.

Exemplo 4.19. Seja $X = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. $((-\infty, 0)|(0, \infty))$ é uma cisão para X. De fato,

$$X = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

e também

$$\overline{(-\infty, 0)} \cap (0, \infty) = (-\infty, 0] \cap (0, \infty) = \emptyset.$$

Além disso,

$$(-\infty, 0) \cap \overline{(0, \infty)} = (-\infty, 0) \cap [0, \infty) = \emptyset.$$

Exemplo 4.20. Seja $X = [1, 3]$. $([1, 2]|(2, 3])$ não é uma cisão de X. Com efeito,

$$2 \in [1, 2] \cap \overline{(2, 3]},$$

ou seja

$$[1, 2] \cap \overline{(2, 3]} \neq \emptyset.$$

Isto mostra a afirmação.

Teorema 4.5. *Qualquer intervalo em $\mathbb{R}$ não-degenerado admite somente a cisão trivial.*

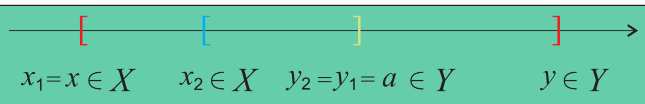

Figura 4.5: Ideia da demonstração até o passo $n = 2$

Demonstração. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo não-degenerado. Suponha, por absurdo, que $(X|Y)$ é uma cisão não-trivial de I, i.e,

$$I = X \cup Y, \ \overline{X} \cap Y = X \cap \overline{Y} = \emptyset$$

e X, Y são não-vazios. Sejam $x \in X$ e $y \in Y$. Logo, $[x, y] \subseteq I$. Como $X \subseteq \overline{X}$ e $Y \subseteq \overline{Y}$, então $X \cap Y = \emptyset$. Dessa forma, $x \notin Y$ e $y \notin X$. Seja

$$a = \frac{x + y}{2} \in I = X \cup Y.$$

Se $a \in Y$, então faça $x_1 = x \in X$ e $y_1 = a \in Y$. Logo, $[x_1, y_1] \subseteq [x, y]$. Se $a \in X$, então faça $x_1 = a \in X$ e $y_1 = y \in Y$. Logo, $[x_1, y_1] \subseteq [x, y]$. De qualquer maneira

$$y_1 - x_1 = \frac{y-x}{2}, x_1 \in X \text{ e } y_1 \in Y.$$

Indutivamente, suponha que

$$I \supseteq [x, y] \supseteq [x_1, y_1] \supseteq \ldots \supseteq [x_n, y_n],$$

onde

$$y_i - x_i = \frac{y-x}{2^i},\ x_i \in X \text{ e } y_i \in Y, \forall\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Seja

$$a_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \in I = X \cup Y.$$

Se $a_{n+1} \in X$, então faça $x_{n+1} = a_{n+1} \in X$ e $y_{n+1} = y_n \in Y$. Logo,

$$[x_{n+1}, y_{n+1}] \subseteq [x_n, y_n].$$

Se $a_{n+1} \in Y$, então faça

$$x_{n+1} = x_n \in X \text{ e } y_{n+1} = a_{n+1} \in Y.$$

Logo, $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subseteq [x_n, y_n]$. De qualquer maneira

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{y_n - x_n}{2} = \frac{y-x}{2^{n+1}},\ x_{n+1} \in X \text{ e } y_{n+1} \in Y.$$

Consequentemente,

$$I \supseteq [x, y] \supseteq [x_1, y_1] \supseteq \ldots \supseteq [x_n, y_n] \supseteq \ldots,$$

onde

$$y_n - x_n = \frac{y-x}{2^n},\ x_n \in X \text{ e } y_n \in Y, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Usando o Teorema dos Intervalos Encaixados,

$$\cap_{n\in\mathbb{N}}[x_n, y_n] \neq \emptyset,$$

ou seja, $\exists\ b \in \cap_{n\in\mathbb{N}}[x_n, y_n]$, isto é,

$$x_n \leq b \leq y_n, \forall\ n \in \mathbb{N}\ (b \in I).$$

Mas, $(x_n), (y_n) \subseteq [x, y]$. Logo, (x_n) e (y_n) são limitadas. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, passando a uma subsequência, se necessário, $\lim x_n$ e $\lim y_n$ existem. Por outro lado,

$$\lim y_n - \lim x_n = \lim(y_n - x_n) = \lim \frac{y-x}{2^n} = (y-x) \lim \frac{1}{2^n} = 0,$$

pois $\lim 2^n = \infty$. Portanto, $\lim x_n = \lim y_n$. Com isso, pelo Teorema do Sanduíche,

$$\lim x_n \leq b \leq \lim y_n = \lim x_n.$$

Dessa forma, $b = \lim x_n = \lim y_n$. Assim sendo, $b \in \overline{X}, \overline{Y}$. Por fim, $b \notin X$ e $b \notin Y$, pois $\overline{X} \cap Y = X \cap \overline{Y} = \emptyset$. Logo, $b \notin I$. Absurdo! $\square$

Vejamos agora como provar que não existe outro subconjunto de $\mathbb{R}$ aberto e fechado simultaneamente, a menos do vazio e de $\mathbb{R}$.

Corolário 4.6. *$\mathbb{R}$ e $\emptyset$ são os únicos conjuntos que são abertos e fechados em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Suponha que $X \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto aberto e fechado em $\mathbb{R}$. Vamos provar que $X = \mathbb{R}$ ou $X = \emptyset$. De fato, sabemos que $\mathbb{R} = X \cup \mathcal{C}X$. Além disso,

$$\overline{X} \cap \mathcal{C}X = X \cap \overline{\mathcal{C}X} = X \cap \mathcal{C}X = \emptyset,$$

pois X e $\mathcal{C}X$ são fechados (ver Teorema 4.3). Logo, $(X|\mathcal{C}X)$ é uma cisão de $\mathbb{R}$. Porém $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ é um intervalo não-degenerado. Assim, pelo Teorema 4.5, $(X|\mathcal{C}X)$ é uma cisão trivial. Ou seja, $X = \mathbb{R}$ ou $X = \emptyset$. $\square$

A partir da definição de cisão, estamos aptos a definir conjuntos conexos em $\mathbb{R}$.

Definição 4.7 (Conjuntos Conexos)**.** Dizemos que $X \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto conexo se X só admite a cisão trivial. Caso contrário, X é dito desconexo.

Exemplo 4.21. Vimos no Exemplo 4.19 que $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ é um conjunto desconexo.

Exemplo 4.22. Vimos no Teorema 4.5 que todo intervalo não-degenerado é um conjunto conexo.

A pergunta que surge, neste momento, é a seguinte: a recíproca da afirmação acima é verdadeira? A resposta é afirmativa e está enunciada no próximo resultado.

Teorema 4.7. *Todo subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ é um intervalo.*

Demonstração. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto conexo. Suponha que X não é um intervalo. Logo, existem $a < y < b$ tais que $a, b \in X$ e $y \notin X$. Sejam

$$A = (-\infty, y) \cap X \text{ e } B = (y, \infty) \cap X.$$

Logo,

$$A \cap B = \emptyset, \quad A \cup B = X, \quad \overline{A} \cap B \subseteq (-\infty, y] \cap (y, \infty) = \emptyset.$$

Além disso,

$$A \cap \overline{B} \subseteq (-\infty, y) \cap [y, \infty) = \emptyset.$$

Note que $a \in A$ e $b \in B$. Assim sendo, $(A|B)$ é uma cisão não-trivial de X. Isto é uma contradição, pois X é conexo. Deste modo, X é um intervalo. □

Exercícios de Fixação

1. Mostre que a união de conjuntos conexos que contém um ponto em comum é um conjunto conexo.

2. Prove que: A fim de que $X \subseteq \mathbb{R}$ seja conexo, é necessário e suficiente que, para quaisquer $a, b \in X$, exista um conjunto conexo C_{ab} com $a, b \in C_{ab} \subseteq X$.

3. Sejam $X \subseteq Y \subseteq \overline{X} \subseteq \mathbb{R}$. Mostre que se X é conexo, então Y também é.

4. Mostre que o fecho de um conjunto conexo em $\mathbb{R}$ é conexo.

4.5 Conjunto Fronteira

Nesta seção, estamos interessados em definir e exemplificar os pontos de fronteira de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Além disso, mostraremos outras caracterizações que classificam conjuntos abertos e fechados, utilizando a definição de fronteira.

Definição 4.8 (Fronteira)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é ponto de fronteira de X se $\forall\, \varepsilon > 0$, tem-se que

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap X \neq \emptyset \text{ e } (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathcal{C}X \neq \emptyset.$$

O conjunto

$$\text{Fr}X = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ é ponto de fronteira de } X\}$$

é denominado conjunto fronteria de X em $\mathbb{R}$.

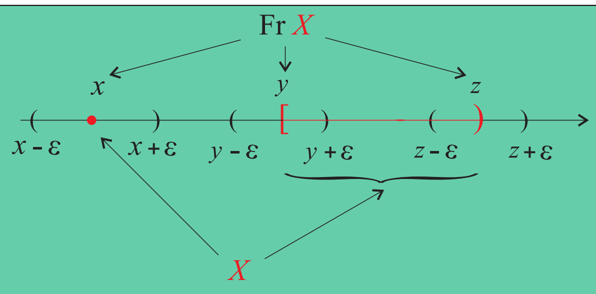

Figura 4.6: Conjunto fronteira

Obs 4.10. Seguindo a Definição 4.8, concluímos que $\text{Fr}X = \text{Fr}(\mathcal{C}X)$.

Exemplo 4.23. Dado $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \text{ e } (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \neq \emptyset,$$

basta utilizar o Teorema 1.6. Assim, $x \in \mathbb{R}$ é ponto de fronteira de $\mathbb{Q}$ e de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Portanto,

$$\text{Fr}\mathbb{Q} = \text{Fr}(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.24. Usando novamente o Teorema 1.6, temos que $a, b \in \mathbb{R}$ são pontos de fronteira de (a,b), $[a,b)$, $[a,b]$, $a \in \mathbb{R}$ é ponto de fronteira de (a,∞), $[a,\infty)$ e $b \in \mathbb{R}$ é ponto de fronteira de $(-\infty,b)$ e $(-\infty,b]$. Agora, se

$$a < x < b,\ y < a \text{ e } b < z,$$

então existem

$$\varepsilon = \min\{(b-x)/2, (x-a)/2\} > 0, \quad \delta = (a-y)/2 > 0 \text{ e } \lambda = (z-b)/2$$

tais que

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathcal{C}(a,b) = \emptyset, (y-\delta, y+\delta) \cap (a,b) = \emptyset \text{ e } (z-\lambda, z+\lambda) \cap (a,b) = \emptyset.$$

Portanto,

$$\mathrm{Fr}(a,b) = \mathrm{Fr}[a,b) = \mathrm{Fr}(a,b] = \{a,b\}.$$

Analogamente,

$$\mathrm{Fr}(a,\infty) = \mathrm{Fr}[a,\infty) = \{a\} \text{ e } \mathrm{Fr}(-\infty,b) = \mathrm{Fr}(-\infty,b] = \{b\}.$$

Vejamos uma outra maneira de caracterizar conjuntos fechados em $\mathbb{R}$.

Proposição 4.2. *$X \subseteq \mathbb{R}$ é fechado $\Leftrightarrow$ Fr$X \subseteq X$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que X é fechado, isto é, $\overline{X} = X$. Seja $x \in \mathrm{Fr}X$, daí $\forall\ \varepsilon > 0$, tem-se que

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap X \neq \emptyset.$$

Usando o Teorema 4.2, temos que $x \in \overline{X} = X$. Daí, $\mathrm{Fr}X \subseteq X$.

$\Leftarrow$) Reciprocamente, considere que $\mathrm{Fr}X \subseteq X$. Seja $x \in \overline{X}$. Novamente utilizando o Teorema 4.2, sabemos que $\forall\ \varepsilon > 0$, tem-se

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap X \neq \emptyset.$$

Suponha que $x \in \mathcal{C}X$. Logo,

$$x \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathcal{C}X \neq \emptyset.$$

Consequentemente, $x \in \mathrm{Fr}X \subseteq X$. Ou seja, $x \in X$, mas $x \in \mathcal{C}X$. Contradição! Daí, $x \notin \mathcal{C}X$, isto é, $x \in X$. Por fim, $\overline{X} \subseteq X$. Ou seja, X é fechado. □

Exemplo 4.25. Usando o Exemplo 4.24 e a Proposição 4.2, vemos de uma outra maneira que $(0,1)$ não é fechado, já que $\mathrm{Fr}(0,1) = \{0,1\} \nsubseteq (0,1)$.

Uma outra maneira de verificar se um conjunto é aberto em $\mathbb{R}$ está descrita no seguinte resultado.

Proposição 4.3. *$A \subseteq \mathbb{R}$ é aberto $\Leftrightarrow A\cap$ $FrA = \emptyset$.*

Demonstração. De fato, usando a Proposição 4.2 e o Teorema 4.2, concluímos que

$$A \subseteq \mathbb{R} \text{ é aberto} \Leftrightarrow \mathcal{C}A \text{ é fechado} \Leftrightarrow \mathrm{Fr}A = \mathrm{Fr}(\mathcal{C}A) \subseteq \mathcal{C}A \Leftrightarrow \mathrm{Fr}A \cap A = \emptyset.$$

□

Exemplo 4.26. Seja $A = (0, 1]$. Então $\mathrm{Fr}A = \{0, 1\}$. Portanto,

$$A \cap \mathrm{Fr}A = (0, 1] \cap \{0, 1\} = \{1\} \neq \emptyset.$$

Pela Proposição 4.3, temos que A não é aberto.

Exercícios de Fixação

1. Encontre os seguintes conjuntos $\mathrm{Fr}\mathbb{N}$, $\mathrm{Fr}\mathbb{Z}$, $\mathrm{Fr}\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, $\mathrm{Fr}\mathbb{R}$ e $\mathrm{Fr}\emptyset$.

4.6 Pontos de Acumulação e Conjuntos Discretos

Agora estamos interessados em definir pontos de acumulação de subconjuntos de $\mathbb{R}$, discutir exemplos de conjuntos discretos e demonstrar o famoso Teorema de Bolzano que estabelece hipóteses para a existência de pontos de acumulação.

Definição 4.9 (Ponto de Acumulação)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de X se $\exists\ (x_n) \subseteq X\backslash\{x\}$ tal que $\lim x_n = x$.

Obs 4.11. O conjunto dos pontos de acumulação de X será denotado por X', isto é,

$$X' = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ é ponto de acumulação de } X\}.$$

Obs 4.12. Segue diretamente das definições 4.9 e 4.4 que $X' \subseteq \overline{X}$.

Exemplo 4.27. $0 \in X'$, onde $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. De fato, a sequência $(1/n) \subseteq X\backslash\{0\}$ satisfaz $\lim \frac{1}{n} = 0$.

A seguir expomos um resultado que informa uma outra maneira de definirmos ponto de acumulação.

Teorema 4.8 (Caracterização de Ponto de Acumulação)**.** *Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $X \subseteq \mathbb{R}$. Então,*

$$x \in X' \Leftrightarrow \textit{ dado } \varepsilon > 0, \textit{ tem-se que } (X\backslash\{x\}) \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \neq \emptyset.$$

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que $x \in X'$. Então existe $(x_n) \subseteq X\backslash\{x\}$ tal que $\lim x_n = x$. Dessa forma, dado $\varepsilon > 0$,

$$\exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_N \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon),$$

mas $x_N \in X\backslash\{x\}$. Logo,

$$(X\backslash\{x\}) \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \neq \emptyset.$$

$\Leftarrow$) Seja $n \in \mathbb{N}$. Por hipótese, tem-se que

$$(X\backslash\{x\}) \cap \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) \neq \emptyset,$$

ou seja,

$$\exists\ x_n \in (X\backslash\{x\}) \cap \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right),$$

isto é,

$$(x_n) \subseteq X\backslash\{x\} \text{ e } x - \frac{1}{n} < x_n < x + \frac{1}{n}.$$

Pelo Teorema do Sanduíche, $\lim x_n = x$ (ver Exemplo 2.5). Portanto, $x \in X'$. □

Exemplo 4.28. Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números interiros. Dado $z \in \mathbb{Z}$, temos que $z \notin \mathbb{Z}'$. Com efeito,

$$(\mathbb{Z}\backslash\{z\}) \cap (z - 1, z + 1) = \emptyset.$$

Assim, o Teorema 4.8 confirma a afirmação.

Obs 4.13. Observe que

$$x \in \overline{X\backslash\{x\}} \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \text{ tem-se que } (X\backslash\{x\}) \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in X',$$

ou seja, $x \in \overline{X\backslash\{x\}} \Leftrightarrow x \in X'$. Basta usar os Teoramas 4.2 e 4.8.

Exemplo 4.29. Usando a Observação 4.13, temos que $0 \in [0,1)'$, pois, $0 \in [0,1] = \overline{(0,1)}$.

Precisaremos da definição abaixo para podermos classificar quais conjuntos são denominados discretos.

Definição 4.10 (Ponto Isolado)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que $x \in X$ é um ponto isolado de X, se este não é ponto de acumulação de X.

Obs 4.14. Note que para que x seja ponto isolado de X é necessário que $x \in X$.

Obs 4.15. Veja que x é ponto isolado de $X \Leftrightarrow$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $X \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \{x\}$.

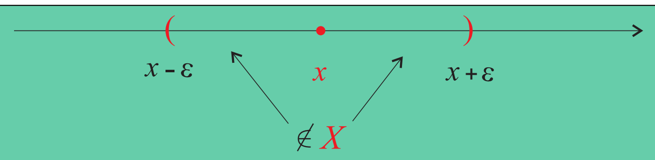

Figura 4.7: Ponto isolado

Exemplo 4.30. Vimos que qualquer ponto de $\mathbb{Z}$ é ponto isolado de $\mathbb{Z}$.

Definição 4.11 (Conjunto Discreto)**.** Dizemos que $X \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto discreto se todos os seus pontos são isolados.

Exemplo 4.31. O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é discreto.

Exemplo 4.32. $[0,1)$ não é discreto, já que $0 \in [0,1)'$.

O resultado a seguir, nos diz que todo conjunto limitado e infinito possui, no mínimo, um ponto de acumulação.

Teorema 4.9 (Teorema de Bolzano)**.** *Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto limitado e infinito. Então $X' \neq \emptyset$.*

Demonstração. Como X é infinito, então existe uma injeção $f : \mathbb{N} \to X$ (ver livro [13]). Logo, $f : \mathbb{N} \to f(\mathbb{N}) \subseteq X$ é uma bijeção. Como $\mathbb{N}$ é enumerável, então $f(\mathbb{N})$ também é. Ou seja, X possui o subconjunto $f(\mathbb{N})$, o qual é enumerável. Digamos que $f(\mathbb{N}) = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Considere que estes elementos são dois a dois distintos. Com isso, $(x_n) \subseteq X$. Como X é limitado, então (x_n) é uma sequência limitada. Passando a uma subseqência, se necessário, (x_n) é uma sequência convergente (ver Teorema de Bolzano-Weierstrass), digamos $\lim x_n = x$. Se um, e somente um, dos termos da sequência (x_n) é igual a x, então exclua este termo da sequência para obter $(x_n) \subseteq (X \backslash \{x\})$, com $\lim x_n = x$. Logo $x \in X'$. Por fim, $X' \neq \emptyset$. $\square$

4.7 Pontos de Acumulação Laterais

Para definirmos limites laterais (ver aula 5, seção 5.4) precisaremos dos conceitos de ponto de acumulação à direita e à esquerda de um determinado subconjunto de $\mathbb{R}$. Por isso, definiremos tais números.

Definição 4.12 (Ponto de Acumulação à Direita e à Esquerda)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que $y \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação à direita (respectivamente, à esquerda) de X, e escrevemos $y \in X'_+$ (respectivamente, $y \in X'_-$), quando existe $(x_n) \subseteq X$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n > y$ (respectivamente, $x_n < y$), e $\lim x_n = y$.

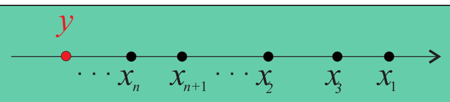

Figura 4.8: Ponto de acumulação à direita

Exemplo 4.33. Seja $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Vimos que,

$$\lim 1/n = 0, 1/n > 0 \text{ e } 1/n \in X, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Logo, $0 \in X'_+$. Seja $Y = (a, b)$, assim $a \in (a, b)'_+$ e $b \in (a, b)'_-$, pois

$$\lim \left(a + \frac{1}{n}\right) = a \text{ e } \lim \left(b - \frac{1}{n}\right) = b,$$

com

$$a + \frac{1}{n} > a, b - \frac{1}{n} < b$$

e

$$a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n} \in (a, b),$$

para n suficientemente grande. Analogamente,

$$a \in [a, b]'_+, [a, b)'_+, (a, b]'_+, [a, \infty)'_+, (a, \infty)'_+$$

e

$$b \in [a, b]'_-, [a, b)'_-, (a, b]'_-, (-\infty, b)'_-, (-\infty, b]'_-.$$

Exemplo 4.34. $1 \notin (0, 1)'_+$, pois à direita de 1 não existe elemento de $(0, 1)$.

Definição 4.13 (Ponto de Acumulação Bilateral)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que $y \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação bilateral de X, e escrevemos $y \in X'_{\pm}$, se y é ponto de acumulação à direita e à esquerda de X.

Exemplo 4.35. Seja $X = (0,1)$, então $1/2 \in X'_{\pm}$, pois

$$\lim\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2} \text{ e } \lim\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

Exemplo 4.36. Seja $X = (0,1)$, então $1 \notin X'_{\pm}$, pois $1 \notin X'_{+}$.

Vejamos uma outra maneira de definir ponto de acumulação à direita.

Proposição 4.4 (Caracterização de Ponto de Acumulação à Direita)**.** *Seja* $X \subseteq \mathbb{R}$. *Então* $y \in X'_{+} \Leftrightarrow$ *dado* $\varepsilon > 0$*, tem-se que* $X \cap (y, y+\varepsilon) \neq \emptyset$.

Demonstração. $\Rightarrow$) Se $y \in X'_{+}$, então existe $(x_n) \subseteq X$, com $x_n > y$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, e $\lim x_n = y$. Dessa forma, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$x_n \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon), \forall\, n \geq N.$$

Como $x_n > y$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, então

$$x_n \in (y, y+\varepsilon), \forall\, n \geq N.$$

Em particular, $x_N \in X \cap (y, y+\varepsilon)$, istoe é, $X \cap (y, y+\varepsilon) \neq \emptyset$.

$\Leftarrow$) Suponha que dado $\varepsilon > 0$, tem-se que $X \cap (y, y+\varepsilon) \neq \emptyset$. Tome os seguintes valores para ε :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$$

Assim, encontramos

$$x_n \in X \cap \left(y, y+\frac{1}{n}\right),$$

ou seja,

$$y < x_n < y + \frac{1}{n}.$$

Pelo Teorema do Sanduíche, $\lim x_n = y$ (ver Exemplo 2.5). Isto nos diz que $y \in X'_{+}$. $\square$

Obs 4.16. Analogamente ao que foi feito na Proposição 4.4, prova-se que $y \in X'_- \Leftrightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, tem-se que $X \cap (y - \varepsilon, y) \neq \emptyset$.

Exemplo 4.37. Seja $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Observe que $0 \notin X'_-$. De fato, $(-1, 0) \cap X = \emptyset$, com $\varepsilon = 1 > 0$.

Exercícios de Fixação

1. Prove que $y \in X'_+$ (respectivamente, $y \in X'_-$) $\Leftrightarrow \exists\ (x_n) \subseteq (X \backslash \{y\})$ decrescente (respectivamente, crescente) tal que $\lim x_n = y$.

2. Encontre os conjuntos $\mathbb{N}'$, $(a, b)'$, $(-\infty, c]'$, onde $a < b$.

3. Quais dos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ e $(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ são discretos.

4.8 Conjuntos Compactos

Neste momento, preocuparemo-nos em identicar os conjuntos que possuem duas caracterizações em comum, as de serem limitados e fechados ao mesmo tempo. A estes conjuntos daremos o nome compactos em $\mathbb{R}$. Relembraremos alguns conjuntos, já citados neste material, que satisfazem tais definições. Por fim, enunciaremos e demonstaremos o Teorema de Cantor, o qual generaliza o Teorema dos Intervalos Encaixados.

Definição 4.14 (Conjuntos Compactos)**.** Dizemos que um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é compacto em $\mathbb{R}$ se X é fechado e limitado.

Exemplo 4.38. Vimos que $[a, b]$ é fechado e limitado. Logo, $[a, b]$ é compacto em $\mathbb{R}$.

Exemplo 4.39. Os intervalos $(a, b), [a, b), (a, b]$ são limitaodos, mas não são fechados. Assim, $(a, b), [a, b), (a, b]$ não são compactos.

Exemplo 4.40. Veja que $\mathcal{C}\mathbb{Z} = \cup_{z \in \mathbb{Z}}(z - 1, z + 1)$. Logo $\mathcal{C}\mathbb{Z}$ é aberto, pelo Teorema 4.1. Assim, usando o Teorema 4.3, $\mathbb{Z}$ é fechado. Mas, $\mathbb{Z}$ não é limitado, pois $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$ é ilimitado (ver Teorema 1.2). Dessa forma, $\mathbb{Z}$ não é compacto.

O próximo Teorema nos mostra uma maneira equivalente de definir conjuntos compactos em $\mathbb{R}$.

Teorema 4.10 (Caracterização de Compacto). *$X \subseteq \mathbb{R}$ é compacto $\Leftrightarrow$ toda sequência em X possui uma subsequência que converge para um ponto $x \in X$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja X compacto. Seja $(x_n) \subseteq X$. Como X é limitado, então (x_n) é limitada. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, (x_n) possui uma subsequência $(x_{n_k}) \subseteq X$ convergente. Digamos, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Como X é fechado, então $x \in \overline{X} = X$.

$\Leftarrow$) Faremos a prova por contraposição. Suponha que X não é compacto. Assim, X é ilimitado ou não-fechado. Considere que X é ilimitado. Assim, dado $n \in \mathbb{N}$, existe

$$x_n \in X \text{ tal que } n < |x_n|.$$

Portanto, toda subsequência de (x_n) é ilimitada. Usando o Teorema 2.3, toda subsequência de (x_n) é divergente. Agora, se X não é fechado então existe $x \in \overline{X}$ tal que $x \notin X$. Ou seja,

$$\exists\ (x_n) \subseteq X \text{ tal que } \lim x_n = x \notin X.$$

Dessa forma, toda subsequência de (x_n) converge para $x \notin X$ (ver Teorema 2.2). □

Exemplo 4.41. Se Y é compacto, então $X = \{x + y : x, y \in Y\}$ é compacto. De fato, Seja $(z_n) \subseteq X$. Então existem $(x_n), (y_n) \subseteq Y$ tais que

$$z_n = x_n + y_n, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Como Y é compacto, então, usando o Teorema 4.10, temos que existem $(x_{n_k}), (y_{n_k}) \subseteq Y$ subsequências de $(x_n), (y_n)$, respectivamente, tais que

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in Y \text{ e } \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y \in Y.$$

Seja

$$z_{n_k} = x_{n_k} + y_{n_k}, \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Logo (z_{n_k}) é subsequência de (z_n) e

$$\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = \lim_{k\to\infty} (x_{n_k} + y_{n_k}) = x + y \in X.$$

Utilizando o Teorema 4.10, temos que X é compacto.

Vejamos uma generalização do Teorema dos Intervalos Encaixados.

Teorema 4.11 (Teorema de Cantor). *Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma família enumerável de compactos em $\mathbb{R}$ não-vazios. Se*

$$... \subseteq X_n \subseteq ... \subseteq X_2 \subseteq X_1.$$

Então $\cap_{n\in\mathbb{N}} X_n \neq \emptyset$.

Demonstração. Como $X_n \neq \emptyset$, então existe $x_n \in X_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$X_n \subseteq X_1, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Dessa forma, temos uma sequência (x_n) contida no compacto X_1. Com o Teorema 4.10, concluímos que existe $(x_{n'})_{n'\in\mathbb{N}'}$ subsequência de (x_n) tal que

$$\lim_{n'\in\mathbb{N}'} x_{n'} = x \in X_1.$$

Como $\mathbb{N}'$ é infinito, então dado $n \in \mathbb{N}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}'$ tal que $n_0 > n$. Consequentemente,

$$n' + n_0 > n_0 > n, \forall\ n' \in \mathbb{N}',$$

por conseguinte,

$$X_{n'+n_0} \subseteq X_{n_0} \subseteq X_n, \forall\ n' \in \mathbb{N}'.$$

Mas,

$$\lim_{n'\in\mathbb{N}'} x_{n'+n_0} = x,$$

ver Proposição 2.1. Além disso,

$$(x_{n'+n_0})_{n'\in\mathbb{N}'} \subseteq X_{n'+n_0} \subseteq X_n.$$

Porém X_n é fechado, assim, $x \in \overline{X_n} = X_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Ou seja, $\cap_{n\in\mathbb{N}} X_n \neq \emptyset$. □

Obs 4.17. Se a famíla não for formada por compactos o Teorema 4.11 é falso. Por exemplo, vimos que a família $\left(\left(0, \frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é formada por conjuntos limitados, mas não-fechados. Além disso, $\cap_{n\in\mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$. Outro exemplo é a famíla $([n, \infty))_{n\in\mathbb{N}}$, a qual é formada por conjuntos fechados ilimitados que satisfaz $\cap_{n\in\mathbb{N}}[n, \infty) = \emptyset$. (note que $\mathcal{C}([n, \infty)) = (-\infty, n)$ é aberto).

Exercícios de Fixação

1. O conjunto $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ é compacto?

2. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto compacto não-vazio. Mostre que $\inf X, \sup X \in X$.

3. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto compacto não-vazio. Seja $b \in \mathbb{R}$. Prove que existe $a \in X$ tal que $|b - a| = \sup\{|b - x| : x \in X\}$.

4. $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto compacto. Seja $Y \subseteq X$ um conjunto fechado. Mostre que Y é compacto.

5. Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos compactos disjuntos e não-vazios. Mostre que existem $a \in X$ e $b \in Y$ tais que $0 < |a - b| = \inf\{|x - y| : x \in X, y \in Y\}$.

6. Dê exemplo de conjuntos $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ fechados disjuntos tais que $\inf\{|x - y| : x \in X, y \in Y\} = 0$.

4.9 Leitura Complementar: Caracterização de Conjuntos Compactos

A Definição 4.14 não é a mais geral para caracterização de compactos, pois existe uma teoria matemática sobre certos conjuntos denominados Espaços Topológicos, na qual $\mathbb{R}$ é um exemplo, onde conjunto compacto não é definido como sendo um conjunto fechado e limitado. Este conceito está formalmente colocado no próximo teorema. Então por que definimos compacto em $\mathbb{R}$ como conjunto fechado e limitado? A resposta para esta pergunta é a seguinte: a Definição 4.14 é equivalente ao conceito mais geral relatado acima e mais simples de ser aplicada em $\mathbb{R}$.

Definição 4.15 (Cobertura)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Uma família $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ é dita uma cobertura de X se $X \subseteq \cup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. A cobertura é dita cobertura aberta de X se cada X_λ é um conjunto aberto de $\mathbb{R}$. Se Λ é um conjunto finito, dizemos que $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma cobertura finita de X.

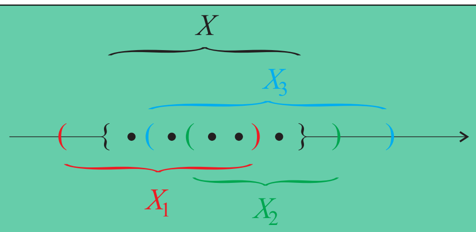

Figura 4.9: $(X_\lambda)_{\lambda=1,2,3}$ é uma cobertura para o conjunto X

Definição 4.16 (Subcobertura)**.** Seja $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma cobertura de $X \subseteq \mathbb{R}$. Se $\Lambda' \subseteq \Lambda$, então dizemos que $(X_{\lambda'})_{\lambda'\in\Lambda'}$ é um subcobertura de $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ se $(X_{\lambda'})_{\lambda'\in\Lambda'}$ é uma cobertura de X.

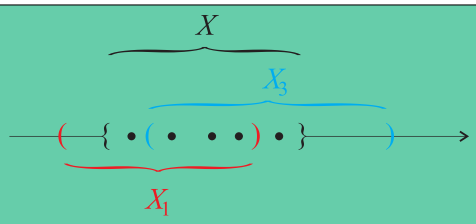

Figura 4.10: $(X_\lambda)_{\lambda=1,3}$ é uma subcobertura da cobertura exposta na Figura anterior

Exemplo 4.42. A família $\left(\left(\frac{1}{n}, 2\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de $(0,1]$, pois $\left(\frac{1}{n}, 2\right)$ é aberto $\forall\, n \in \mathbb{N}$, e $(0,1] \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}, 2\right)$.

Exemplo 4.43. Sejam

$$X_1 = (0, 2/3), X_2 = (1/3, 9/10) \text{ e } X_3 = (1/4, 1).$$

Então $(X_n)_{n\in\{1,2,3\}}$ é uma cobertura aberta de $X = [1/5, 3/4]$, pois $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = (0,1)$. $(X_n)_{n\in\{1,2\}}$ é uma subcobertura de $(X_n)_{n\in\{1,2,3\}}$, já que $X_1 \cup X_2 = (0, 9/10)$.

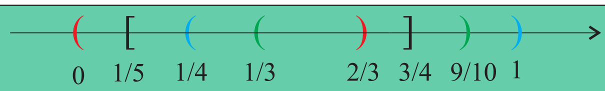

Figura 4.11: Exemplo numérico de cobertura

Vejamos uma outra maneira de definir conjunto compacto em $\mathbb{R}$. Esta é a caracterização que é dada a conjuntos compactos em Espaços Topológicos.

Teorema 4.12 (Teorema de Borel-Lebesgue)**.** *$X \subseteq \mathbb{R}$ é compacto $\Leftrightarrow$ toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura finita.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Primeiramente vamos provar a ida deste Teorema para o compacto $X = [a, b]$. Seja (X_λ) uma cobertura de $[a, b]$, isto é, X_λ é aberto, $\forall\ \lambda$, e $[a, b] \subseteq \cup X_\lambda$. Suponha, por absurdo, que (X_λ) não possui subcobertura finita. Observe que,

$$[a, b] = \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \cup \left[\frac{a+b}{2}, b\right].$$

Com isso, em um destes dois intervalos, descritos na união, (X_λ) não possui subcobertura finita. Denote este intervalo por $[x_1, y_1]$. Note que, de qualquer forma

$$y_1 - x_1 = \frac{b-a}{2}.$$

Aplique este mesmo processo a $[x_1, y_1]$. Dessa forma, obtemos, indutivamente,

$$... \subseteq [x_n, y_n] \subseteq ... \subseteq [x_1, y_1] \subseteq [a, b] \text{ e } y_n - x_n = \frac{b-a}{2^n}, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Pelo Teorema 4.11, existe $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}}[x_n, y_n]$. Por conseguinte,

$$x \in [a, b] \subseteq \cup X_\lambda.$$

Assim sendo, $\exists\ \lambda'$ tal que $x \in X_{\lambda'}$. Como $X_{\lambda'}$ é aberto, então existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq X_{\lambda'}.$$

Seja $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$. Com isso,

$$[x - \delta, x + \delta] \subseteq (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq X_{\lambda'}.$$

Agora, seja $n' \in \mathbb{N}$ tal que $n' > \log_2(\frac{b-a}{\delta})$ (ver Teorema 1.2). Ou seja,

$$y_{n'} - x_{n'} = \frac{b-a}{2^{n'}} < \delta.$$

Dessa forma,

$$x \in [x_{n'}, y_{n'}] \subseteq [x - \delta, x + \delta] \subseteq X_{\lambda'}.$$

Assim, $(X_{\lambda'})$ é uma subcobertura de (X_λ) formada por somente um elemento, pois

$$[x_{n'}, y_{n'}] \subseteq [a, b] \subseteq \cup X_\lambda.$$

Isto contradiz a suposição. Portanto, (X_λ) admite subcobertura finita. Para o caso geral, seja X um conjunto compacto, o qual possui uma cobertura (X_λ). Como X é limitado, então existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $X \subseteq [a, b]$. Consequentemente,

$$[a, b] \subseteq \mathbb{R} = X \cup \mathcal{C}X \subseteq (\cup X_\lambda) \cup \mathcal{C}X,$$

pois $X \subseteq \cup X_\lambda$. Como X é fechado, então pelo Teorema 4.3, $\mathcal{C}X$ é aberto. Por conseguinte, $(X_\lambda, \mathcal{C}X)$ é uma cobertura aberta de $[a, b]$. Pelo que foi feito acima,

$$X \subseteq [a, b] \subseteq X_{\lambda_1} \cup ... \cup X_{\lambda_m} \cup \mathcal{C}X.$$

Por outro lado $X \cap \mathcal{C}X = \emptyset$. Assim, $X \subseteq X_{\lambda_1} \cup ... \cup X_{\lambda_m}$. Ou seja $(X_{\lambda_i})_{i \in \{1,2,...,m\}}$ é uma subcobertura finita de (X_λ).

$\Leftarrow$) Reciprocamente, seja $Y \subseteq X$ um conjunto que não contém pontos de acumulação em X, i.e, $x \in X \Rightarrow x \notin Y'$. Vamos provar que Y é finito. Como $x \notin Y'$ para $x \in X$, então $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap (Y \backslash \{x\}) = \emptyset.$$

Ou seja,

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap Y = \emptyset, \text{ se } x \notin Y \text{ e } (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap Y = \{x\}, \text{ se } x \in Y.$$

Note que,

$$X \subseteq \cup_{x \in X} (x - \varepsilon, x + \varepsilon).$$

Daí, por hipótese, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$X \subseteq \cup_{i=1}^n (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon).$$

Interseptando com Y, temos que

$$Y = Y \cap X \subseteq \cup_{i=1}^n [(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon) \cap Y] \subseteq \cup_{i=1}^m \{x_i\},$$

onde $m \leq n$ é natural. Isto nos garante que Y é finito. Portanto, acabamos de provar que se $Y \subseteq X$ é infinito então Y contém ponto de acumulação em X. Agora, vamos provar que X é compacto. Pelo Teorema 4.10, basta provar que toda sequência em X possui uma subsequência que converge para um ponto de X. Assim sendo, seja (x_n) uma sequência em X. Seja $Y = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$. Se Y é finito, então infinitos termos desta sequência são iguais. Estes termos formam uma subsequência constante, logo, X é compacto. Então, considere que Y é infinito. Portanto, existe $x \in Y'$ tal que $x \in X$ (ver Teroema 4.9). Dessa forma, existe

$$x_{n_1} \in (x-1, x+1) \cap (Y \backslash \{x\}) \neq \emptyset.$$

Suponha, por indução, que estão definidos $n_1 < n_2 < ... < n_k$ tais que

$$x_{n_i} \in \left(x - \frac{1}{i}, x + \frac{1}{i}\right) \cap (Y \backslash \{x\}) \neq \emptyset, \forall\ i = 1, 2, ..., k.$$

Como $x \in Y'$, então existe $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_1 < n_2 < ... < n_k < n_{k+1} \text{ e } x_{n_{k+1}} \in \left(x - \frac{1}{k+1}, x + \frac{1}{k+1}\right) \cap (Y \backslash \{x\}) \neq \emptyset.$$

Logo,

$$n_1 < n_2 < ... < n_k < ... \text{ e } x_{n_k} \in \left(x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k}\right) \cap (Y \backslash \{x\}) \neq \emptyset, \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Pelo Teorema do Sanduíche, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in X$ (ver Exemplo 2.5). Ou seja, X é compacto.

□

Exemplo 4.44. Vimos no Exemplo 4.42 que $((1/n, 2))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de $(0, 1]$. Esta cobertura não possui subcobertura finita. De fato, suponha, por absurdo, que

$$(0, 1] \subseteq (1/n_1, 2) \cup ... \cup (1/n_k, 2),$$

para algum $k \in \mathbb{N}$ e $n_1 < n_2 < ... < n_k$. Logo,

$$(0, 1] \subseteq (1/n_1, 2) \cup ... \cup (1/n_k, 2) = (1/n_k, 2).$$

Mas isto é um absurdo, pois $\frac{1}{n_k+1} \in (0, 1]$ e $\frac{1}{n_k+1} \notin (1/n_k, 2)$. Consequentemente, usando o Teorema de Borel-Lebesgue, temos que $(0, 1]$ não é compacto em $\mathbb{R}$.

Exercícios de Fixação

1. Exiba uma cobertura aberta do intervalo $(1, 2]$ que não possui subcobertura finita. Conclua que $(1, 2]$ não é compacto.

2. Exiba uma cobertura aberta de $\mathbb{N}$ que não possua subcobertura finita. Conclua que $\mathbb{N}$ não é compacto.

3. Exiba uma cobertura aberta de $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ que não possua subcobertura finita. Conclua que $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ não é compacto.

4. Prove usando o Teorema 4.12 que se $Y \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$, onde Y é fechado e X é compacto, então Y é compacto.

4.10 Conclusão

Caro leitor, ao final desta aula, é relevante ter em mente o quanto Topologia é essencial em Matemática. Uma demonstração deste fato está ilustrada na dependência dos conteúdos, explicitados nas aulas seguintes, do que apredemos agora. É importante também estudar em outras referências como os conceitos apresentados neste momento podem ser estendidos para outros espaços denominados Espaços Topológicos (ver [15]).

4.11 Resumo

Nesta aula, apresentamos como verificar se um determinado conjunto, formado por números reais, é aberto, fechado ou compacto, utilizando os conceitos encontrados em teoria elementar de conjuntos, intervalos e principalmente, nos dois últimos casos, a ideia de sequência estabelecida na aula 2. Além disso, fizemos uma ligação entre estes conteúdos e estabelecemos caracterizações que nos possibilitam uma visão mais privilegiada de como se comportam os pontos pertencentes a estes conjuntos.

4.12 Exercícios Propostos

Exercícios:

1. Prove que $\text{int}(X \cup Y) \supseteq \text{int}X \cup \text{int}Y$, $\forall\ X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Sejam $X = (0, 1]$ e $Y = [1, 2)$. Mostre que $\text{int}(X \cup Y) \neq \text{int}X \cup \text{int}Y$.

2. Prove que $\overline{X} = X \cup \text{Fr}X$.

3. Mostre que $\text{Fr}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ e $\text{Fr}\mathbb{N} = \mathbb{N}$.

4. Prove que $\overline{X} \cap \overline{Y} \supseteq \overline{X \cap Y}$, $\forall\ X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Dê exemplo de conjuntos $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ tais que $\overline{X} \cap \overline{Y} \neq \overline{X \cap Y}$.

5. Se $A \subseteq \mathbb{R}$ é aberto e $A = X \cup Y$ é uma cisão, prove que X e Y são abertos.

6. Prove que $\overline{X} = X \cup X'$, $\forall\ X \subseteq \mathbb{R}$. Conclua que X é fechado $\Leftrightarrow X \supseteq X'$.

7. Prove que X' é um conjunto fechado, $\forall\ X \subseteq \mathbb{R}$.

8. Prove que a união finita e a interseção arbitrária de conjuntos compactos é um conjunto compacto.

9. Sejam X, Y conjuntos não-vazios, com X compacto e Y fechado. Prove que existem $a \in X$ e $b \in Y$ tais que $|a - b| \leq |x - y|$, $\forall\ x \in X, y \in Y$.

10. Um conjunto compacto cujos pontos são todos isolados é finito. Dê exemplo de um conjunto X fechado e ilimitado e Y não-fechado e limitado, cujos pontos são todos isolados.

11. Seja X um conjunto compacto. Prove que os seguintes conjuntos também são compactos:

i) $\{x - y : x, y \in X\}$;

ii) $\{xy : x, y \in X\}$;

iii) $\{x/y : x, y \in X\}$, se $0 \notin X$.

12. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto aberto. Se $y \neq 0$, prove que $yX = \{yx : x \in X\}$ é aberto.

13. Sejam X, Y conjuntos abertos. Prove que $X + Y$ e $XY = \{xy : x \in X, y \in Y\}$ são abertos.

14. Se $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$ e Y é fechado, então $\overline{X} \subseteq Y$.

15. Sejam X, Y conjuntos fechados disjuntos tais que $I = X \cup Y$, onde $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo fechado. Prove que $X = \emptyset$ ou e $Y = \emptyset$.

16. Um conjunto X é aberto $\Leftrightarrow X \cap \overline{Y} \subseteq \overline{X \cap Y}$, $\forall\, Y \subseteq \mathbb{R}$.

17. Sejam X compacto e Y aberto tais que $X \subseteq Y$. Mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que $x \in X$, $|y - x| < \varepsilon \Rightarrow y \in Y$.

18. (Teorema de Lindelöf) Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura enumerável.

4.13 Exercícios Resolvidos

Questões Resolvidas:

Ex1. Prove que $\text{int}(X \cap Y) = \text{int}X \cap$ int Y, $\forall\, X, Y \subseteq \mathbb{R}$.

Demonstração. Primeiramente, vamos provar a seguinte inclusão:

$$\text{int}(X \cap Y) \subseteq \text{int}X \cap \text{int}Y.$$

De fato, seja $z \in \text{int}(X \cap Y)$. Portanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(z-\varepsilon, z+\varepsilon) \subseteq X \cap Y.$$

Como $X \cap Y \subseteq X, Y$, então

$$(z-\varepsilon, z+\varepsilon) \subseteq X \text{ e } (z-\varepsilon, z+\varepsilon) \subseteq Y.$$

Dessa forma, $z \in \text{int}X$ e $z \in \text{int}Y$. Consequentemente, $z \in \text{int}X \cap$ $\text{int}Y$. Logo, a inclusão $\text{int}(X \cap Y) \subseteq \text{int}X \cap$ int Y está provada. A inclusão recíproca, $\text{int}(X \cap Y) \supseteq \text{int}X \cap$ int Y, é provada de maneira análoga. Ou seja, considere $a \in \text{int}X \cap$ int Y. Logo, $a \in \text{int}X$ e $a \in$ int Y. Assim, existem $\varepsilon_x, \varepsilon_y > 0$ tais que

$$(a-\varepsilon_x, a+\varepsilon_x) \subseteq X \text{ e } (a-\varepsilon_y, a+\varepsilon_y) \subseteq Y.$$

Seja $\varepsilon = \min\{\varepsilon_x, \varepsilon_y\} > 0$. Desta maneira,

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq (a-\varepsilon_x, a+\varepsilon_x) \subseteq X \text{ e } (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq (a-\varepsilon_y, a+\varepsilon_y) \subseteq Y.$$

Por conseguinte, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq X \cap Y$. Ou seja, $a \in \text{int}(X \cap Y)$. Por fim,

$$\text{int}(X \cap Y) \supseteq \text{int}X \cap \text{int}Y.$$

As duas inclusões provadas resultam na igualdade desejada. □

Ex2. Prove que se $\text{Fr}X = \emptyset$, então $X = \emptyset$ ou $X = \mathbb{R}$.

Demonstração. Se $\text{Fr}X = \emptyset$, então

$$X \cap \text{Fr}X = X \cap \emptyset = \emptyset.$$

Logo, pela Proposição 4.3, X é aberto. Por outro lado, $\text{Fr}X = \emptyset \subseteq X$. Portanto, com a Proposição 4.2, X é fechado. Consequentemente, X é aberto e fechado. Usando o Corolário 4.6, concluímos que $X = \emptyset$ ou $X = \mathbb{R}$. □

Ex3. Prove que $\overline{X} \cup \overline{Y} = \overline{X \cup Y}$, $\forall\ X, Y \subseteq \mathbb{R}$.

Demonstração. Usando o Exemplo 4.1, temos que

$$\mathcal{C}(\overline{X} \cup \overline{Y}) = \mathcal{C}\overline{X} \cap \mathcal{C}\overline{Y} = \operatorname{int}(\mathcal{C}X) \cap \operatorname{int}(\mathcal{C}Y) = \operatorname{int}(\mathcal{C}X \cap \mathcal{C}Y) = \operatorname{int}(\mathcal{C}(X \cup Y)) = \mathcal{C}(\overline{X \cup Y}).$$

Ou equivalentemente, $\overline{X} \cup \overline{Y} = \overline{X \cup Y}$. □

Ex4. Se $A \subseteq \mathbb{R}$ é fechado e $A = X \cup Y$ é uma cisão, prove que X e Y são fechados.

Demonstração. Seja A um conjunto fechado. Seja $(X|Y)$ uma cisão de A. Ou seja,

$$A = X \cup Y, \quad \overline{X} \cap Y = X \cap \overline{Y} = \emptyset.$$

Vamos provar que X é fechado. Seja $x \in \overline{X}$, então existe $(x_n) \subseteq X \subseteq A$ tal que $\lim x_n = x$. Mas A é fechado, assim

$$x \in \overline{A} = A = X \cup Y,$$

ou seja, $x \in X$ ou $x \in Y$. Por outro lado, $\overline{X} \cap Y = \emptyset$, isto é, $x \notin Y$, pois $x \in \overline{X}$. Com isso, $x \in X$. Isto nos diz que $\overline{X} \subseteq X$. Portanto, X é fechado. Analogamente, prova-se que Y é fechado. □

Ex5. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto aberto. Seja $y \in \mathbb{R}$. Prove que o conjunto

$$y + X = \{y + x : x \in X\}$$

é aberto.

Demonstração. Sejam X, um conjunto aberto, e $a \in y + X$. Então, existe $x \in X$ tal que $a = y + x$. Como $x \in X$ e X é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq X$. Vamos provar que

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq y + X.$$

Considere que $z \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Logo, $a - \varepsilon < z < a + \varepsilon$. Como $a = y + x$, então

$$y + x - \varepsilon < z < y + x + \varepsilon.$$

Assim sendo, $x - \varepsilon < z - y < x + \varepsilon$. Daí,

$$z - y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq X,$$

ou seja, $z - y \in X$. Logo, existe $c \in X$ tal que $z - y = c$. Isto nos diz que,

$$z = y + c \in y + X.$$

Dessa forma,

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq y + X.$$

Por fim, $a \in \text{int}(y + X)$. Portanto, $y + X \subseteq \text{int}(y + X)$. Isto é, $y + X$ é aberto. $\square$

Ex6. Sejam K compacto e F fechado, não-vazios. Mostre que existem $k \in K$ e $f \in F$ tais que $|k - f| \leq |x - y|$, $\forall\ x \in K$ e $y \in F$.

Demonstração. Defina

$$d(K, F) = \inf\{|x - y| : x \in K, y \in F\}.$$

Este número real não-negativo é chamado a distância entre os conjuntos K e F. Usando o Exemplo 4.14, concluímos que

$$\inf\{|x - y| : x \in K, y \in F\} \in \overline{\{|x - y| : x \in K, y \in F\}}.$$

Assim sendo, existem $(x_n) \subseteq K$ e $(y_n) \subseteq F$ tais que

$$\lim |x_n - y_n| = d(K, F).$$

Como K é compacto, então, pelo Teorema 4.10, $\exists\ (x_{n_k})$ subsequência de (x_n) tal que

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = k \in K.$$

Por outro lado, utilizando o Teorema 2.2, temos que

$$\lim |x_{n_k} - y_{n_k}| = d(K, F).$$

Observe que

$$|y_{n_k}| = |y_{n_k} - x_{n_k} + x_{n_k}| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k}|,$$

ou seja, (y_{n_k}) é limitada, pois, $(y_{n_k} - x_{n_k})$ e (x_{n_k}) são limitadas (ver Teorema 2.3). Pelo

Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe $(y_{n_{k'}})$ subsequência de (y_{n_k}) tal que

$$\lim_{k'\to\infty} y_{n_{k'}} = f \in \overline{F} = F,$$

pois F é fechado. Portanto,

$$k - f = \lim_{k'\to\infty} x_{n_{k'}} - \lim_{k'\to\infty} y_{n_{k'}} = \lim_{k'\to\infty} [x_{n_{k'}} - y_{n_{k'}}].$$

Portanto,

$$|k-f| = \lim_{k'\to\infty} |x_{n_{k'}} - y_{n_{k'}}| = d(K,F) = \inf\{|x-y| : x \in K, y \in F\} \leq |x-y|, \forall\, x \in K, y \in F.$$

$\square$

Auto-Avaliação

Sou capaz de determinar, se um subconjunto de $\mathbb{R}$ é aberto, fechado ou compacto?

Proxima Aula

Caro leitor, na próxima aula, estenderemos os resultados mais relevantes estudados na aula 2 sobre limites de sequências para uma função real qualquer sobre um conjunto formado por números reais, o qual não necessariamente é o conjunto dos números naturais.

Referências Bibliográficas

[1] Alonso, M.; Finn, E. J., *Física: Um Curso Universitário.* Segunda Edição, São Paulo, Edgard Blücher Ltda, 2009. 481p.

[2] Bartle, R. G.; Sherbert, D. R., *Introdution to Real Analysis*, Third Edition, New York, JohnWiley and Sons,Inc., 2000. 399p.

[3] Boyce, W. E.; DiPrima, R. C., *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.* Seventh Edition, New York, JohnWiley and Sons,Inc, 2001. 745p.

[4] Brasil, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

[5] Brauer, F.; Nohel, J. A., *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations.* University of Wisconsin, 1989.

[6] Dragomir, S. S., *Some Gronwall Type Inequalities and Applications.* Monograph. Victoria University of Technology, 2002.

[7] Ferreira, J., *A Construção dos Números.* Primeira Edição, Rio de Janeiro, SBM, 2010. 133p.

[8] Figueiredo, D., *Análise I.* Segunda Edição, Rio de Janeiro, LTC, 2008. 266p.

[9] Guillemin, V.; Pollack, A., *Differential Topology.* First Edition, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1974. 227p.

[10] King, A.C.; Billingham, J.; OTTO, S.R., *Differential Equations.* Linear, Nonlinear, Ordinary, Partial. Cambridge University Press. New York, 2003.

[11] Lima, E. L., *Análise Real.* Funções de uma variável, vol.1. 8º. ed. Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[12] Lima, E. L., *Análise Real,* vol.2. Rio de Janeiro, 2004.

[13] Lima, E. L., *Curso de Análise*, vol. 1, Décima Segunda Edição, Rio de Janeiro, IMPA, 2008. 431p.

[14] Melo, W., *Existência de soluções clássicas para as Equações de Burgers e Navier-Stokes.* Dissertação de Mestrado. UFPE, 2007.

[15] Munkres, J. R., *Topology.* Second Edition, New Jersey, Prentice Hall, Inc., 2000. 552p.

[16] Nolt, J.; Rohatys, D.; Varzi, A., *Theory and problems or logic.* Second edition, New York, McGraw-Hill, 2009. 279p.

[17] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis.* Third Edition, New York, McGraw-Hill, Inc., 1976. 351p.

[18] Smoller, J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations.* 2nd ed., Springer-Verlag, 1994.

[19] Tveito, A.; Winther, R., *Introduction to Partial Differential Equations.* A Computational Approach. New York, 1961.

Professor Revisor

Professor Paulo de Souza Rabelo