Capítulo 5

Quinta Aula: Limites de Funções Reais

Meta

Apresentar como verificar se o limite de uma função real existe ou não. Além disso, definir e exemplificar limites infinitos e no infinito.

Objetivos

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de identificar a existência de um limite e calculá-lo, quando for possível.

Pré-requisitos

Aula 4, Fundamentos da Matemática e Cálculo II.

5.1 Introdução

Nesta aula, aprenderemos como é possível estender o conceito de limite de uma sequência para funções reais sobre qualquer subconjunto formado também por números reais. Lembre que, uma sequência, nada mais é, que uma função real definida no conjunto dos números naturais, e que, além disso, o limite de uma sequência sempre é estudado quando $n \to \infty$. A pergunta que devemos fazer é: como generalizar tal condição? A resposta para esta pergunta está na aula 4. Faremos a substituição de ∞ por um ponto de acumulação do domínio da função a qual queremos estudar o limite, já que tender a infinito é uma propriedade semelhante a se aproximar de um ponto de acumulação. Com a nova definição de limite, procuraremos estabelecer resultados análogos aos encontrados na aula 2, como, por exemplo, o Teorema do Sanduíche. Definimos também limites laterais que estão diretamente relacionados a pontos de acumulação laterais, os quais estão definidos e exemplificados na aula anterior. Para finalizar, estudaremos também os conceitos de limites no infinito e infinito.

5.2 Limites de Funções Reais e Exemplos

Nesta seção, estenderemos o conceito de limite de uma sequência. Prentendemos utilizar a definição de ponto de acumulação. Caso o leitor esteja esquecido destes conceitos, recomendamos que retorne e busque tais conhecimentos na aula 4 do nosso material. Por fim, exibiremos teoremas de extrema relevância para limites como, por exemplo, os Teorema do Sanduíche e Permanência de Sinal.

Definição 5.1 (Limite de Funções)**.** Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real, onde $X \subseteq \mathbb{R}$. Seja $y \in X'$. Dizemos que $l \in \mathbb{R}$ é o limite de $f(x)$ quando x tende a y, se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ que satisfaz $0 < |x - y| < \delta$, tem-se $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Neste caso, escrevemos $\lim_{x \to y} f(x) = l$.

Obs 5.1. Observe que δ depende somente de ε, ou seja, $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Obs 5.2. Na Definição 5.1, $0 < |x - y| < \delta$ significa dizer que $x \in (y - \delta, y + \delta)$ e $x \neq y$. Isto é, não importa o que ocorre no ponto $y \in X'$, interessa somente o que ocorre próximo a y. Além disso, y não necessariamente está em X.

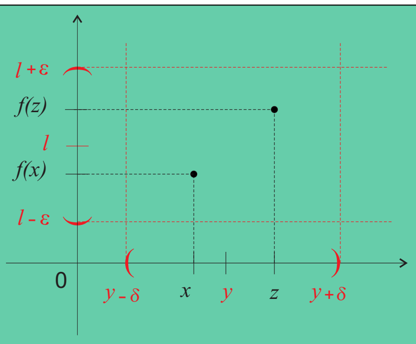

Figura 5.1: Limite

Obs 5.3. Segue diretamente da Definição 5.1 que

$$\lim_{x\to y} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to y}(f(x) - l) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to y} |f(x) - l| = 0.$$

O próximo exemplo nos garante que o limite de uma constante é a própria constante.

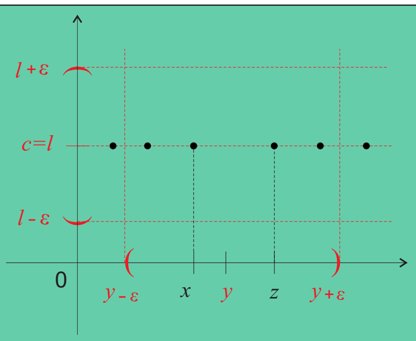

Figura 5.2: Limite da constante

Exemplo 5.1 (Limite da Constante)**.** Seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = c, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Vamos verificar que $\lim_{x\to y} f(x) = c$. De fato, dado $\varepsilon > 0$ considere $\delta = \varepsilon > 0$. Assim, para todo $x \in \mathbb{R}$ com $0 < |x - y| < \varepsilon$, temos que

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

Logo, $\lim_{x\to y} f(x) = c$. Observe que o δ acima poderia ser qualquer número positivo.

O exemplo abaixo nos mostra a importância de entendermos o significado da palavra tender na Definição 5.1.

Exemplo 5.2. Vejamos como mostrar, através da Definição 5.1, que $\lim_{x\to 2}(x^2+4x) = 12$. Para este fim, considere que ε é um número real positivo. Note, primeiramente, que

$$|x^2+4x-12| = |(x-2)(x+6)| = |x-2||x+6|.$$

Desejamos provar que $|x^2+4x-12| < \varepsilon$, ou seja,

$$|x-2||x+6| < \varepsilon, \tag{5.1}$$

sempre que $|x-2| < \delta$ (aqui δ é um número positivo ao qual devemos encontrar). Assim sendo, o termo que dificulta a determinação de δ é $|x+6|$. Caso esta expressão não estivesse na desigualdade (5.1), poderíamos escolher $\delta = \varepsilon$. Dessa forma, para δ suficientemente pequeno, verificaremos que é possível determinar uma constante $C > 0$ tal que $|x+6| < C$, sempre que $|x-2| < \delta$. Com efeito, seja $\delta \in (0,1)$. Com isso,

$$|x-2| < \delta < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1 \Rightarrow -1+8 < x-2+8 < 1+8 \Rightarrow 7 < x+6 < 9$$

$$\Rightarrow -9 < x+6 < 9 \Rightarrow |x+6| < 9.$$

Deste modo, basta tomar $C = 9$. É importante ressaltar que a existência deste C deve-se ao fato de estarmos tendendo a 2. Portanto, se $|x-2| < \delta$, tem-se que

$$|x^2+4x-12| = |(x-2)(x+6)| = |x-2||x+6| < 9|x-2| < 9\delta.$$

Por fim, para $0 < \delta < \min\{1, \varepsilon/9\}$ e $|x-2| < \delta$, encontramos

$$|x^2+4x-12| < 9\delta < 9\frac{\varepsilon}{9} = \varepsilon.$$

Isto nos diz que $\lim_{x\to 2}(x^2+4x) = 12$.

Exemplo 5.3. Afirmamos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln x} = 0,$$

ver Definição 10.1. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \mathrm{e}^{-\frac{1}{\varepsilon}} > 0$ tal que para todo $x \in (0,\infty)$ com

$x \in (-\delta, \delta)$, tem-se $x \in (0, \delta)$, logo,

$$0 < x < \delta = \mathrm{e}^{-\frac{1}{\varepsilon}} < 1.$$

Portanto, $\ln x < \ln 1 = 0$ e

$$\ln x < \ln(\mathrm{e}^{-\frac{1}{\varepsilon}}) = -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Com isso, $|\ln x| = -\ln x > \frac{1}{\varepsilon}$. Consequentemente,

$$\left|\frac{1}{\ln x} - 0\right| = \left|\frac{1}{\ln x}\right| = \frac{1}{|\ln x|} < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\ln x} = 0.$$

O resultado a seguir nos informa, em palavras, que o limite de um módulo é o módulo do limite.

Proposição 5.1. *Se* $\lim_{x \to y} f(x) = l$, *então* $\lim_{x \to y} |f(x)| = |l|$.

Demonstração. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ com $0 < |x-y| < \delta$, tem-se

$$||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l| < \varepsilon,$$

ver Teorema 1.5. Logo, $\lim_{x \to y} |f(x)| = |l|$. □

A recíproca deste resultado é falsa. De fato, defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \mathrm{sgn}(x), \forall\, x \in \mathbb{R},$$

isto é,

$$f(x) = 1, \text{ se } x \geq 0 \text{ e } f(x) = -1, \text{ se } x < 0.$$

f é denominada função sinal. É fácil ver que

$$\lim_{x \to 0} |f(x)| = \lim_{x \to 0} 1 = 1 = |1|,$$

mas $\lim_{x \to 0} f(x) \neq 1$, pois próximo a 0 é sempre possível encontrar números onde f assume o valor -1.

Vejamos que é possível fazermos uma substituição de variável para calcularmos um limite.

Proposição 5.2. *Sejam* $f : X \to \mathbb{R}$ *e* $y \in X'$. *Assim,*

$$\lim_{x\to y} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(y+h) = l.$$

Demonstração. Considere o conjunto

$$Y = \{h \in \mathbb{R} : y + h \in X\}.$$

Como $y \in X'$, então $\exists\ (x_n) \subseteq X\backslash\{y\}$ tal que $\lim x_n = y$. Seja

$$h_n = x_n - y \in Y\backslash\{0\}, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$\lim h_n = \lim(x_n - y) = 0,$$

ou seja, $0 \in Y'$. Dessa forma, os limites acima fazem total sentido.

$\Rightarrow$) Se $\lim\limits_{x\to y} f(x) = l$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ com $0 < |x - y| < \delta$, conclui-se que

$$|f(x) - l| < \varepsilon.$$

Assim, para $0 < |h| < \delta$, temos que $0 < |y + h - y| < \delta$. Consequentemente,

$$|f(y+h) - l| < \varepsilon,$$

ou seja, $\lim\limits_{h\to 0} f(y+h) = l$.

$\Leftarrow$) Reciprocamente, se

$$\lim_{h\to 0} f(y+h) = l,$$

então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $h \in Y$ com $0 < |h| < \delta$, obtem-se

$$|f(y+h) - l| < \varepsilon.$$

Com isso, se $x \in X$ e $0 < |x - y| < \delta$, temos que

$$|f(x) - l| = |f(y + x - y) - l| < \varepsilon,$$

Isto é, $\lim\limits_{x \to y} f(x) = l$. $\square$

Exemplo 5.4. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$, para todo $x \in X$. Vamos mostrar que

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x),$$

ou seja, $\lim\limits_{h \to 0}(x+h) = x$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \varepsilon > 0$ tal que para todo $x + h \in X$ com $0 < |h| < \delta$, tem-se

$$|x + h - x| = |h| < \delta = \varepsilon,$$

isto é,

$$\lim_{h \to 0}(x+h) = x.$$

Portanto, pela Proposição 5.2, $\lim\limits_{x \to y} x = y$. Por fim, $\lim\limits_{x \to y} f(x) = f(y)$.

Teorema 5.1. *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X'$. Considere que*

$$\lim_{x \to y} f(x) = l \text{ e } \lim_{x \to y} g(x) = m.$$

Se $l < m$, então $\exists\, \delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ com $0 < |x - y| < \delta$, obtem-se $f(x) < g(x)$.

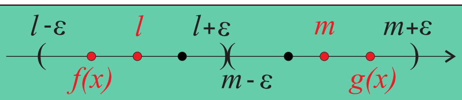

Figura 5.3: Ideia da demonstração

Demonstração. Se $l < m$, então $\varepsilon = \dfrac{m-l}{2} > 0$. Portanto, $\varepsilon + l = m - \varepsilon$. Como

$$\lim_{x \to y} f(x) = l \text{ e } \lim_{x \to y} g(x) = m,$$

então existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que para todo $x \in X$ com $0 < |x - y| < \delta_1$, encontra-se

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

e para todo $x \in X$ com $0 < |x - y| < \delta_2$, chega-se a

$$|g(x) - m| < \varepsilon.$$

Considere $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Com isso, usando a Observação 1.12, para todo $x \in X$ com $0 < |x - y| < \delta \leq \delta_1, \delta_2$, temos que

$$f(x) < \varepsilon + l = m - \varepsilon < g(x).$$

□

Obs 5.4. No Teorema 5.1, nada pode ser afirmado se $l \leq m$. Por exemplo, sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = x \text{ e } g(x) = 0, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Assim, para todo $\delta > 0$, existem $x_1 \in (-\delta, 0)$ e $x_2 \in (0, \delta)$ tais que

$$f(x_1) = x_1 < 0 = g(x_1) \text{ e } f(x_2) = x_2 > 0 = g(x_2).$$

Mesmo sendo, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.

Corolário 5.2. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X'$. Se $\lim\limits_{x \to y} f(x) < m$, então $\exists\ \delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ com $0 < |x - y| < \delta$, conclui-se que $f(x) < m$.*

Demonstração. Seja $g : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = m, \forall\ x \in X.$$

Então,

$$\lim_{x \to y} f(x) < \lim_{x \to y} g(x) = m.$$

Usando o Teorema 5.1, concluímos que $\exists\ \delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ com $0 < |x - y| < \delta$, infere-se que $f(x) < g(x) = m$. □

Obs 5.5. É fácil ver que no Corolário 5.2 o sinal $<$ na primeira e última desigualdades pode ser substituído por $>$.

O resultado abaixo nos diz que próximo a um ponto de acumulação, onde estamos questionando algum limite, a função permanece com mesmo sinal de seu limite.

Corolário 5.3 (Permanência de Sinal)**.** *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X'$. Se $\lim\limits_{x \to y} f(x) < 0$, então $\exists\ \delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ com $0 < |x - y| < \delta$, conclui-se que $f(x) < 0$.*

Demonstração. Basta tomar $m = 0$ no Corolário 5.2. $\square$

Obs 5.6. Veja que no Corolário 5.3 o sinal $<$ na primeira e última desigualdades pode ser substituído por $>$.

Abaixo estabelecemos em que situação podemos passar o limite sobre uma desigualdade entre funções.

Corolário 5.4. *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X'$. Se existe $\delta_0 > 0$ tal que*

$$f(x) \leq g(x), \forall\ x \in X,$$

com $0 < |x - y| < \delta_0$. Então,

$$\lim_{x \to y} f(x) \leq \lim_{x \to y} g(x),$$

caso estes limites existam.

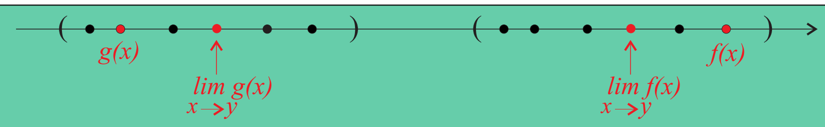

Figura 5.4: Ideia da demonstração

Demonstração. Suponha, por absurdo, que

$$\lim_{x \to y} f(x) > \lim_{x \to y} g(x).$$

Usando o Teorema 5.1, concluímos que $\exists\ \delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ com $0 < |x - y| < \delta$, temos que $g(x) < f(x)$. Seja $\delta_1 = \min\{\delta, \delta_0\}$. Assim sendo, para todo $x \in X$ com

$$0 < |x - y| < \delta_1 \leq \delta, \delta_0,$$

tem-se

$$g(x) < f(x) \text{ e } f(x) \leq g(x).$$

Contradição! $\square$

Agora estamos prontos para demonstrar o Teorema do Sanduíche para funções reais quaisquer.

Teorema 5.5 (Teorema do Sanduíche)**.** *Sejam* $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ *funções e* $y \in X'$*. Se*

$$\lim_{x \to y} f(x) = \lim_{x \to y} g(x)$$

e existe $\lambda > 0$ *tal que*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \forall\ x \in X \ \textit{com}\ 0 < |x - y| < \lambda.$$

Então,

$$\lim_{x \to y} h(x) = \lim_{x \to y} f(x) = \lim_{x \to y} g(x).$$

Demonstração. Considere que

$$\lim_{x \to y} f(x) = \lim_{x \to y} g(x) = m.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$ existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que para todo $x \in X$, com $0 < |x - y| < \delta_1$, conclui-se que

$$|f(x) - m| < \varepsilon.$$

E para todo $x \in X$, com $0 < |x - y| < \delta_2$, encontramos

$$|g(x) - m| < \varepsilon.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \lambda\} > 0$. Usando a Observação 1.12 e a hipótese, temos que para todo $x \in X$, com $0 < |x - y| < \delta \leq \delta_1, \delta_2, \lambda$, chega-se a seguinte conclusão

$$m - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < m + \varepsilon.$$

Logo,

$$\lim_{x \to y} h(x) = m = \lim_{x \to y} f(x) = \lim_{x \to y} g(x).$$

□

Abaixo exporemos como aplicar o Teorema 5.5 para calcular limites envolvendo as funções seno e cosseno.

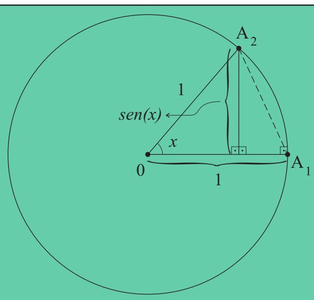

Figura 5.5: Representação geométrica do seno

Exemplo 5.5. Interpretando a figura acima, mostraremos que

$$|\text{sen}x| \leq |x|, \forall\ x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Com efeito, sejam T_1 e T_2 as áreas do triângulo ΔA_1OA_2 e do setor circular A_1OA_2. Assim sendo, para $x \in (0, \pi/2)$, encontramos

$$T_1 = \frac{|\overline{OA_1}| \cdot \text{sen}x}{2} = \frac{\text{sen}x}{2} \text{ e } T_2 = \frac{x}{2},$$

pois a circunferência trigonométrica, exposta na figura acima, tem raio 1. Além disso, através da mesma figura, inferimos

$$T_1 \leq T_2, \text{ isto é, sen}x \leq x,$$

onde $x \in (0, \pi/2)$. Por outro lado, se $x \in (-\pi/2, 0)$, obtemos

$$|\text{sen}x| = |-\text{sen}x| = |\text{sen}(-x)| = \text{sen }(-x) \leq -x = |x|,$$

para $x \in (-\pi/2, 0)$. Portanto,

$$|\text{sen}x| \leq |x|, \forall\ x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|\text{sen}(x+h) - \text{sen}x| &= |2\text{sen}[(1/2)h]\text{cos}[1/2(2x+h)]| \\
&\leq 2|\text{sen}[(1/2)h]||\text{cos}[1/2(2x+h)]| \\
&\leq 2|\text{sen}[(1/2)h]| \\
&\leq |h|,
\end{aligned}$$

onde h é suficientemente pequeno. Por conseguinte, usando o Teorema do Sanduíche,

$$\lim_{h\to 0} |\text{sen}(x+h) - \text{sen}x| = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{h\to 0} \text{sen}(x+h) = \text{sen}x.$$

Usando a Proposição 5.2, temos que

$$\lim_{x\to y} \text{sen}x = \text{sen}y.$$

Na verdade, usando o Teorema 7.13, provaremos que

$$|\text{sen}x| \leq x, \forall\ x \geq 0,$$

ver Exemplo 7.32. Da mesma maneira que foi feito acima, chegamos a seguinte desigualdade:

$$|\text{sen}x| \leq |x|, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 5.6. Analogamente ao exemplo anterior, tem-se que

$$|\cos(x+h) - \cos x| \ = \ |-2\text{sen}[(1/2)(2x+h)]\text{sen}[(1/2)h]| \ \leq \ 2(1/2)|h| \ = \ |h|,$$

para h suficientemente pequeno. Portanto,

$$|\cos(x+h) - \cos x| \leq |h|.$$

Daí, pelo Teorema do Sanduíche,

$$\lim_{h\to 0} \cos(x+h) = \cos x.$$

Utilizando a Proposição 5.2, concluímos que

$$\lim_{x\to y} \cos x = \cos y.$$

Vejamos uma outra maneira de definir limites de funções.

Teorema 5.6 (Caracterização de Limite)**.** *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X'$. Então,*

$$\lim_{x\to y} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\ (x_n) \subseteq X\backslash\{y\},\ \textit{com}\ \lim x_n = y,\ \textit{tem-se que}\ \lim f(x_n) = l.$$

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja $(x_n) \subseteq X\backslash\{y\}$ tal que $\lim x_n = y$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ temos que existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ com $0 < |x-y| < \delta$, chegamos a seguinte desigualdade:

$$|f(x) - l| < \varepsilon,$$

pois $\lim\limits_{x\to y} f(x) = l$. Como $\lim x_n = y$, então $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, tem-se

$$0 < |x_n - y| < \delta,\ \text{com}\ N = N(\delta).$$

Com isso, para todo $n \geq N$, conclui-se que $|f(x_n) - l| < \varepsilon$. Ou seja,

$$\lim f(x_n) = l.$$

$\Leftarrow$) Suponha, por contraposição, que $\lim\limits_{x\to y} f(x) \neq l$. Assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall\ \delta > 0$, encontra-se $x_\delta \in X$ tal que

$$0 < |x_\delta - y| < \delta \text{ e } |f(x_\delta) - l| \geq \varepsilon.$$

Considere os seguintes valores para δ :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...,$$

com $n \in \mathbb{N}$ para obter $x_n \in X$ tal que

$$0 < |x_n - y| < \frac{1}{n} \text{ e } |f(x_n) - l| \geq \varepsilon.$$

Portanto, utilizando o Teorema do Sanduíche, $(x_n) \subseteq X\backslash\{y\}$, $\lim x_n = y$ e

$$|f(x_n) - l| \geq \varepsilon,$$

ver Exemplo 2.5. Se $\lim f(x_n) = l$, então

$$0 = \lim |f(x_n) - l| \geq \varepsilon,$$

ver Corolário 5.4, ou seja, $\varepsilon \leq 0$. Contradição! Assim sendo, $\lim f(x_n) \neq l$. □

O Teorema 5.6 nos ajuda a mostrar, de uma maneira mais simples, a inexistência de alguns limites. Veja o exemplo abaixo.

Exemplo 5.7. Sejam $X = \mathbb{R}^*$ e $f : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \cos(1/x), \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Vamos verificar que

$$\lim_{x \to 0} \cos(1/x) \text{ não existe.}$$

De fato, seja $x_n = 1/(n\pi), \forall\ n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\lim x_n = \lim \frac{1}{n\pi} = \frac{1}{\pi} \lim \frac{1}{n} = 0.$$

Porém,

$$\lim \cos(1/x_n) = \lim \cos(n\pi) \text{ não existe,}$$

pois $(\cos(n\pi)) = (-1, 1, -1, 1, ...)$ (ver Teorema 2.2). Dessa forma, utilizando o Teorema 5.6 temos que

$$\lim_{x \to 0} \cos(1/x) \text{ não existe.}$$

Corolário 5.7 (Unicidade)**.** *Se o limite de uma função real existe este é único.*

Demonstração. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X'$. Considere que

$$\lim_{x \to y} f(x) = l \text{ e } \lim_{x \to y} f(x) = m.$$

Vamos provar que $l = m$. Como $y \in X'$, então existe $(x_n) \subseteq X \backslash \{y\}$ tal que $\lim x_n = y$. Daí, pelo Teorema 5.6,

$$\lim f(x_n) = l \text{ e } \lim f(x_n) = m.$$

Usando a unicidade de limite de sequências (ver Teorema 2.1), concluímos que $l = m$. □

Exercícios de Fixação

1. Mostre que:

i) $\lim_{x \to 2} \frac{1}{1-x} = -1$;

ii) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{|x|} = 0$;

iii) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} = \frac{1}{2}$.

2. Utilize a Definição 5.1 para mostrar que $\lim_{x \to -1} \frac{x+5}{2x+3} = 4$.

3. Mostre que os seguintes limites não existem:

i) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ $(x > 0)$;

ii) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}}$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$, se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$, se $x \notin \mathbb{Q}$. Mostre que $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe.

5.3 Operações Elementares com Limites de Funções Reais

Reservamos esta seção para trabalharmos com as operações mais elementares envolvendo limites. E deixamos para o fim definir e exemplificar funções localmente limitadas, com o intuito de obtermos um resultado para funções reais análogo ao Teorema 2.3.

Teorema 5.8 (Operações com Limites)**.** *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X'$. Caso $\lim_{x \to y} f(x)$ e $\lim_{x \to y} g(x)$ existam, os seguintes itens são verdadeiros:*

i) $\lim\limits_{x\to y}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to y} f(x) + \lim\limits_{x\to y} g(x)$,

ii) $\lim\limits_{x\to y}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to y} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to y} g(x)$,

iii) $\lim\limits_{x\to y}[f(x)/g(x)] = [\lim\limits_{x\to y} f(x)]/[\lim\limits_{x\to y} g(x)]$, *se* $\lim\limits_{x\to y} g(x) \neq 0$,

Obs 5.7. O Teorema 5.8 nos diz que:

i) o limite de uma soma é a soma dos limites;

ii) o limite de um produto é o produto dos limites;

iii) o limite de uma divisão é a divisão dos limites (caso o denominador seja não-nulo),

sempre que os limites relatados existem.

Demonstração. Seja $(x_n) \subseteq X\backslash\{y\}$ com $\lim x_n = y$. Como $\lim\limits_{x\to y} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to y} g(x)$ existem, então, pelo Teorema 5.6, obtemos

$$\lim f(x_n) = \lim_{x\to y} f(x) \text{ e } \lim g(x_n) = \lim_{x\to y} g(x).$$

Pelas operações estabelecidas no Teorema 2.11, concluímos que

i) $\lim[f(x_n)+g(x_n)] = \lim f(x_n) + \lim g(x_n) = \lim\limits_{x\to y} f(x) + \lim\limits_{x\to y} g(x)$;

ii) $\lim[f(x_n)\cdot g(x_n)] = \lim f(x_n)\cdot \lim g(x_n) = \lim\limits_{x\to y} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to y} g(x)$;

iii) $\lim[f(x_n)/g(x_n)] = [\lim f(x_n)]/[\lim g(x_n)] = [\lim\limits_{x\to y} f(x)]/[\lim\limits_{x\to y} g(x)]$,

se $\lim g(x_n) = \lim\limits_{x\to y} g(x) \neq 0$.

Com isso, novamente pelo Teorema 5.6, obtemos

i) $\lim_{x\to y}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to y} f(x) + \lim_{x\to y} g(x)$;

ii) $\lim_{x\to y}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to y} f(x) \cdot \lim_{x\to y} g(x)$;

iii) $\lim_{x\to y}[f(x)/g(x)] = [\lim_{x\to y} f(x)]/[\lim_{x\to y} g(x)]$;

□

Obs 5.8. Quando $\lim_{x\to y} g(x)$ existe e $f(x) = k$ (constante), $\forall\ x \in X$, então

$$\lim_{x\to y} f(x)g(x) = \lim_{x\to y} kg(x) = \lim_{x\to y} k \lim_{x\to y} g(x) = k \lim_{x\to y} g(x),$$

ver Exemplo 5.1.

Obs 5.9. Observe que quando $\lim_{x\to y} f(x)$ e $\lim_{x\to y} g(x)$ existem, então os itens **i)** e **ii)** do Teorema 5.8, nos garantem que

$$\lim_{x\to y}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to y}\{f(x)+[-g(x)]\} = \lim_{x\to y} f(x) + \lim_{x\to y}[-g(x)] = \lim_{x\to y} f(x) - \lim_{x\to y} g(x).$$

Obs 5.10. Pode-se provar, por indução, que

$$\lim_{x\to y}[f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)] = \lim_{x\to y} f_1(x) + \lim_{x\to y} f_2(x) + ... + \lim_{x\to y} f_n(x)$$

e também que,

$$\lim_{x\to y}[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot ... \cdot f_n(x)] = \lim_{x\to y} f_1(x) \cdot \lim_{x\to y} f_2(x) \cdot ... \cdot \lim_{x\to y} f_n(x),$$

quando $\lim_{x\to y} f_i(x)$ existe, $\forall\ i = 1, 2, ..., n$.

Exemplo 5.8 (Limite de Polinômio)**.** Vimos que $\lim_{x\to y} x = y$. Assim, da observação anterior, chegamos a

$$\lim_{x\to y} x^n = \lim_{x\to y} x\cdot ... \cdot x = \lim_{x\to y} x \cdot ... \cdot \lim_{x\to y} x = y \cdot ... \cdot y = y^n.$$

Portanto, usando os itens **i)** e **ii)** do Teorema 5.8, obtemos

$$\lim_{x\to y}[a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0] \quad = \quad \lim_{x\to y} a_nx^n + \lim_{x\to y} a_{n-1}x^{n-1} + ... + \lim_{x\to y} a_1x + \lim_{x\to y} a_0$$

$$= \quad a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + ... + a_1 y + a_0.$$

Com isso, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função polinômial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

então $\lim\limits_{x \to y} f(x) = f(y)$.

Definição 5.2 (Função Localmente Limitada)**.** Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é limitada em uma vizinhança de $y \in X'$ se existem $\delta > 0$ e $m \in \mathbb{R}$ tais que

$$|f(x)| \leq m, \forall\ x \in (y - \delta, y + \delta) \cap X.$$

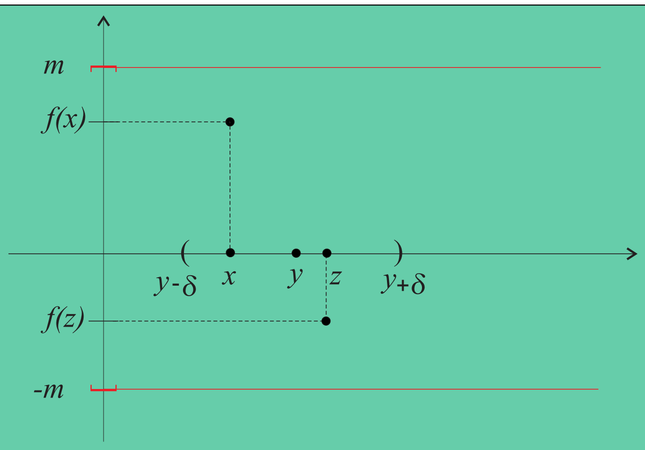

Figura 5.6: Função localmente limitada

Exemplo 5.9. Seja $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \cos(1/x), \forall\ x \in \mathbb{R}^*.$$

Sabemos que

$$-1 \leq \cos(1/x) \leq 1, \forall\ x \in \mathbb{R}^*.$$

Logo, f é uma função limitada em uma vizinhança de 0, basta considerar $\delta = 1 > 0$.

Exemplo 5.10. Seja $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = 1/x, \forall\ x \in \mathbb{R}_+.$$

f não é limitada em uma vizinhança de 0. Suponha, por absurdo, que existem $\delta > 0$ e $m \in \mathbb{R}$ tais que

$$|f(x)| \leq m, \forall\ x \in (-\delta, \delta) \cap \mathbb{R}_+ = (0, \delta).$$

Sabemos que existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que $N_1 > m$ e $N_2 > 1/\delta$ (ver Teorema 1.2). Seja $N = \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$. Assim,

$$N \geq N_1 > m \text{ e } N \geq N_2 > 1/\delta.$$

Por conseguinte, $N > m$ e $0 < 1/N < \delta$. Por outro lado,

$$m < N = |N| = |f\,(1/N)| \leq m.$$

Contradição!

Mostraremos, logo a seguir, que o limite do produto de uma função que tende a zero por outra localmente limitada é também zero.

Corolário 5.9. *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X'$. Se $\lim\limits_{x \to y} f(x) = 0$ e g é limitada em uma vizinhança de y. Então, $\lim\limits_{x \to y} f(x)g(x) = 0$.*

Demonstração. Como g é limitada nunha vizinhança de $y \in X'$, então existem $\delta > 0$ e $m \in \mathbb{R}$ tais que

$$|g(x)| \leq m, \forall\ x \in (y - \delta, y + \delta) \cap X.$$

Por outro lado, $\lim\limits_{x \to y} f(x) = 0$. Assim, pelo Teorema 5.6, $\forall\ (x_n) \subseteq X \backslash \{y\}$ com $\lim x_n = y$, obtemos $\lim f(x_n) = 0$. Portanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, tem-se $x_n \in (y - \delta, y + \delta)$. Logo,

$$|g(x_n)| \leq m, \forall\ n \geq N,$$

pois

$$x_n \in (y - \delta, y + \delta) \cap X, \forall\ n \geq N.$$

Usando o Teorema 2.9, $\lim f(x_n)g(x_n) = 0$. Consequentemente, $\lim\limits_{x \to y} f(x)g(x) = 0$ (ver Teorema 5.6). □

Exemplo 5.11. Como a função definida por $\cos(1/x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^*$, é limitada em uma vizinhança de 0 e $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, então, usando o Teorema 5.9, chegamos a

$$\lim_{x\to 0} x\cos(1/x) = 0.$$

Observe que $\lim\limits_{x\to 0} \cos(1/x)$ não existe (ver Exemplo 5.7).

O próximo resultado estabelece uma forma análoga para o Teorema 2.3 enunciado na aula 2.

Teorema 5.10. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X'$. Considere que $\lim\limits_{x\to y} f(x)$ existe. Então, f é limitada em uma vizinhança de y.*

Demonstração. Seja $\lim\limits_{x\to y} f(x) = l$. Dado $\varepsilon = 1 > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X$,

$$0 < |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < 1.$$

Usando o Teorema 1.5, temos que

$$||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l| < 1.$$

Ou seja, $-1 < |f(x)| - |l| < 1$. Portanto,

$$|f(x)| < 1 + |l|, \forall\ x \in (y - \delta, y + \delta) \cap (X \backslash \{y\}).$$

Se $y \notin X$, faça $m = 1 + |l|$. Se $y \in X$, faça $m = \max\{1 + |l|, |f(y)|\}$. De qualquer maneira,

$$|f(x)| \leq m, \forall\ x \in (y - \delta, y + \delta) \cap X.$$

Ou seja, f é limitada em uma vizinhança de y. $\square$

Vejamos como utilizar a contrapositividade do Teorema 5.10.

Exemplo 5.12. Vimos que a função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = 1/x, \forall\ x \in \mathbb{R}_+,$$

não é limitada em uma vizinhança de 0. Com isso, pelo Teorema 5.10,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 1/x$$

não existe.

Exercícios de Fixação

1. Determine os seguintes limites:

i) $\lim_{x\to 1}(x+1)(2x+3)$;

ii) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+2}{x^2-2}$.

2. Determine os seguintes limites:

i) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$, $x > 0$;

ii) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$, $x > 0$.

3. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$. Mostre a desigualdade $-x^2 \leq x^n \leq x^2$, $\forall\, x \in (-1,1)$. Use o fato que $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ para concluir que $\lim_{x\to 0} x^n = 0$.

4. Encontre o limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+3x}}{x+2x^2}$, onde $x > 0$.

5. Dê exemplos de funções f, g tais que $\lim_{x\to y} f(x)$ e $\lim_{x\to y} g(x)$ não existem, mas $\lim_{x\to y}[f(x)+g(x)]$ e $\lim_{x\to y} f(x)g(x)$ existem.

5.4 Limites Laterais de Funções Reais

Caro leitor, para o estudo de limites laterais, faz-se necessário lembrarmos as definições e resultados obtidos na seção 4.7. Nesta, trabalhamos com pontos de acumulação laterais, os quais são imprescindíveis nas definições a seguir.

Definição 5.3 (Limite Lateral à Direita)**.** Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma aplicação e $y \in X'_+$. Dizemos que o limite à direita de $f(x)$ quando x tende a y é l, se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{para todo } x \in X \cap (y, y+\delta), \text{ tem-se } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \to y^+} f(x) = l.$$

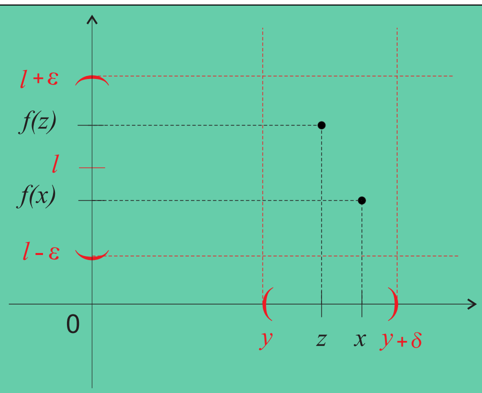

Figura 5.7: Limite à direita

Definição 5.4 (Limite Lateral à Esquerda)**.** Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $y \in X'_-$. Dizemos que o limite à esquerda de $f(x)$ quando x tende a y é l, se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{para todo } x \in X \cap (y-\delta, y), \text{ tem-se } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \to y^-} f(x) = l.$$

Proposição 5.3. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função, $y \in X'_+$, $Y = X \cap (y, \infty)$ e $g = f|_Y : Y \to \mathbb{R}$, dada por*

$$g(y) = f(y), \forall\ y \in Y.$$

Logo,

$$\lim_{x \to y^+} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to y} g(x) = l.$$

Demonstração. Observe que, usando a Definição 5.3, os seguinte itens são equivalentes:

i) $\lim\limits_{x\to y^+} f(x) = l$;

ii) $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tal que $\forall\, x \in X \cap (y, y+\delta)$, tem-se $|f(x) - l| < \varepsilon$;

iii) $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tal que $\forall\, x \in Y \cap (y-\delta, y+\delta)$, tem-se $|g(x) - l| < \varepsilon$;

iv) $\lim\limits_{x\to y} g(x) = l$.

□

Obs 5.11. A equivalência

$$\lim_{x\to y^-} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to y} g(x) = l$$

pode ser provada de maneira análoga, com $g = f|_Y : Y \to \mathbb{R}$, dada por $g(y) = f(y), \forall\, y \in Y$, e $Y = X \cap (-\infty, y)$.

Obs 5.12. Com esta proposição é fácil provar que os resultados estabelecidos neste capítulo envolvendo limites, com as devidas modificações, são verdadeiros para limites laterais. Por exemplo, considere que $\lim\limits_{x\to y^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to y^+} g(x)$ existem, então

$$\lim_{x\to y^+} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to y^+} f(x) + \lim_{x\to y^+} g(x).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to y^+} [f(x) + g(x)] &= \lim_{x\to y} [(f|_Y)(x) + (g|_Y)(x)] \\
&= \lim_{x\to y} (f|_Y)(x) + \lim_{x\to y} (g|_Y)(x) \\
&= \lim_{x\to y^+} f(x) + \lim_{x\to y^+} g(x),
\end{aligned}$$

onde $Y = X \cap (y, \infty)$.

Exemplo 5.13. Seja $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{|x|}, \forall\, x \in \mathbb{R}^*.$$

Assim,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1.$$

Vejamos, agora, como relacionar o limite ordinário (ver Definição 5.1) com os limites laterais de uma função real.

Teorema 5.11. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $y \in X'_{\pm}$. Então,*

$$\lim_{x\to y} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to y^+} f(x) = \lim_{x\to y^-} f(x) = l.$$

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que $\lim\limits_{x\to y} f(x) = l$. Assim, pela Definição 5.1, dado $\varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tal que

$$\text{para todo } x \in X \text{ com } 0 < |x-y| < \delta, \text{ tem-se } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Consequentemente, para todo $x \in X \cap (y-\delta, y)$, tem-se que

$$x \in X \text{ e } y - \delta < x < y < y + \delta.$$

Daí, $x \in X$ e $0 < |x-y| < \delta$. Logo, $|f(x) - l| < \varepsilon$. Isto nos diz que $\lim\limits_{x\to y^-} f(x) = l$. Analogamente, prova-se que $\lim\limits_{x\to y^+} f(x) = l$.

$\Leftarrow$) Suponha que

$$\lim_{x\to y^+} f(x) = \lim_{x\to y^-} f(x) = l.$$

Assim sendo, dado $\varepsilon > 0$ existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$\forall\, x \in X \cap (y, y+\delta_1), \text{ conclui-se } |f(x) - l| < \varepsilon$$

Da mesma maneira,

$$\forall\, x \in X \cap (y-\delta_2, y), \text{ infere-se } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Com isso, para todo $x \in X$ com $0 < |x-y| < \delta$, tem-se

$$x \in X \cap (y, y+\delta) \text{ ou } x \in X \cap (y-\delta, y).$$

Consequentemente,

$$x \in X \cap (y, y+\delta_1) \text{ ou } x \in X \cap (y-\delta_2, y),$$

pois, $\delta \leq \delta_1, \delta_2$. De qualquer maneira, concluí-se que $|f(x) - l| < \varepsilon$. Ou seja,

$$\lim_{x \to y} f(x) = l.$$

□

Exemplo 5.14. Vimos que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1 \text{ e } \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1.$$

Logo, $\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$ não existe, pelo Teorema 5.11.

Vejamos, agora, como encontrar o valor de um Limite Fundamental do Cáculo.

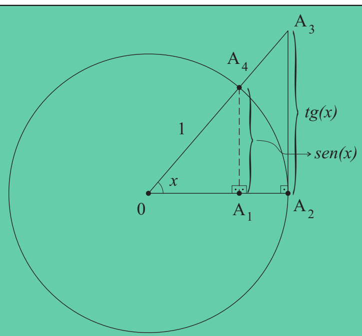

Figura 5.8: Relação geométrica envolvendo tangente e seno

Exemplo 5.15. Sejam B_1 e B_2 as áreas dos triângulos ΔA_1OA_4 e ΔA_2OA_3. Considere também que B_3 seja a área do setor circular A_2OA_4. A figura acima, nos diz que

$$B_1 \leq B_3 \leq B_2.$$

É fácil ver que

$$\cos x = \frac{|\overline{OA_1}|}{|\overline{OA_4}|} = |\overline{OA_1}| \text{ e } \operatorname{sen} x = \frac{|\overline{A_1A_4}|}{|\overline{OA_4}|} = |\overline{A_1A_4}|,$$

pois esta circunferência trigonométrica tem raio 1. Consequentemente,

$$B_1 = \frac{|\overline{A_1A_4}| \cdot |\overline{OA_1}|}{2} = \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2}.$$

Analogamente, encontramos

$$B_2 = \frac{|\overline{A_2A_3}| \cdot |\overline{OA_2}|}{2} = \frac{\tan x}{2}.$$

Por fim, sabemos que $B_3 = x/2$. Por conseguinte,

$$\frac{\mathrm{sen} x \cos x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}.$$

Dessa forma,

$$\mathrm{sen} x \cos x \leq x \leq \tan x.$$

Considere que $x \in (0, \pi/2)$. Assim sendo, $\mathrm{sen} x, \cos x > 0$. Por conseguinte, dividindo as desigualdades acima por $\mathrm{sen} x$, obtemos

$$\cos x \leq \frac{x}{\mathrm{sen} x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

Invertendo estas desigualdades, chegamos a

$$\frac{1}{\cos x} \leq \frac{\mathrm{sen} x}{x} \leq \cos x.$$

Portanto, pelo Teorema 5.5, concluímos $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\mathrm{sen} x}{x} = 1$, pois

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1,$$

ver Exemplo 5.6. Usando o fato que o seno é uma função ímpar, prova-se que $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{\mathrm{sen} x}{x} = 1$. Desta maneira, utilizando o Teorema 5.11, inferimos

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sen} x}{x} = 1.$$

Este limite é chamado Limite Fundamental do Cálculo.

Vimos na aula 2 que uma sequência monótona e limitada é convergente, além disso mostramos como obter tal convergência. Abaixo daremos definições que nos possibilitarão obter resultados semelhantes sobre a existência de alguns limites.

Definição 5.5 (Função Monótona)**.** Seja $f : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é não-decrescente (respectivamente, não-crescente) se

$$x, y \in X \text{ com } x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \text{ (respectivamente, } f(x) \geq f(y)).$$

Se

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \text{ (respectivamente, } f(x) > f(y)),$$

dizemos que f é crescente (respectivamente, decrescente). Em qualquer destes casos, f é dita uma função monótona.

Exemplo 5.16. Toda função real constante é não-crescente e não-decrescente. A função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1/x$, é decrescente.

Exemplo 5.17. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \cos x$, não é uma função monótona, pois

$$\cos \pi = -1 < 1 = \cos(2\pi) \text{ e } \cos(\pi/2) = 0 > -1 = \cos \pi.$$

O Teorema 2.4 tem sua versão para funções reais enunciada no seguinte resultado.

Teorema 5.12. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função monótona limitada. Então $\lim_{x \to y^+} f(x)$ e $\lim_{x \to z^-} f(x)$ existem, $\forall\, y \in X'_+, z \in X'_-$.*

Demonstração. Suponha que f é monótona não-decrescente limitada e $z \in X'_-$. Como f é limitada, então

$$Y = \{f(x) : x \in X \text{ e } x < z\}$$

é um conjunto limitado. Por outro lado, $z \in X'_-$, logo, $\exists\, x \in X \cap (z-1, z)$ (ver Teorema 4.4). Ou seja, $f(x) \in Y$. Consequentemente, Y é não-vazio e limitado. Dessa forma, usando a completude de $\mathbb{R}$, $\sup Y$ existe. Vamos provar que

$$\lim_{x \to z^-} f(x) = \sup Y.$$

De fato, pela Definição 1.11, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, f(x) \in Y$ tal que

$$\sup Y - \varepsilon < f(x).$$

Como $f(x) \in Y$, então $x < z$. Daí existe $\delta > 0$ tal que $z = x + \delta$. Assim,

$$\sup Y - \varepsilon < f(z - \delta).$$

Dessa forma, $\forall\, x \in X \cap (z-\delta, z)$, tem-se que

$$x \in X \text{ e } z-\delta < x < z.$$

Como f é não-decrescente, então

$$\sup Y - \varepsilon < f(z-\delta) \leq f(x) \leq \sup Y \leq \sup Y + \varepsilon,$$

ou seja,

$$f(x) \in (\sup Y - \varepsilon, \sup Y + \varepsilon).$$

Equivalentemente, $|f(x) - \sup Y| < \varepsilon$. Isto nos diz que $\lim\limits_{x \to z^-} f(x) = \sup Y$. □

Obs 5.13. Analogamente, prova-se que

$$\lim_{x \to y^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in X \text{ e } x > y\},$$

se f é não-decrescente.

Exemplo 5.18. Seja $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0,1]; \\ 1, & \text{se } x \in (1,2]. \end{cases}$$

A função f é monótona não-decrescente. Note que f é limitada, pois $f([0,2]) = \{0,1\}$. Pelo Teorema 5.12, temos que

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in [0,2)\} = \sup\{0,1\} = 1$$

e também

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in (0,2]\} = \inf\{0,1\} = 0.$$

Exercícios de Fixação

1. Dê um exemplo de uma função que tem limite lateral à direita, mas não possui limite lateral à esquerda em algum ponto.

2. Seja $f(x) = \sqrt{|x|}$, onde $x \neq 0$. Mostre que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$.

3. Calcule o limite $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{x-1}$, ou mostre que ele não existe.

4. Calcule o limite $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$, onde $x > 0$, ou mostre que este limite não existe.

5.5 Limites Infinitos e no Infinito de Funções Reais

Nesta seção, definimos e exemplificamos limites infinito e no infinito. No decorrer da teoria, mostraremos alguns resultados assim que estes forem se tornando oportunos. No fim, discutiremos mais uma maneira onde podemos encontrar uma indeterminação para limites.

Definição 5.6 (Limites Infinitos)**.** Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função, onde $X \subseteq \mathbb{R}$ é ilimitado superiormente. Dizemos que $f(x)$ tende a l quando x tende a ∞, quando dado $\varepsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que

$$\text{para todo } x \in X \text{ com } x > A, \text{ conclui-se } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Neste caso, ecrevemos

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l.$$

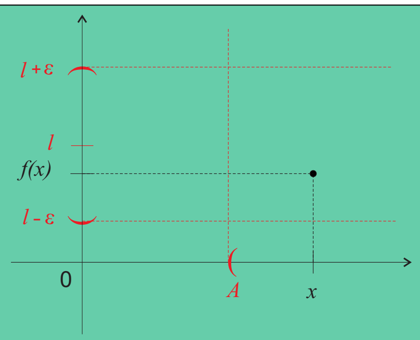

Figura 5.9: Limite infinito ($x \to \infty$)

Definição 5.7 (Limites Infinitos)**.** Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma aplicação, onde $X \subseteq \mathbb{R}$ é ilimitado inferiormente. Dizemos que $f(x)$ tende a l quando x tende a $-\infty$, quando dado $\varepsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que

$$\text{para todo } x \in X \text{ com } x < -A, \text{ infere-se } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Neste caso, ecrevemos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l.$$

Obs 5.14. Observe que A depende somente de ε, i.e, $A = A(\varepsilon)$.

Exemplo 5.19. Afirmamos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

De fato, dado $\varepsilon > 0$, com $A = \dfrac{1}{\varepsilon} > 0$, temos que para todo $x \in \mathbb{R}^*$ com $x > A > 0$, conclui-se que

$$0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{A} = \varepsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Analogamente, prova-se que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Exemplo 5.20. É verdade que

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0,$$

ver Definição 10.2. Com efeito, dado $0 < \varepsilon < 1$, considere

$$A = -\ln\varepsilon = \ln\varepsilon^{-1} > 0,$$

pois $\varepsilon^{-1} > 1$, ver Definição 10.1. Com isso, para todo $x < -A = \ln\varepsilon$, encontramos

$$\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^{-A} = \mathrm{e}^{\ln\varepsilon} = \varepsilon.$$

Agora, se $\varepsilon > 1$, então considere $A = 1 > 0$, para obter

$$x < -A = -1 < 0 \Rightarrow \mathrm{e}^x < \mathrm{e}^0 = 1 < \varepsilon.$$

De qualquer maneira, dado $\varepsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que para todo $x < -A$, tem-se que $\mathrm{e}^x < \varepsilon$, ou seja

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0.$$

Exemplo 5.21. Note que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x$ não existe, ver Definição 10.2. Suponha, por absurdo, que

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = l.$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $B > 0$ tal que $\forall\, x > B$, tem-se $|\mathrm{e}^x - l| < \varepsilon$. Portanto,

$$\mathrm{e}^x - |l| \leq ||\mathrm{e}^x| - |l|| \leq |\mathrm{e}^x - l| < \varepsilon,$$

isto é,

$$\mathrm{e}^x < \varepsilon + |l|.$$

Considere $A > \max\{\varepsilon + |l|, 1\}$. Seja $C = \max\{B, \ln A\} > 0$ (ver Definição 10.1). Assim, se $x > C$, então $x > B$ e $x > \ln A$. Com isso,

$$\mathrm{e}^x < \varepsilon + |l| \text{ e } \mathrm{e}^x > \mathrm{e}^{\ln A} = A > \varepsilon + |l|,$$

ou seja,

$$\mathrm{e}^x < \varepsilon + |l| \text{ e } \mathrm{e}^x > \varepsilon + |l|.$$

Contradição! Logo, $\lim\limits_{x \to \infty} \mathrm{e}^x$ não existe.

Agora, vejamos duas maneiras análogas de definirmos limites no infinito.

Definição 5.8 (Limite no Infinito)**.** Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $y \in X'$. Dizemos que $f(x)$ tende a ∞ quando x tende a y se dado $A > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{para todo } x \in X \text{ com } 0 < |x - y| < \delta, \text{ tem-se } f(x) > A.$$

Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \to y} f(x) = \infty.$$

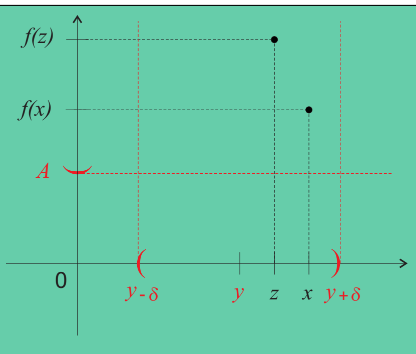

Figura 5.10: Limite no infinito $f(x) \to \infty$

Definição 5.9 (Limite no Infinito)**.** Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $y \in X'$. Dizemos que $f(x)$ tende a $-\infty$ quando x tende a y se dado $A > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{para todo } x \in X \text{ com } 0 < |x - y| < \delta, \text{ tem-se } f(x) < -A.$$

Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x\to y} f(x) = -\infty.$$

Obs 5.15. Observe que δ depende somente de A, isto é, $\delta = \delta(A)$.

Exemplo 5.22. Com esta nova definição temos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Dado $A > 0$, seja $\delta = 1/\sqrt{A} > 0$. Assim, para todo $x \in \mathbb{R}^*$ com $0 < |x| < \delta$, tem-se

$$\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} = A,$$

isto é, $\lim\limits_{x\to 0} 1/x^2 = \infty$. Analogamente,

$$\lim_{x\to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty.$$

O primeiro resultado que surge envolve limite no infinito. Leia a afirmação abaixo.

Proposição 5.4. *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções e $y \in X'$. Se $\lim\limits_{x\to y} f(x) = \infty$ e*

$$f(x) \leq g(x), \forall\, x \in X,$$

então $\lim\limits_{x\to y} g(x) = \infty$.

Demonstração. Com efeito, dado $A > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{para todo } x \in X \text{ com } x \in (y - \delta, y + \delta), \text{ conclui-se } g(x) \geq f(x) > A.$$

Logo, $g(x) > A$. Ou seja, $\lim\limits_{x\to y} g(x) = \infty$. □

Obs 5.16. Analogamente, se $f(x) \leq g(x), \forall\, x \in X$ e $\lim\limits_{x\to y} g(x) = -\infty$, então $\lim\limits_{x\to y} f(x) = -\infty$.

Mesclaremos abaixo a definição de limite infinito com o conceito de limite no infinito.

Definição 5.10 (Limite Infinito no Infinito)**.** Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função, onde X é ilimitado superiormente. Dizemos que $f(x)$ tende a ∞ quando x tende a ∞, se dado $A > 0$, existe $B > 0$ tal que

$$\text{para todo } x \in X, \text{ com } x > B, \text{ infere-se } f(x) > A.$$

Neste caso escrevemos

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

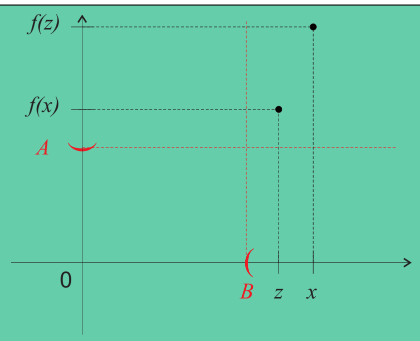

Figura 5.11: Limite infinito no infinito

Definição 5.11 (Limite Infinito no Infinito)**.** Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função, onde X é ilimitado inferiormente. Dizemos que $f(x)$ tende a $-\infty$ quando x tende a ∞ se dado $A > 0$, existe $B > 0$ tal que

$$\text{para todo } x \in X, \text{ com } x > B, \text{ encontra-se } f(x) < -A.$$

Nesta situação, escrevemos

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty.$$

Obs 5.17. Observe que B depende somente de A, isto é, $B = B(A)$.

Exemplo 5.23. Afirmamos que

$$\lim_{x \to \infty} \mathrm{e}^x = \infty,$$

ver Definição 10.2. Com efeito, dado $A > 1, \exists\ B = \ln A > 0$ (ver Definição 10.1) tal que

$$\text{para todo } x \in X \text{ com } x > B = \ln A, \text{ tem-se } \mathrm{e}^x > \mathrm{e}^{\ln A} = A.$$

Por outro lado, se $0 < A < 1$, então existe $B = 1 > 0$, tal que

$$\text{para todo } \ x \in X, \text{ com } x > B = 1 > 0, \text{ encontra-se } \mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0 = 1 > A.$$

Assim sendo, $\lim\limits_{x \to \infty} \mathrm{e}^x = \infty$.

Obs 5.18. Podemos definir outros limites unindo as definições estabelecidas acima. Por exemplo

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \to y^+} f(x) = \infty, \lim_{x \to y^-} f(x) = -\infty, ...$$

Vejamos como definir este último limite, ou seja, $\lim\limits_{x \to y^-} f(x) = -\infty$. Dado $A > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que

$$\text{para todo } x \in X \cap (y - \delta, y), \text{ tem-se } f(x) < -A.$$

Obs 5.19. Os resultados encontrados nos Teoremas 2.12 e 5.6, com as devidas modificações, continuam sendo válidos para limites de funções reais infinitos e no infinito. Por exemplo, se

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \text{ e } g(x) \geq m > 0, \forall\ x \in X,$$

então

$$\lim_{x \to \infty} f(x) g(x) = \infty.$$

E também, se $(y, \infty) \subseteq X$, então

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\ (x_n) \subseteq X \cap (y, \infty) \text{ tal que } \lim x_n = \infty, \text{ tem-se } \lim f(x_n) = l.$$

Exemplo 5.24. É verdade que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Com efeito, dado $A > 0$, existe $\delta = 1/A > 0$ tal que

$$\text{para todo } \ x \in (-1/A = -\delta, 0)\,, \text{ tem-se } -\frac{1}{A} < x < 0.$$

Logo, $1/A > -x > 0$. Por conseguinte, $A < -1/x$. Equivalentemente, $1/x < -A$. Ou seja,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

A seguir daremos mais um exemplo sobre o conceito de indeterminação envolvendo limites de funções.

Obs 5.20. Quando se calcula um determinado limite é possível encontrar resultados do tipo $\infty - \infty, \infty^0, 1^\infty, 0^0, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$. Estes são denominados indeterminações. Vejamos por que eles ocorrem. Consideraremos a indeterminação 0^0. Sejam $y > 0$ e $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, dadas por

$$f(x) = x \text{ e } g(x) = \frac{\ln y}{\ln x}.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x = 0 \text{ e } \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln y}{\ln x} = \ln y \lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln x} = 0,$$

ver Exemplo 5.3. Assim,

$$f(x)^{g(x)} = x^{\frac{\ln y}{\ln x}} = y \Leftrightarrow \ln(x^{\frac{\ln y}{\ln x}}) = \ln y \Leftrightarrow \frac{\ln y}{\ln x} \ln x = \ln y.$$

Dessa forma,

$$\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to 0} y = y,$$

ver Exemplo 5.1. Neste caso, a indeterminação 0^0 pode estar tão próximo (no limite) de qualquer número positivo desejado quanto quisermos. Por outro lado, seja $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, dada por

$$h(x) = \frac{\ln(2 + |\cos(1/x)|)}{\ln x}.$$

Consequentemente,

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(2 + |\cos(1/x)|)}{\ln x} = 0,$$

pois

$$\ln(2 + |\cos(1/x)|) \leq \ln(2+1) = \ln 3 \text{ e } \lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln x} = 0,$$

ver Exemplo 5.3 e Teorema 5.9. Por outro lado, pelo que foi feito acima, temos que

$$\lim_{x\to 0} f(x)^{h(x)} = \lim_{x\to 0} x^{\frac{\ln(2+|\cos(1/x)|)}{\ln x}} = \lim_{x\to 0} \ln(2 + |\cos(1/x)|),$$

limite o qual não existe (ver Exemplo 5.7). Ou seja, a indeterminação 0^0 pode não estar próximo (no limite) de qualquer que seja o número real. Por isso, o nome dado para este problema é indeterminação.

Exercícios de Fixação

1. Calcule os limites $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$ e $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}$, ou mostre que estes limites não existem.

2. Seja $f(x) = 1/\sqrt{|x|}$, para $x \neq 0$. Mostre que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \infty$.

3. Suponha que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ existem e que $f(x) \leq g(x)$, $\forall\ x \in (y, \infty)$. Mostre que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \leq \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$.

4. Mostre que se $f : (y, \infty) \to \mathbb{R}$ é tal que $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x) = l$, então $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

5. Suponha que $\lim\limits_{x\to y} f(x) = l > 0$ e que $\lim\limits_{x\to y} g(x) = \infty$. Mostre que $\lim\limits_{x\to y} f(x)g(x) = \infty$. Se $l = 0$, mostre com um exemplo que esta afirmação é falsa.

5.6 Conclusão

Caro leitor, ao final desta aula, é importante ressaltar que, neste material, o mais relevante não é saber encontrar o limite, como é feito no cálculo ordinário, e sim avaliar se é possível calculá-lo. Assim sendo, a parte computacional não é a parte mais interessante deste texto. Além disso, como veremos no decorrer do material, as definições de continuidade, em alguns casos, e derivada, são estabelecidas por limite. Com isso, limite de funções é uma ferramenta importante nestas notas e em muitas aplicações em diversas áreas das ciências exatas. Para alguns exemplos de limite de funções em Física ver [1].

5.7 Resumo

Nesta aula, apresentamos os conceitos de limite de funções reais sobre subconjuntos constituídos de números reais. Neste contexto, estudamos limites ordinários, laterais, infinitos e no infinito. Mostramos alguns exemplos destes limites para ilustração de como devemos resolver exercícios deste conteúdo. Porém, em muitos casos, o cálculo de um limite é um trabalho difícil. Por isso, mostramos também alguns resultados que estabelecem somente a existência de tais limites.

5.8 Exercícios Propostos

Exercícios:

1. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X'$. Prove que $\lim_{x\to y} f(x)$ existe $\Leftrightarrow$ $\forall$ $(x_n) \subseteq X\backslash\{y\}$ com $\lim x_n = y$, tem-se que $\lim f(x_n)$ existe.

2. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 0$ se $x \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ e $f(x) = x$, se $x \in \mathbb{Q}$; $g(x) = 0$ se $x \neq 0$ e $g(0) = 1$. Mostre que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, porém $\lim_{x\to 0} g(f(x))$ não existe.

3. Prove que $\lim_{x\to y^+} f(x) = l$ (respectivamente, $\lim_{x\to y^-} f(x) = l$) $\Leftrightarrow$ $\forall$ $(x_n) \subseteq X$ decrescente (respectivamente, crescente) com $\lim x_n = y$, tem-se que $\lim f(x_n) = l$.

4. Seja $a > 1$. Prove que $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1 + a^{\frac{1}{x}}} = 0$ e $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{1 + a^{\frac{1}{x}}} = 1$.

5. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ monótona e $y \in X'_+$. Considere que existe uma sequência $(x_n) \subseteq X$, com $x_n > y$, $\lim x_n = y$ e $\lim f(x_n) = l$, prove que $\lim_{x\to y^+} f(x) = l$.

6. Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio não-constante, ou seja, $p(x) = y_0 + y_1 x + ... + y_n x^n$, com $y_n \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Se n é ímpar, prove que $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$, se $y_n > 0$, e $\lim_{x\to-\infty} p(x) = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} p(x) = -\infty$, se $y_n < 0$.

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + yx\text{sen}x$. Mostre que $|y| < 1 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

8. Dado $y > 1$, defina $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pondo $g(x) = y^x$. Prove que $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

9. (Critério de Cauchy) Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Prove que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe $\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tal que $\forall\, x, y \in X$ com $0 < |x - a| < \delta$, $0 < |y - a| < \delta$, prove que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
Sugestão: Use sequência de Cauchy e O Teorema 5.6 para a recíproca.

10. (Permanência de Sinal) Se $\lim_{x\to y} f(x) > 0$ prove que existe $\delta > 0$ tal que $\forall$ $x \in X$ com $0 < |x - y| < \delta$, tem-se $f(x) > 0$.

5.9 Exercícios Resolvidos

Questões Resolvidas:

Ex1. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X'$. Porve que se $\lim\limits_{x\to y} f(x) = l$ então $l \in \overline{f(X\backslash\{y\})}$.

Demonstração. Considere que $\lim\limits_{x\to y} f(x) = l$, onde $y \in X'$. Assim, $\exists\ (x_n) \subseteq (X\backslash\{y\})$ tal que $\lim x_n = y$ (ver Definição 4.9), e consequentemente, usando o Teorema 5.6, concluímos que $\lim f(x_n) = l$. Observe que $(f(x_n)) \subseteq f(X\backslash\{y\})$. Portanto, pela Definição 4.3, temos que $l \in \overline{f(X\backslash\{y\})}$. □

Ex2. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$. Prove que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ (ver Definição 10.2).

Demonstração. Seja $0 < \varepsilon < 1/2$. Observe que

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} < \varepsilon \Leftrightarrow 1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \ln\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \Leftrightarrow x < \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)},$$

lembre que $\mathrm{e} \approx 2,7 > 1$. Seja

$$\delta = \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)} > 0,$$

$1/\varepsilon - 1 > 1$. Com isso,

$$\text{para todo } x \in (0,\delta), \text{ tem-se } 0 < x < \delta = \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)}.$$

Consequentemente,

$$\left|\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} - 0\right| = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} < \varepsilon.$$

Agora, se $\varepsilon \geq 1/2$, então seja $\delta = 1 > 0$. Note que,

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} < 1/2 \Leftrightarrow 1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} > 2 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} > 1,$$

para todo $x \in (0,1)$. A última desigualdade acima é verdadeira. Portanto,

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} < 1/2 \leq \varepsilon.$$

Assim,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0.$$

$\square$

Ex3. Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio não-constante, ou seja,

$$p(x) = y_0 + y_1 x + ... + y_n x^n,$$

com $y_n \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Prove que, se n é par então

$$\lim_{x\to -\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty} p(x) = \infty, \text{ se } y_n > 0$$

e

$$\lim_{x\to -\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty} p(x) = -\infty, \text{ se } y_n < 0.$$

Demonstração. Primeiramente, note que

$$p(x) = y_0 + y_1 x + ... + y_n x^n = x^n \Big(\frac{y_0}{x^n} + \frac{y_1}{x^{n-1}} + ... + \frac{y_{n-1}}{x} + y_n \Big).$$

Portanto, se n é par, então

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^n \left(\frac{y_0}{x^n} + \frac{y_1}{x^{n-1}} + ... + \frac{y_{n-1}}{x} + y_n \right).$$

Como

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n = \infty \text{ e } \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{y_1}{x^{n-1}} + ... + \frac{y_{n-1}}{x} + y_n \right) = y_n.$$

Assim, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x) = \infty$, se $y_n > 0$ e $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x) = -\infty$, se $y_n < 0$. $\square$

Ex4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x + yx\text{sen}x, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Mostre que $|y| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Demonstração. Veja que $1 - |y| > 0$. Com isso, pelo Teorema 1.5,

$$|1 + y\text{sen}x| \geq |1| - |y\text{sen}x| = 1 - |y||\text{sen}x| \geq 1 - |y| > 0,$$

pois $|\text{sen}x| \leq 1$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Como

$$\lim_{x\to\infty}(x + yx\text{sen}x) = \lim_{x\to\infty} x(1 + y\text{sen}x) \text{ e } \lim_{x\to\infty} x = \infty,$$

então, usando a Observação 5.19, $\lim\limits_{x\to\infty}(x + yx\text{sen}x) = \infty$. $\square$

Ex5. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ com $f(X) \subseteq Y$. Sejam $a \in X'$ e $b \in Y' \cap Y$. Se

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \text{ e } \lim_{y\to b} g(y) = g(b),$$

prove que

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(b),$$

ou seja,

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right).$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\lambda > 0$ tal que

$$\text{para todo } y \in Y,\ \text{com } 0 < |y - b| < \lambda,\ \text{tem-se } |g(y) - g(b)| < \varepsilon,$$

pois $\lim\limits_{y\to b} g(y) = g(b)$. Note que, se $y = b$, então

$$|g(y) - g(b)| = |g(b) - g(b)| = 0 < \varepsilon.$$

Assim sendo,

$$\text{para todo } y \in Y,\ \text{com } |y - b| < \lambda,\ \text{encontra-se } |g(y) - g(b)| < \varepsilon.$$

Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, então existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{para todo } x \in X,\ \text{com } 0 < |x - a| < \delta,\ \text{conclui-se } |f(x) - b| < \lambda.$$

Dessa forma,

$$\text{para todo } x \in X,\ \text{com } 0 < |x - a| < \delta,\ \text{infere-se } |g(f(x)) - g(b)| < \varepsilon,$$

pois $f(x) \in Y$, ou seja, $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = g(b)$. $\square$

Auto-Avaliação

Sou capaz de identificar a existência de um limite?

Proxima Aula

Caro leitor, na próxima aula, estudaremos continuidade de funções reais. Recomendamos que você reveja os conceitos estudados nas aulas 2 e 4, já que estes são essenciais para o entendimento dos novos conteúdos que estão por vir.

Referências Bibliográficas

[1] Alonso, M.; Finn, E. J., *Física: Um Curso Universitário.* Segunda Edição, São Paulo, Edgard Blücher Ltda, 2009. 481p.

[2] Bartle, R. G.; Sherbert, D. R., *Introdution to Real Analysis*, Third Edition, New York, JohnWiley and Sons,Inc., 2000. 399p.

[3] Boyce, W. E.; DiPrima, R. C., *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.* Seventh Edition, New York, JohnWiley and Sons,Inc, 2001. 745p.

[4] Brasil, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

[5] Brauer, F.; Nohel, J. A., *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations.* University of Wisconsin, 1989.

[6] Dragomir, S. S., *Some Gronwall Type Inequalities and Applications.* Monograph. Victoria University of Technology, 2002.

[7] Ferreira, J., *A Construção dos Números.* Primeira Edição, Rio de Janeiro, SBM, 2010. 133p.

[8] Figueiredo, D., *Análise I.* Segunda Edição, Rio de Janeiro, LTC, 2008. 266p.

[9] Guillemin, V.; Pollack, A., *Differential Topology.* First Edition, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1974. 227p.

[10] King, A.C.; Billingham, J.; OTTO, S.R., *Differential Equations.* Linear, Nonlinear, Ordinary, Partial. Cambridge University Press. New York, 2003.

[11] Lima, E. L., *Análise Real.* Funções de uma variável, vol.1. 8°. ed. Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[12] Lima, E. L., *Análise Real,* vol.2. Rio de Janeiro, 2004.

[13] Lima, E. L., *Curso de Análise*, vol. 1, Décima Segunda Edição, Rio de Janeiro, IMPA, 2008. 431p.

[14] Melo, W., *Existência de soluções clássicas para as Equações de Burgers e Navier-Stokes.* Dissertação de Mestrado. UFPE, 2007.

[15] Munkres, J. R., *Topology.* Second Edition, New Jersey, Prentice Hall, Inc., 2000. 552p.

[16] Nolt, J.; Rohatys, D.; Varzi, A., *Theory and problems or logic.* Second edition, New York, McGraw-Hill, 2009. 279p.

[17] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis.* Third Edition, New York, McGraw-Hill, Inc., 1976. 351p.

[18] Smoller, J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations.* 2nd ed., Springer-Verlag, 1994.

[19] Tveito, A.; Winther, R., *Introduction to Partial Differential Equations.* A Computational Approach. New York, 1961.

Professor Revisor

Professor Paulo de Souza Rabelo