Capítulo 6

Sexta Aula: Continuidade e Continuidade Uniforme

Meta

Apresentar os conceitos de função contínua, uniformemente contínua e demonstrar resultados relevantes em Análise como, por exemplo, os Teoremas do Valor Intermediário e de Weierstrass.

Objetivos

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de verificar se uma função é contínua ou uniformemente contínua e saber aplicar corretamente os Teoremas do Valor Intermediário e de Weierstarass.

Pré-requisitos

Aula 5, Fundamentos da Matemática e Cálculo II.

6.1 Introdução

Convidamos o leitor ao estudo das funções contínuas e uniformemente contínuas. Inicialmente definiremos e exemplificaremos o que significa o termo continuidade, envolvendo aplicações reais, em Matemática. Veremos que o conjunto formado por estas funções é fechado para a soma, subtração, multiplicação e divisão (quando esta faz sentido), isto é, uma operação elementar de duas funções contínuas gera uma aplicação do mesmo tipo. Por conseguinte, estudaremos tais aplicações definidas em um intervalo compacto para podermos enunciar e provar alguns resultados importantíssimos em Análise, entre eles o Teorema do Valor Intermediário. Este tem aplicação direta em determinação de raízes de polinômios, por exemplo. Em seguida, enfraqueceremos a hipótese do domínio ser um intervalo e continuaremos com a condição de compacidade para obtermos o Teorema de Weierstrass. Por fim, definiremos quais funções são uniformemente contínuas e que condições devemos acrescentar a uma aplicação contínua para obtermos as propriedades de continuidade uniforme satisfeitas.

6.2 Continuidade e Exemplos

Caro leitor, nesta seção, procuraremos identificar quando uma função é contínua ou não. Também, veremos quando uma restrição ou extensão não altera a continuidade de uma aplicação. Por fim, exporemos uma outra possibilidade de definir essas funções através de limites.

Definição 6.1 (Continuidade no Ponto)**.** Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X$. Dizemos que f é contínua no ponto $y \in X$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall\ x \in X \text{ com } |x - y| < \delta, \text{ tem-se } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Caso contrário, f é dita descontínua em $y \in X$.

Obs 6.1. O número positivo δ depende de ε e y, ou seja, $\delta = \delta(\varepsilon, y)$.

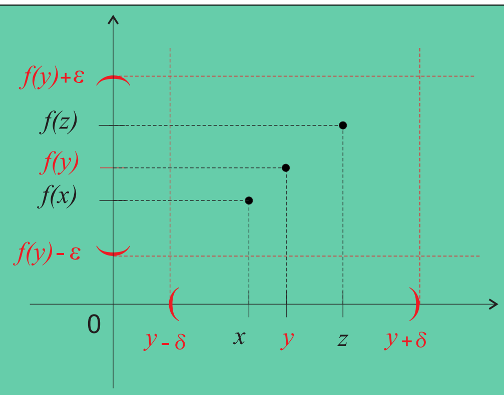

Figura 6.1: Continuidade em $y \in X$

Obs 6.2. Veja que y está no domínio de f. Não é necessário que y seja ponto de acumulação deste.

Obs 6.3. Veja que na Definição 6.1, só importa o que ocorre em $X \cap (y - \delta, y + \delta)$. Por este fato, dizemos que a continuidade em um determinado ponto é um conceito local.

Agora, vejamos um exemplo de uma função descontínua em um determinado ponto.

Exemplo 6.1. Defina $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = 0, \forall\ x \in (0, 1] \text{ e } f(0) = 1.$$

Afirmamos que f é descontínua em 0. Devemos provar que $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que dado $\delta > 0$, pode-se encontrar $x_\delta \in [0, 1]$, com

$$|x_\delta - 0| < \delta \text{ e } |f(x_\delta) - f(0)| \geq \varepsilon.$$

Isto é fato. Seja $\varepsilon = 1 > 0$. Assim, dado $\delta > 0$ existe $x_\delta \in (0, \delta)$ (ver Teorema 1.6) tal que

$$|f(x_\delta) - f(0)| = |0 - 1| = 1 = \varepsilon.$$

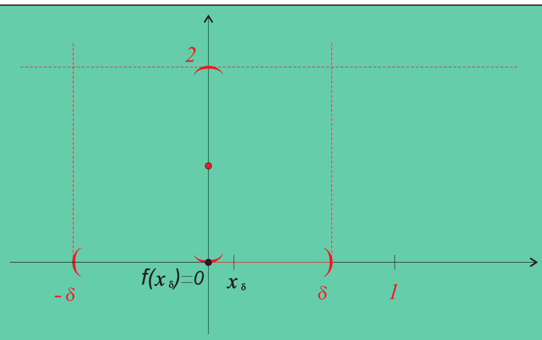

Figura 6.2: Função descontínua em 0

Exemplo 6.2. Seja $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma função. Vamos mostrar que x é contínua em $n \in \mathbb{N}$, independentemente da definição de x. Isto nos diz que toda sequência de números reais é uma função contínua em $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \frac{1}{2} > 0$. Assim,

$$(n - 1/2, n + 1/2) \cap \mathbb{N} = \{n\}.$$

Com isso,

$$\forall\ m \in \mathbb{N} \text{ com } |m - n| < \frac{1}{2}, \text{ tem-se } m \in (n - 1/2, n + 1/2) \cap \mathbb{N}.$$

Logo, $m = n$. Consequentemente,

$$|x(m) - x(n)| = |x(n) - x(n)| = 0 < \varepsilon.$$

Obs 6.4. Segue diretamente das Definições 5.1 e 6.1 que se $y \in X \cap X'$, temos que f é contínua em $y \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to y} f(x) = f(y)$ (estas duas definições coincidem nesta situação) .

Exemplo 6.3. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = |x|$. Assim,

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0 \text{ e } \lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} -x = 0.$$

Portanto, pelo Teorema 5.11,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} |x| = 0 = |0| = f(0).$$

Com isso, f é contínua em 0 ($0 \in \mathbb{R}' = \mathbb{R}$).

Estamos prontos para definir continuidade de uma função.

Definição 6.2 (Continuidade)**.** Seja $f : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é uma função contínua em X, ou simplesmente contínua, se f é contínua em cada ponto de X. Caso contrário, dizemos que f é descontínua em X, ou somente descontínua.

Exemplo 6.4. Toda função constante é contínua. De fato, seja $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = c =$ constante, então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = 1 > 0$ tal que

$$\forall\, x \in X \text{ com } |x - y| < 1, \text{ tem-se } |f(x) - f(y)| = |c - c| = 0 < \varepsilon,$$

ou seja, f é contínua em $y \in X$. Como y é arbitrário, então f é contínua.

Exemplo 6.5. A função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida no Exemplo 6.1, é descontínua em $[0, 1]$.

Exemplo 6.6. Toda sequência de números reais é uma função contínua (ver Exemplo 6.2).

Exemplo 6.7. Vimos no Exemplo 5.7 que $\lim\limits_{x\to 0} \cos \dfrac{1}{x}$ não existe. Assim, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \cos \frac{1}{x}, \text{ se } x \neq 0 \text{ e } f(0) = 0$$

é descontínua em 0. Já que,

$$\lim_{x\to 0} \cos \frac{1}{x} \neq 0 = f(0).$$

Exemplo 6.8. Vimos nos Exemplos 5.5 e 5.6 que

$$\lim_{x\to y} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} y \text{ e } \lim_{x\to y} \cos x = \cos y,$$

para qualquer $y \in \mathbb{R}$. Portanto, as funções seno e cosseno são contínuas.

Exemplo 6.9. Vimos no Exemplo 5.8 que $\lim\limits_{x\to y} p(x) = p(y)$, onde p é uma função polinomial real e $y \in \mathbb{R}$. Por conseguinte, qualquer função polinomial é contínua.

Exemplo 6.10. Vimos que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ é contínua em 0. Por outro lado,

$$f(x) = |x| = x \text{ se } x > 0 \text{ e } f(x) = |x| = -x \text{ se } x < 0.$$

Assim, pelo Exemplo 6.9, f é contínua.

O resultado abaixo garante, em palavras, que a restrição de qualquer função contínua é também uma função deste tipo.

Proposição 6.1. *Sejam* $Y \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ *e* $f : X \to \mathbb{R}$ *contínua em* $y \in Y$*. Então, a restrição* $f|_Y : Y \to \mathbb{R}$ *é contínua em* $y \in Y$*, onde* $f|_Y(x) = f(x)$*, para todo* $x \in Y$*.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall\, x \in X \text{ com } |x - y| < \delta, \text{ tem-se } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\forall\, x \in Y \subseteq X \text{ com } |x - y| < \delta, \text{ tem-se } |f|_Y(x) - f|_Y(y)| < \varepsilon.$$

Com isso, $f|_Y$ é contínua em $y \in Y$. □

Exemplo 6.11. No Exemplo 6.8, vimos que a função seno é contínua em $\mathbb{R}$. Assim sendo, pela proposição 6.1, seno é uma função contínua em $[-\pi/2, \pi/2]$.

O dois Teoremas abaixo estabelecem condições para que a extensão de uma função contínua seja também contínua.

Teorema 6.1. *Sejam* $X \subseteq Y_1 \cup Y_2$*, onde* Y_1, Y_2 *são fechados, e* $f : X \to \mathbb{R}$*. Se* $f|_{X\cap Y_1}$ *e* $f|_{X\cap Y_2}$ *são contínuas, então* $f : X \to \mathbb{R}$ *é contínua.*

Demonstração. Vamos mostrar que f é contínua em $y \in X \subseteq Y_1 \cup Y_2$. Note que, ou $y \in Y_1$ e $y \notin Y_2$, ou $y \in Y_2$ e $y \notin Y_1$, ou $y \in Y_1 \cap Y_2$. Se

$$y \in Y_1 \text{ e } y \notin Y_2,$$

então, como $f|_{X\cap Y_1}$ é contínua, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\forall\, x \in X \cap Y_1 \text{ com } |x - y| < \delta_1, \text{ tem-se } |f|_{X\cap Y_1}(x) - f|_{X\cap Y_1}(y)| < \varepsilon.$$

Por outro lado, como $y \notin Y_2 = \overline{Y_2}$, então, pelo Teorema 4.8, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$(y - \delta_2, y + \delta_2) \cap Y_2 = \emptyset,$$

ou seja, se $|x - y| < \delta_2$, logo $x \notin Y_2$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Com isso,

$$\forall\, x \in X \text{ com } |x - y| < \delta \leq \delta_1, \delta_2, \text{ tem-se que } x \notin Y_2.$$

Consequentemente,

$$x \in X \cap Y_1 \text{ e } |x - y| < \delta_1.$$

Assim sendo,

$$|f(x) - f(y)| = |f|_{X \cap Y_1}(x) - f|_{X \cap Y_1}(y)| < \varepsilon.$$

O caso $y \in Y_2$ e $y \notin Y_1$ é análogo. Agora, se $y \in Y_1 \cap Y_2$, então existem $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ tais que

$$\forall\ x \in X \cap Y_1 \text{ com } |x - y| < \lambda_1, \text{ tem-se } |f|_{X \cap Y_1}(x) - f|_{X \cap Y_1}(y)| < \varepsilon$$

e

$$\forall\ x \in X \cap Y_2 \text{ com } |x - y| < \lambda_2, \text{ tem-se } |f|_{X \cap Y_2}(x) - f|_{X \cap Y_2}(y)| < \varepsilon,$$

já que $f|_{X \cap Y_1}$ e $f|_{X \cap Y_2}$ são contínuas. Neste caso, seja $\delta = \min\{\lambda_1, \lambda_2\} > 0$. Dessa forma,

$$\forall\ x \in X \text{ com } |x - y| < \delta \leq \lambda_1, \lambda_2, \text{ tem-se } x \in X \cap Y_1 \text{ e } |x - y| < \lambda_1,$$

logo

$$|f(x) - f(y)| = |f|_{X \cap Y_1}(x) - f|_{X \cap Y_1}(y)| < \varepsilon,$$

ou

$$x \in X \cap Y_2 \text{ e } |x - y| < \lambda_2,$$

consequentemente

$$|f(x) - f(y)| = |f|_{X \cap Y_2}(x) - f|_{X \cap Y_2}(y)| < \varepsilon.$$

Por fim, f é contínua em X. □

Exemplo 6.12. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = x, \text{ se } x \geq 1 \text{ e } f(x) = 3x - 2, \text{ se } x \leq 1.$$

Assim, $f|_{(-\infty,1]}$ e $f|_{[1,\infty)}$ são contínuas (ver Teorema 6.1), onde $(-\infty, 1]$ e $[1, \infty)$ são conjuntos fechados (ver Teorema 4.3) e $\mathbb{R} = (-\infty, 1] \cup [1, \infty)$. Logo, f é contínua.

Teorema 6.2. *Sejam $X \subseteq \cup_{\mu \in F} Y_\mu$, onde Y_μ é aberto, $\forall\ \mu \in F$, $F \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto de índices qualquer, e $f : X \to \mathbb{R}$. Se $f|_{X \cap Y_\mu}$ é contínua, $\forall\ \mu \in F$, então f é contínua em X.*

Demonstração. Seja $y \in X \subseteq \cup_{\mu \in F} Y_\mu$. Vamos provar que f é contínua em y. Assim sendo, existe $\mu_0 \in F$ tal que $y \in Y_{\mu_0}$. Por outro lado, Y_{μ_0} é aberto, consequentemente, existe

$$\delta_1 > 0 \text{ tal que } (y - \delta_1, y + \delta_1) \subseteq Y_{\mu_0},$$

ou seja,

$$\forall\, x \in X \text{ com } |x - y| < \delta_1, \text{ tem-se } x \in Y_{\mu_0}.$$

Mas, $f|_{X \cap Y_{\mu_0}}$ é contínua em y. Portanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\forall\, x \in X \cap Y_{\mu_0} \text{ com } |x - y| < \delta_2, \text{ tem-se } |f|_{X \cap Y_{\mu_0}}(x) - f|_{X \cap Y_{\mu_0}}(y)| < \varepsilon.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Por conseguinte,

$$\forall\, x \in X, \text{ com } |x - y| < \delta \leq \delta_1, \delta_2, \text{ segue-se que } x \in Y_{\mu_0} \text{ e } |x - y| < \delta_2.$$

Por fim,

$$|f(x) - f(y)| = |f|_{X \cap Y_{\mu_0}}(x) - f|_{X \cap Y_{\mu_0}}(y)| < \varepsilon.$$

Ou equivalentemente, f é contínua em $y \in X$. Isto nos diz que f é contínua em X. $\square$

Exemplo 6.13. Defina $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ por $f(x) = |x|$. Como $f|_{(-\infty,0)}$ e $f|_{(0,\infty)}$ são contínuas nos abertos $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$, e $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, então f é contínua em $\mathbb{R}^*$.

Exemplo 6.14. Seja $X = \mathbb{R} = (-\infty, 1) \cup [1, \infty)$. Observe que $(-\infty, 1)$ é aberto e $[1, \infty)$ é fechado (ver Teorema 4.3). É possível construir uma função descontínua tal que suas restrições $f|_{(-\infty,1)}$ e $f|_{[1,\infty)}$ são contínuas nos seus respectivos domínios. Por exemplo, seja $f : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x, \text{ se } x \in (-\infty, 1) \text{ e } f(x) = x - 1, \text{ se } x \in [1, \infty).$$

Esta função f é descontínua em 1, pois

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x = 1 \neq 0 = \lim_{x \to 1^+} (x - 1) = \lim_{x \to 1^+} f(x).$$

Com isso, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$, ver Teorema 5.11.

Uma outra maneira de definir função contínua em um ponto está exposta no resultado a seguir.

Teorema 6.3 (Caracterização de Continuidade)**.** *É fato que* $f : X \to \mathbb{R}$ *é contínua em* $y \in X \Leftrightarrow \forall\ (x_n) \subseteq X$ *com* $\lim x_n = y$*, tem-se* $\lim f(x_n) = f(y)$*.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que f é contínua em $y \in X$. Seja $(x_n) \subseteq X$ com $\lim x_n = y$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall\ x \in X \text{ com } |x - y| < \delta, \text{ tem-se } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Como $\lim x_n = y$, então $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\ n \geq N, \text{ infere-se } |x_n - y| < \delta.$$

Daí, $\forall\ n \geq N$, concluímos que

$$|f(x_n) - f(y)| < \varepsilon,$$

ou seja, $\lim f(x_n) = f(y)$.

$\Leftarrow$) Suponha que f é descontínua em $y \in X$. Assim $\exists\ \varepsilon > 0$, tal que dado $\delta > 0$, encontra-se

$$x_\delta \in X \text{ com } |x_\delta - y| < \delta \text{ e } |f(x_\delta) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Faça $\delta = 1, 1/2, ..., 1/n, ...$ com $n \in \mathbb{N}$. Portanto, existe $(x_n) \subseteq X$ tal que

$$0 \leq |x_n - y| < \frac{1}{n} \text{ e } |f(x_n) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Pelo Teorema do Sanduíche, temos que $\lim x_n = y$ (ver Exemplo 2.5) e $|f(x_n) - f(y)| \geq \varepsilon$. Se $\lim f(x_n) = f(y)$ teríamos então que

$$0 = \lim |f(x_n) - f(y)| \geq \varepsilon,$$

ou seja, $\varepsilon \leq 0$. Isto é um absurdo. Dessa forma, f é contínua em y. $\square$

Exemplo 6.15. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 1, \text{ se } x \in \mathbb{Q} \text{ e } f(x) = 0, \text{ se } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q},$$

aqui f é chamada função característica de $\mathbb{Q}$. Seja $x \in \mathbb{Q}$. Assim, Pelo Exemplo 4.17, temos que $x \in \overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}$, ou seja,

$$\exists\ (x_n) \subseteq (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \text{ tal que } \lim x_n = x.$$

Por outro lado,

$$\lim f(x_n) = \lim 0 = 0 \neq 1 = f(x),$$

pois $x \in \mathbb{Q}$ e $(x_n) \subseteq (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$. Pelo Teorema 6.3, temos que f é descontínua em $x \in \mathbb{Q}$. Como $x \in \mathbb{Q}$ é arbitrário, então f é descontínua em $\mathbb{Q}$. Analogamente, f é descontínua em $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Portanto, f é uma função descontínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$.

O resultado a seguir, nos diz, em palavras, que se uma função contínua assume um valor superior a outra em algum ponto, então próximo a este determinado número esta relação de superioridade é mantida.

Teorema 6.4. *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas em $y \in X$ tais que $f(y) > g(y)$, então $\exists\ \delta > 0$ tal que*

$$\forall\ x \in X \text{ com } |x - y| < \delta, \text{ tem-se } f(x) > g(x).$$

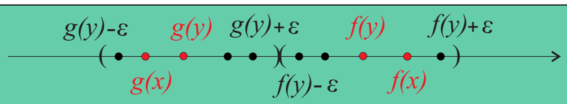

Figura 6.3: Ideia da demonstração

Demonstração. Seja

$$\varepsilon = \frac{f(y) - g(y)}{2} > 0.$$

Assim, $2\varepsilon = f(y) - g(y)$. Daí,

$$g(y) + \varepsilon = f(y) - \varepsilon.$$

Como f, g são contínuas em $y \in X$, então existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$x \in X \text{ e } |x - y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

e

$$x \in X \text{ e } |x - y| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Portanto,

$$x \in X \text{ e } |x - y| < \delta \leq \delta_1, \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ e } |g(x) - g(y)| < \varepsilon.$$

Assim sendo,

$$f(y) - \varepsilon < f(x) < f(y) + \varepsilon \text{ e } g(y) - \varepsilon < g(x) < g(y) + \varepsilon.$$

Consequentemente,

$$\forall\, x \in X \text{ com } |x - y| < \delta, \text{ tem-se } f(x) > f(y) - \varepsilon = g(y) + \varepsilon > g(x).$$

Por fim, $f(x) > g(x)$. $\square$

Vejamos como provar que se uma função contínua atinge um valor positivo ou negativo em algum ponto, então esta permence com o mesmo sinal em uma região próxima a este valor.

Corolário 6.5 (Permanência de Sinal)**.** *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua em $y \in X$ tal que $f(y) > 0$, respectivamente $f(y) < 0$, então $\exists\, \delta > 0$ tal que*

$$\forall\, x \in X \text{ com } |x - y| < \delta, \text{ tem-se } f(x) > 0,$$

respectivamente, $f(x) < 0$.

Demonstração. Defina $g : X \to \mathbb{R}$ por $g(x) = 0$. Assim, g é constante. Logo, g é contínua (ver Exemplo 6.4) e $g(y) = 0 < f(y)$, respectivamente, $g(y) = 0 > f(y)$. Dessa forma, usando o Teorema 6.4, temos que $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$\forall\, x \in X \text{ com } |x - y| < \delta, \text{ tem-se } f(x) > g(x) = 0,$$

respectivamente, $f(x) < g(x) = 0$. $\square$

Exemplo 6.16. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções contínuas com $g(y) \neq 0$, para algum $y \in X$. Assim, pelo Corolário 6.5, temos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall\, x \in X \text{ com } |x - y| < \delta, \text{ tem-se } g(x) \neq 0.$$

Considere a função $f/g : D \to \mathbb{R}$ definida por

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x), \forall\, x \in D.$$

Observe que o domínio D desta função contém somente pontos em que g não se anula. Dessa forma, qualquer $x \in X$ que satisfaz $|x - y| < \delta$ está em D. Ou seja, existe $\delta > 0$ tal que $X \cap (y - \delta, y + \delta) \subseteq D$.

Exercícios de Fixação

1. Estabeleça, através da Definição 6.2, quando uma função é descontínua em um ponto do seu domínio.

2. Seja $b \in (a, c)$. Suponha que f e g sejam contínuas em $[a, b]$ e $[b, c]$, respectivamente. Considere que $f(b) = g(b)$. Defina $h : [a, c] \to \mathbb{R}$ por $h(x) = f(x)$, para $x \in [a, b]$ e $h(x) = g(x)$, para $x \in (b, c]$. Prove que h é contínua em $[a, c]$.

3. Seja f definida por $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$, para $x \neq 2$. f pode ser definida em $x = 2$ de forma que f seja contínua em 2?

4. Sejam $k > 0$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$. Prove que f é contínua.

5. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = 2x$, se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = x + 3$, se $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Encontre todos os pontos em que f é contínua.

6.3 Operações Elementares com Funções Contínuas

Nesta seção, apresentaremos as operações mais elementares envolvendo funções contínuas. Veremos que se somarmos, multiplicarmos, dividirmos, subtrairmos ou compormos funções que são contínuas em algum ponto, então a aplicação resultante continuará contínua neste mesmo valor.

Teorema 6.6 (Operações Elementares com Funções Contínuas)**.** *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções contínuas em $y \in X$. Então são verdadeiras as seguintes afirmações:*

i) *A função $f+g : X \to \mathbb{R}$ é contínua em $y \in X$, em palavras, a soma de funções contínuas em y é contínua em y;*

ii) *A função $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ é contínua em $y \in X$, em palavras, o produto de funções contínuas em y é contínua em y;*

iii) *A função $f/g : D \to \mathbb{R}$ é contínua em $y \in X$, se $g(y) \neq 0$, onde D é o conjunto relatado no Exemplo* 6.16*, em palavras, a divisão de funções contínuas em y é contínua em y, desde que a função no denominador não se anule neste ponto.*

Demonstração. Sendo $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas em $y \in X$, tem-se, pelo Teorema 6.3, que $\forall\ (x_n) \subseteq X$ tal que $\lim x_n = y$, conclui-se

$$\lim f(x_n) = f(y) \text{ e } \lim g(x_n) = g(y).$$

Dessa forma, utilizando o Teorema 2.11,
i)

$$\begin{aligned} \lim(f+g)(x_n) &= \lim[f(x_n) + g(x_n)] = \lim f(x_n) + \lim g(x_n) \\ &= f(y) + g(y) = (f+g)(y). \end{aligned}$$

Portanto, usando, novamente, o Teorema 6.3, temos que $f+g$ é contínua em $y \in X$.
ii)

$$\begin{aligned} \lim(f \cdot g)(x_n) &= \lim[f(x_n) \cdot g(x_n)] = \lim f(x_n) \cdot \lim g(x_n) \\ &= f(y) \cdot g(y) = (f \cdot g)(y). \end{aligned}$$

Consequentemente, obtemos que $f \cdot g$ é contínua em $y \in X$.

iii) Pelo Exemplo 6.16, temos que $\exists\ \delta > 0$ tal que $X \cap (y-\delta, y+\delta) \subseteq D$. Assim sendo, basta analisar a continuidade de f/g em $X \cap (y-\delta, y+\delta)$, pois a continuidade num ponto é uma propriedade local. Portanto,

$$\begin{aligned} \lim(f/g)(x_n) &= \lim[f(x_n)/g(x_n)] = \lim f(x_n)/\lim g(x_n) \\ &= f(y)/g(y) = (f/g)(y), \end{aligned}$$

ou seja, f/g é contínua em y. $\square$

Obs 6.5. Os itens **i)** e **ii)** do Teorema 6.6 podem ser generalizados para uma quantidade finita de funções, ou seja, se $f_1, f_2, ..., f_n$ são contínuas em um ponto, então $f_1 + f_2 + ... + f_n$ e $f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_n$ são contínuas no mesmo valor.

Obs 6.6. Observe que segue do Teorema 6.6 **ii)** que se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em $y \in X$, então $cf : X \to \mathbb{R}$ também é, onde $c \in \mathbb{R}$ é constante. Já que toda função constante é contínua. Note também que, se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são contínuas em $y \in X$, então $f - g : X \to \mathbb{R}$ também o é, pois $f - g = f + (-g)$ (ver Teorema 6.6).

Obs 6.7. Segue diretamente do Teorema 6.6 e Observação 6.6 que se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são contínuas e $c \in \mathbb{R}$ então $f \pm g, f \cdot g, f/g, cf$ são contínuas nos seus respectivos domínios (ver Exemplo 6.16).

Exemplo 6.17. Defina $\tan : X \to \mathbb{R}$ por

$$\tan x = \frac{\text{sen} x}{\cos x}, \forall\ x \in X,$$

onde $X = \mathbb{R} \backslash \{(2z + 1)\pi/2 : z \in \mathbb{Z}\}$. Como tan é a divisão de funções contínuas e o cosseno não se anula em X, então tan é contínua em X.

Agora vejamos por que a composição de funções contínuas em um ponto resulta em uma aplicação também contínua neste mesmo valor.

Teorema 6.7 (Composição de Funções Contínuas)**.** *Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $y \in X$, tal que $f(X) \subseteq Y$. Seja $g : Y \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $f(y) \in Y$. Então $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em $y \in X$.*

Demonstração. Seja $(x_n) \subseteq X$ uma sequência tal que $\lim x_n = y$. Como f é contínua em y, então, usando o Teorema 6.3, obtemos $\lim f(x_n) = f(y)$. Assim, novamente utilizando o Teorema 6.3, encontramos

$$\lim g \circ f(x_n) = \lim g(f(x_n)) = g(f(y)) = g \circ f(y),$$

pois $(f(x_n)) \subseteq f(X) \subseteq Y$. Dessa forma, através do Teorema 6.3, $g \circ f$ é contínua em y. $\square$

Obs 6.8. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua em X, tal que $f(X) \subseteq Y$. Seja $g : Y \to \mathbb{R}$ uma função contínua em Y. Então, pelo Teorema 6.7, $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em X.

Exemplo 6.18. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = x\cos(1/x), \text{ se } x \neq 0 \text{ e } f(0) = 0.$$

Vamos mostrar que f é contínua. Com efeito, f é produto das funções contínuas x (polinômio) e $\cos(1/x)$, a qual é a composta de cosseno e $1/x$ (divisão de contínuas), quando $x \neq 0$. Portanto, pelos Teoremas 6.6 e 6.7, f é contínua em $x \neq 0$. Vamos agora verificar que f é contínua em 0. De fato,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\cos(1/x) = 0 = f(0),$$

pois

$$\lim_{x\to 0} x = 0 \text{ e } |\cos(1/x)| \leq 1,$$

ver Teorema 5.9. Portanto, f é contínua em 0. Com isso, f é contínua.

Exercícios de Fixação

1. Mostre que se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua, então $f^n : X \to \mathbb{R}$, dada por $f^n(x) = [f(x)]^n$ ($n \in \mathbb{N}$), é contínua.

2. Dê um exemplo de funções f, g descontínuas em $y \in \mathbb{R}$ tais que $f+g$ e $f \cdot g$ sejam contínuas em y.

3. Dê um exemplo de uma função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ descontínua em todos os pontos de $[0,1]$, de modo que $|f|$ seja contínua em $[0,1]$.

4. Sejam f, g contínuas em $\mathbb{R}$ e $X = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq g(x)\}$. Mostre que X é fechado.

6.4 Resultados Importantes Envolvendo Continuidade

Com as definições e resultados expostos nas seções anteriores, estamos prontos para enunciar, provar e aplicar o Teorema do Valor Intermediário. Com este intuito em mente, iniciaremos com um resultado que contém a seguinte informação: a imagem de uma intervalo por uma função contínua é novamente um intervalo.

Teorema 6.8 (Imagem Contínua de Intervalo é um Intervalo). *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua, onde $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo. Então $f(I) = \{f(x) : x \in I\} \subseteq \mathbb{R}$ é também um intervalo.*

Demonstração. Considere que $(A|B)$ é uma cisão não-trivial de $f(I)$. Logo,

$$f(I) = A \cup B,\ \overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset \text{ e } A, B \neq \emptyset.$$

Consequentemente,

$$I = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \text{ e } f^{-1}(A), f^{-1}(B) \neq \emptyset.$$

Vamos provar que $\overline{f^{-1}(A)} \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. Suponha, por absurdo, que existe $x \in \overline{f^{-1}(A)} \cap f^{-1}(B)$. Logo,

$$x \in \overline{f^{-1}(A)} \text{ e } x \in f^{-1}(B).$$

Com isso, existe $(x_n) \subseteq f^{-1}(A)$ tal que $\lim x_n = x$ e $f(x) \in B$. Como f é contínua, então, usando o Teorema 6.3, obtemos

$$\lim f(x_n) = f(x), \text{ onde } (f(x_n)) \subseteq A.$$

Portanto, $f(x) \in \overline{A}$ (ver Definição 4.3). Assim sendo, $f(x) \in \overline{A} \cap B$. Isto é um absurdo, pois $\overline{A} \cap B = \emptyset$. Analogamente, prova-se que $f^{-1}(A) \cap \overline{f^{-1}(B)} = \emptyset$. Isto nos diz que $(f^{-1}(A)|f^{-1}(B))$ é uma cisão não-trivial do intervalo I. Mas isto é uma contradição, ver Teorema 4.5. Por fim, $f(I)$ só admite cisão trivial, isto é, $f(I)$ é conexo. Por conseguinte, $f(I)$ é um intervalo (ver Teorema 4.7). □

Obs 6.9. Não é possível dizer exatamente que tipo de intervalo é o conjunto $f(I)$ no Teorema 6.8. Por exemplo, considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \cos x, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$f((0, \pi/2)) = (0, 1), f((-\pi/2, \pi/2)) = (0, 1] \text{ e } f((-4, 4)) = [-1, 1].$$

Como aplicação do último resultado, mostraremos a existência e unicidade de uma raiz n-ésima.

Exemplo 6.19 (Existência e Unicidade da Raiz n-ésima)**.** Defina $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ por

$$f(x) = x^n, \forall\, x \in [0, \infty).$$

Sabemos que f é contínua (ver Exemplo 5.8). Veja que $f(0) = 0$. Daí, pelo Teorema 6.8, temos que $f([0, \infty))$ é um intervalo contendo 0 contido em $[0, \infty)$. Como

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^n = \infty.$$

Logo, dado $A \in (0, \infty)$ existe $B > 0$ tal que

$$\forall\, x \in [0, \infty) \text{ com } x > B, \text{ tem-se } f(x) > A.$$

Dessa forma, $f(2B) > A > 0 = f(0)$. Como $f([0, \infty))$ é um intervalo e $f(0) = 0$, então existe $x \in [0, \infty)$ tal que $f(x) = A$, ou seja, $A \in f([0, \infty))$. Portanto, $f([0, \infty)) = [0, \infty)$. Isto é, f é sobrejetiva. Agora, sejam $x, y \in [0, \infty)$ com $x < y$, então $x^n < y^n$. Por conseguinte, $f(x) < f(y)$. Dessa maneira, f é injetiva. Assim, f é uma bijeção. Isto nos diz que dado $y \geq 0$,

$$\exists!\ x \geq 0 \text{ tal que } f(x) = y,$$

ou seja, $x^n = y$. Neste caso, dizemos que x é a única raiz n-ésima de y e escrevemos $x = \sqrt[n]{y}$.

Outra aplicação do Teorema 6.8 é o importantíssimo resultado enunciado abaixo.

Teorema 6.9 (Teorema do Valor Intermediário)**.** *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $c \in \mathbb{R}$. Se $f(a) < c < f(b)$, então existe $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = c$.*

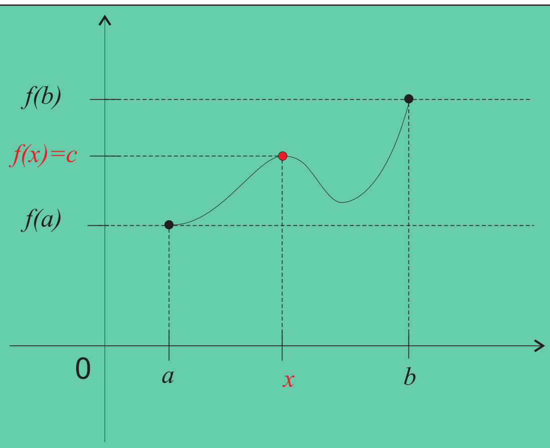

Figura 6.4: Teorema do Valor Intermediário

Demonstração. Primeiramente observe que a hipótese de continuidade sobre f nos permite concluir que $f([a,b])$ é um intervalo, ver Teorema 6.8. Como $f(a) < c < f(b)$, então, pela definição de intervalo, temos que $c \in f([a,b])$, já que $f(a), f(b) \in f([a,b])$. Isto nos diz que, existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = c$. Por fim, usando a desigualdade $f(a) < f(x) < f(b)$, inferimos que $x \in (a,b)$.

□

Como aplicação do resultado anterior, mostraremos uma maneira de provar existência de uma raiz para um determinado polinômio.

Exemplo 6.20. Considere a função polinomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1.$$

Mostraremos que p possui uma raiz em $(-1,1)$. De fato,

$$p(-1) = -17 < 0 < 3 = p(1).$$

Pelo Teorema 6.9, existe $y \in (-1,1)$ tal que $p(y) = 0$, ou seja, existe raiz de p em $(-1,1)$.

Agora, trabalharemos em uma outra aplicação do Teorema do Valor Intermediário.

Exemplo 6.21. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Considere que $f(0) = f(1)$.

Vamos mostrar que existe $y \in [0, 1/2]$ tal que $f(y) = f(y+1/2)$. Defina $g : [0, 1/2] \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = f(x) - f(x + 1/2), \forall\, x \in [0, 1/2].$$

Assim, pelos Teoremas 6.6 e 6.7, g é contínua em $[0, 1/2]$. Observe que,

$$g(0) = f(0) - f(1/2) \text{ e } g(1/2) = f(1/2) - f(1) = f(1/2) - f(0),$$

isto é, $g(0) = -g(1/2)$. Dessa forma, se $g(0) = 0$, então

$$f(0) - f(0 + 1/2) = 0,$$

ou seja, $f(0) = f(0+1/2)$, onde $y = 0 \in [0, 1/2]$. O problema está solucionado. Se $g(0) \neq 0$, então pelo fato que $g(0) = -g(1/2)$, tem-se que $g(0)$ e $g(1/2)$ tem sinais opostos. Sem perda de generalidade, suponha

$$g(0) < 0 < g(1/2).$$

Com isso, pelo Teorema 6.9, existe $y \in (0, 1/2)$ tal que $g(y) = 0$, isto é,

$$f(y) = f(y + 1/2), \text{ onde } y \in [0, 1/2].$$

Para concluirmos esta seção, exibiremos e exemplificaremos o conceito de homeomorfismo.

Definição 6.3 (Homeomorfismo)**.** Considere que $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que uma função bijetora $f : X \to Y$ é um homeomorfismo se f e f^{-1} são contínuas.

Exemplo 6.22. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x + 1, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

A função $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f^{-1}(y) = y - 1, \forall\, x \in \mathbb{R}$$

é a inversa de f (verifique!). Logo, f é bijetiva. Observe que f e f^{-1} são funções polinomiais. Consequentemente, estas funções são contínuas (ver Exemplo 5.8). Portanto, f é um homeomorfismo.

Exemplo 6.23. Sejam

$$X = [0,1) \cup [2,3] \text{ e } Y = [1,3].$$

Defina $f : X \to Y$ por

$$f(x) = x + 1, \text{ se } x \in [0,1) \text{ e } f(x) = x, \text{ se } x \in [2,3].$$

Claramente f é contínua (ver Exemplo 5.8). Verifique que a inversa de f é dada por

$$f^{-1}(y) = y - 1, \text{ se } y \in [1,2] \text{ e } f^{-1}(y) = y, \text{ se } y \in [2,3],$$

ou seja, f é bijetiva. Por outro lado, f^{-1} é descontínua em $2 \in Y$. De fato,

$$\lim_{y \to 2^-} f^{-1}(y) = \lim_{y \to 2^-} (y - 1) = 1 \neq 2 = f^{-1}(2).$$

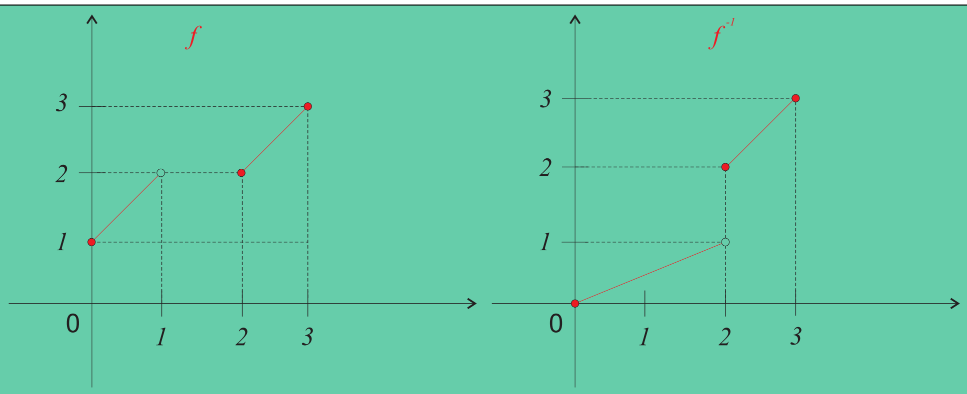

Figura 6.5: Não-homeomorfismo

Exercícios de Fixação

1. Mostre que a equação $x = \cos x$ tem solução no intervalo $[0, \pi/2]$. **Sugestão**: defina $f(x) = x - \cos x$ e use o Teorema 6.9.

2. Examine a imagem de intervalos abertos e fechados através da função $f(x) = x^3$.

6.5 Funções Reais Contínuas Definidas em Compactos

Prezado leitor, a partir deste momento estamos interessados em trabalhar no Teorema de Weierstrass. Para demonstrarmos este resultado, primeiramente provaremos que toda função contínua transforma um conjunto compacto em outro de mesma especificidade.

Teorema 6.10 (Imagem Contínua de Compacto é Compacto). *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua, onde $X \subseteq \mathbb{R}$ é compacto. Então, $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ é compacto.*

Demonstração. Vamos utilizar os Teoremas 4.10 e 6.3. Seja $(y_n) \subseteq f(X)$. Vamos provar que (y_n) possui uma subsequência que converge para um ponto de $f(X)$. Assim, existe

$$(x_n) \subseteq X \text{ tal que } f(x_n) = y_n, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Como $(x_n) \subseteq X$ e X é compacto, então, usando o Teorema 4.10, existe

$$(x_{n_k}) \text{ subsequência de } (x_n) \text{ tal que } \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in X.$$

Como f é contínua, então, utilizando o Teorema 6.3,

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x) \in f(X).$$

Assim, (y_{n_k}) é uma subsequência de (y_n) que converge para $f(x) \in f(X)$. Novamente usando o Teorema 4.10, temos que $f(X)$ é compacto. $\square$

Obs 6.10. Veja que o Teorema 6.10 nos diz que se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua, onde X é compacto, então f é limitada. Ou seja, $f(X)$ é limitado (ver Definição 4.14).

Vejamos abaixo dois exemplos que garantem que a hipótese de compacidade do Teorema acima não pode ser retirada.

Exemplo 6.24. Considere a função $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{x}, \forall\ x \in (0,1).$$

Note que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Assim sendo, $f((0,1))$ é ilimitado. Isto ocorre, pois $(0,1)$ não é compacto (limitado, mas não-fechado).

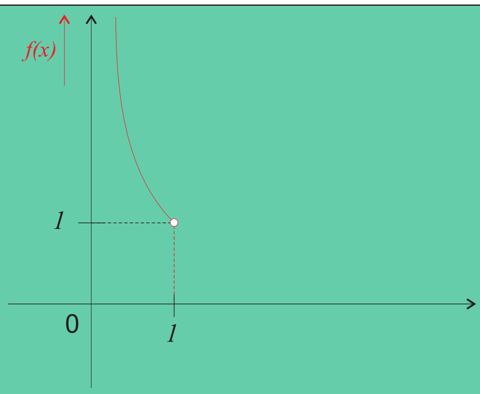

Figura 6.6: Função não-limitada

Exemplo 6.25. Considere a função $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ definida por

$$f(x) = x, \forall\, x \in [0,\infty).$$

Sabemos que f é contínua, ver Exemplo 6.9, e que $f([0,\infty) = [0,\infty)$. Consequentemente, a imagem de f não é um conjunto compacto. Isto ocorre, pois $[0,\infty)$ não é compacto (fechado, mas não limitado).

Abaixo mostraremos que toda função definida em um compacto atinge um valor máximo e outro mínimo (ver Definição 7.5).

Teorema 6.11 (Teorema de Weierstrass)**.** *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua, onde $X \subseteq \mathbb{R}$ é compacto. Então existem $a, b \in X$ tais que*

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b), \forall\, x \in X.$$

Demonstração. Pelo Teorema 6.10, $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ é compacto. Assim sendo, $f(X)$ é fechado e limitado. Vimos no Exemplo 4.14 que

$$\inf f(X), \sup f(X) \in \overline{f(X)} = f(X).$$

Assim, existem $a, b \in X$ tais que

$$\inf f(X) = f(a) \text{ e } \sup f(X) = f(b).$$

Portanto, pelas definições 1.11 e 1.12, temos que

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b), \forall\, x \in X.$$

□

Exemplo 6.26. A função $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x, \forall\, x \in (-1, 1),$$

é contínua e $f((-1, 1)) = (-1, 1)$. Ou seja, f é limitada. Por outro lado, não existe

$$a \in (-1, 1) \text{ tal que } a = f(a) \leq f(x) = x, \forall\, x \in (-1, 1).$$

Caso contrário, o intervalo $(-1, 1)$ teria um mínimo. Analogamente, não existe

$$b \in (-1, 1) \text{ tal que } x \leq b, \forall\, x \in (-1, 1).$$

Isto não contradiz o Teorema de Weierstrass, pois $(-1, 1)$ não é compacto.

A seguir, mostraremos que se acrescentarmos compacidade ao domínio de uma função bijetiva e contínua obteremos um homeomorfismo.

Teorema 6.12. *Seja $f : X \to Y$ uma bijeção contínua, onde $X \subseteq \mathbb{R}$ é compacto e $Y \subseteq \mathbb{R}$. Então, f é um homeomorfismo.*

Demonstração. Vendo a Definição 6.3, basta provar que $f^{-1} : Y \to X$ é contínua. Seja $y \in Y$. Como f é bijetiva, então $y \in Y = f(X)$. Portanto, existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$. Suponha, por absurdo, que f^{-1} não é contínua em $y \in Y$. Assim, $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $\forall\, \delta > 0$, pode-se encontrar $y_\delta \in Y$ tal que

$$|y_\delta - y| < \delta \text{ e } |f^{-1}(y_\delta) - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon.$$

Faça, $\delta = 1, 1/2, ..., 1/n, ...$, para obter $(y_n) \subseteq Y$ tal que

$$0 \leq |y_n - y| < \frac{1}{n} \text{ e } |f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon.$$

Observe que $(y_n) \subseteq Y = f(X)$. Assim, existe $(x_n) \subseteq X$ tal que $f(x_n) = y_n$. Portanto,

$$0 \leq \lim |y_n - y| \leq \lim \frac{1}{n} = 0 \text{ e } |x_n - x| = |f^{-1}(f(x_n)) - f^{-1}(f(x))| \geq \varepsilon,$$

isto é,

$$\lim f(x_n) = \lim y_n = y = f(x) \text{ e } |x_n - x| \geq \varepsilon.$$

Como X é compacto, usando o Teorema 4.10, temos que existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a \in X$. Como f é contínua, então

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(a).$$

Por outro lado, utilizando o Teorema 2.2, infere-se

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x).$$

Assim, $f(x) = f(a)$. Como f é injetiva, então $x = a$. Mas,

$$|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon, \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Por conseguinte,

$$0 = |a - x| = \lim |x_{n_k} - x| \geq \varepsilon.$$

Isto contradiz o fato $\varepsilon > 0$. Dessa forma, f^{-1} é contínua. □

Exemplo 6.27. A função seno é contínua em $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e bijetora. Pelo Teorema 6.12, a função inversa do seno, a qual é denotada por arcsen, é contínua em $[-1, 1]$.

Exercícios de Fixação

1. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(x) > 0$, $\forall\ x \in [a, b]$. Mostre que existe $y > 0$ tal que $f(x) \geq y$, $\forall\ x \in [a, b]$.

2. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que para cada $x \in [a, b]$ existe $y_x \in [a, b]$ que satisfaz $|2f(y_x)| \leq |f(x)|$. Prove que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

3. Seja $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sup\{x^2, \cos x\}$. Mostre que existe $y \in [0, \pi/2]$ tal que $f(y) \leq f(x)$, $\forall\, x \in [0, \pi/2]$. Mostre que y é solução da equação $x^2 = \cos x$.

6.6 Continuidade Uniforme com Funções Reais

Prezado leitor, a seguir, exibiremos um conceito aparentemente semelhante ao de função contínua, todavia essa nova definição tem caráter global. Seremos levados a uma teoria que tem como principal objetivo caracterizar as funções denominadas uniformemente contínuas. Entre elas, está uma classe especial as então chamadas funções Lipschitzianas. Além disso, mostraremos de que maneira podemos relacionar continuidade com continuidade uniforme.

Definição 6.4 (Continuidade Uniforme)**.** Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é uniformemente contínua, se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall\, x, y \in X \text{ com } |x - y| < \delta, \text{ tem-se } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

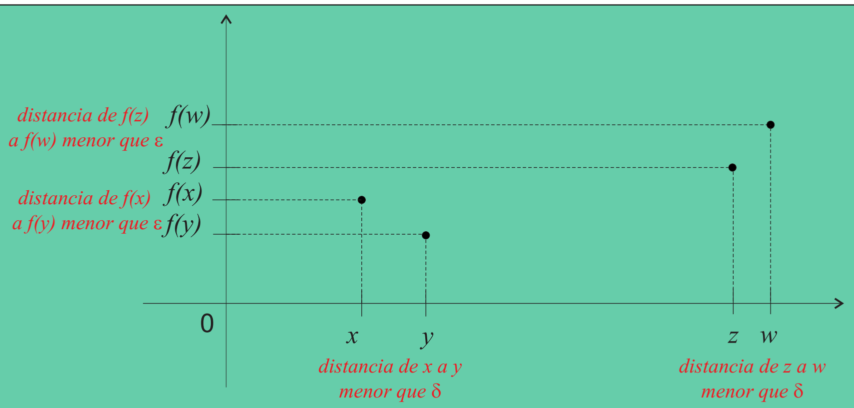

Figura 6.7: Continuidade uniforme

Obs 6.11. Na Definição 6.4 o número positivo δ depende somente de ε, i.e, $\delta = \delta(\varepsilon)$. A diferença entre continuidade uniforme e continuidade em um ponto está exatamente nesta dependência.

Obs 6.12. Segue diretamente das definições 6.2 e 6.4 que toda função uniformemente contínua é contínua.

Vejamos que a recíproca da observação anterior não é verdadeira.

Exemplo 6.28. Seja $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{x}, \forall\ x \in (0, \infty).$$

Vimos que f é contínua (ver Teorema 6.6 e Exemplo 5.8). Por outro lado, f não é uniformemente contínua. Com efeito, seja $\varepsilon = 1/2 > 0$, então para todo $\delta > 0$ existe

$$n_\delta \in \mathbb{N} \text{ tal que } n_\delta > \frac{1}{2\delta},$$

ver Teorema 1.2. Consequentemente,

$$\frac{1}{n_\delta}, \frac{1}{2n_\delta} \in (0, \infty) \text{ e } \left|\frac{1}{n_\delta} - \frac{1}{2n_\delta}\right| = \left|\frac{1}{2n_\delta}\right| = \frac{1}{2n_\delta} < \delta.$$

Além disso,

$$\left|f\left(\frac{1}{n_\delta}\right) - f\left(\frac{1}{2n_\delta}\right)\right| = |n_\delta - 2n_\delta| = n_\delta \geq 1 > 1/2 = \varepsilon,$$

ou seja, f não é uniformemente contínua.

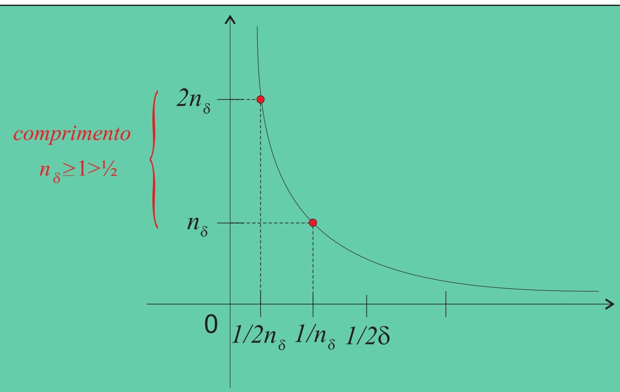

Figura 6.8: Função não uniformemente contínua

Obs 6.13. O exemplo anterior nos diz que a continuidade uniforme é um conceito global. Não é suficiente saber qual o comportamento da função próximo a um determinado ponto.

Exemplo 6.29. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = ax + b, \forall\ x \in \mathbb{R},$$

onde $a \neq 0$ e b são números reais constantes. Então,

$$|f(x) - f(y)| = |ax + b - (ay + b)| = |a(x - y)| = |a||x - y|, \forall\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \varepsilon/|a| > 0$ tal que sempre que

$$|x - y| < \delta = \frac{\varepsilon}{|a|},\ \text{tem-se}\ |f(x) - f(y)| = |a||x - y| < |a|\frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon,$$

isto é, f é uniformemente contínua.

Vamos agora estabelecer a definição de uma classe específica de funções formada por funções uniformemente contínuas.

Definição 6.5 (Função Lipschitziana)**.** Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é uma função Lipschitziana se existe $k > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \forall\ x, y \in X.$$

Neste caso, k é chamada constante de Lipschitz para função f.

Exemplo 6.30. No Exemplo 6.29 vimos que a função dada por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma função Lipschitziana com constante de Lipschitz $k = |a| > 0$.

Exemplo 6.31. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sqrt{x}, \forall\ x \in [0, 1].$$

Afirmamos que f não é uma função Lipschitziana. De fato, considere $x, y \in [0, 1]$, com $x \neq y$. Assim sendo,

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{|x - y|} = \left|\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right| = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

Considere as seguintes sequências

$$x_n = \frac{1}{n^2}\ \text{e}\ y_n = \frac{1}{4n^2} \in [0, 1].$$

Logo,

$$\frac{|f(x_n) - f(y_n)|}{|x_n - y_n|} = \frac{1}{\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{4n^2}}} = \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{1}{2n}} = \frac{2n}{3} \to \infty,$$

se $n \to \infty$. Portanto, dado $k > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{|f(x_n) - f(y_n)|}{|x_n - y_n|} > k, \forall\ n \geq N,$$

isto é,

$$|f(x_N) - f(y_N)| > k|x_N - y_N|.$$

Isto nos diz que f não é Lipschitziana.

Estamos prontos para provar que qualquer função que satisfaz a Definição 6.5 também obedece as condições dadas na Definição 6.4.

Proposição 6.2. *Toda função Lipschitziana é uniformemente contínua.*

Demonstração. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função Lipschitziana com constante de Lipschitz $k > 0$. Vamos provar que f é uniformemente contínua. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, considere que $\delta = \varepsilon/k > 0$. Com isso,

$$\forall\ x, y \in X \text{ com } |x - y| < \delta = \varepsilon/k, \text{ tem-se } |f(x) - f(y)| \leq k|x - y| < k\frac{\varepsilon}{k} < \varepsilon,$$

ou seja, f é uniformemente contínua. □

Exemplo 6.32. Defina $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ por $f(x) = 1/x$. Vimos que f não é uniformemente contínua. Logo, usando a Proposição 6.2, temos que f não é uma função Lipschitziana.

Vejamos agora uma outra maneira de definir função uniformemente contínua.

Teorema 6.13 (Caracterização de Continuidade Uniforme)**.** *Seja* $X \subseteq \mathbb{R}$. *Então,* $f : X \to \mathbb{R}$ *é uniformemente contínua* $\Leftrightarrow \forall\ (x_n), (y_n) \subseteq X$, *com* $\lim(x_n - y_n) = 0$, *tem-se* $\lim[f(x_n) - f(y_n)] = 0$.

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que f é uniformemente contínua. Assim sendo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall\ x, y \in X, \text{ com } |x - y| < \delta, \text{ tem-se } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Sejam $(x_n), (y_n) \subseteq X$, com $\lim(x_n - y_n) = 0$. Dessa forma, para $\delta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\ n \geq N, \text{ infere-se } |x_n - y_n| < \delta.$$

Portanto,
$$|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon, \forall\ n \geq N,$$
ou seja, $\lim[f(x_n) - f(y_n)] = 0$.

$\Leftarrow$) Suponha que f não é uniformemente contínua. Assim sendo, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, encontram-se $x_\delta, y_\delta \in X$ com

$$|x_\delta - y_\delta| < \delta \text{ e } |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon.$$

Faça $\delta = 1, 1/2, ..., 1/n, ...$ Logo, existem $(x_n), (y_n) \subseteq X$ tais que

$$0 \leq |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ e } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Portanto,
$$0 \leq \lim |x_n - y_n| \leq \lim \frac{1}{n} = 0,$$
isto é, $\lim(x_n - y_n) = 0$. Se $\lim[f(x_n) - f(y_n)] = 0$, então

$$0 = \lim |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Isto é uma contradição, pois $\varepsilon > 0$. Por fim, $\lim[f(x_n) - f(y_n)] \neq 0$ (se este limite existe). $\square$

Exemplo 6.33. Vamos usar o Teorema 6.13, para mostrar que a função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por
$$f(x) = \cos(x^2), \forall\ x \in \mathbb{R}$$
não é uniformemente contínua. Considere as sequências

$$x_n = \sqrt{2n\pi} \text{ e } y_n = \sqrt{(2n+1)\pi}.$$

Assim sendo,

$$\lim(x_n - y_n) = \lim[\sqrt{2n\pi} - \sqrt{(2n+1)\pi}] = \lim \frac{2n\pi - (2n+1)\pi}{\sqrt{2n\pi} + \sqrt{(2n+1)\pi}}$$

$$= \lim \frac{-\pi}{\sqrt{2n\pi} + \sqrt{(2n+1)\pi}} = 0.$$

Por outro lado,

$$\lim[f(x_n) - f(y_n)] = \lim[\cos(2n\pi) - \cos((2n+1)\pi)] = \lim(1+1) = 2 \neq 0.$$

Portanto, usando o Teorema 6.13, temos que f não é uniformemente contínua.

O teorema a seguir acrescenta uma hipótese sobre o domínio de uma função contínua de forma que esta seja uniformemente contínua.

Teorema 6.14. *Toda função real contínua definida em um conjunto compacto é uniformemente contínua.*

Demonstração. Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponha, por absurdo, que f não é uniformemente contínua. Assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, encontram-se $x_\delta, y_\delta \in X$ com

$$|x_\delta - y_\delta| < \delta \text{ e } |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon.$$

Faça, $\delta = 1, 1/2, ..., 1/n, ...$. Com isso, existem $(x_n), (y_n) \in X$ tais que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ e } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Como X é compacto, então, usando o Teorema 4.10, existe (y_{n_k}) subsequência de (y_n) tal que

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y \in X.$$

Como $0 \leq |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, então

$$0 \leq \lim |x_n - y_n| \leq \lim \frac{1}{n} = 0.$$

Dessa forma, $\lim[x_n - y_n] = 0$. Pelo Teorema 2.2, temos que $\lim[x_{n_k} - y_{n_k}] = 0$. Mas, $x_{n_k} = (x_{n_k} - y_{n_k}) + y_{n_k}$. Logo,

$$\lim x_{n_k} = \lim[x_{n_k} - y_{n_k}] + \lim y_{n_k} = 0 + y = y \in X.$$

Como f é contínua, usando o Teorema 6.3, temos que

$$\lim f(x_{n_k}) = \lim f(y_{n_k}) = f(y).$$

Por outro lado, $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$. Portanto,

$$0 = |f(y) - f(y)| = \lim |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon,$$

isto é um absurdo, pois $\varepsilon > 0$. Logo, f é uniformemente contínua. $\square$

Vejamos, no exemplo abaixo, por que a recíproca da Proposição 6.2 não é verdadeira.

Exemplo 6.34. Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ dada por $f(x) = x^2$. Vimos que f é uma bijeção contínua (ver Exemplo 5.8). Como $[0,1]$ é compacto, então pelo Teorema 6.12 f é um homeomorfismo. Ou seja, f^{-1}, a qual é dada por

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}, \forall\ x \in [0,1],$$

é contínua. Mais que isso, pelo Teorema 6.14, f^{-1} é uniformemente contínua. Vimos que f^{-1} não é Lipschitziana.

Exemplo 6.35. Seja $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sqrt{x}, \forall\ x \in [1,\infty).$$

Vamos verificar que f é Lipschitziana. De fato, se $x, y \in [1,\infty)$, obtemos $x, y \geq 1$. Consequentemente, $\sqrt{x}, \sqrt{y} \geq 1$. Portanto,

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 1 + 1 = 2,$$

ou seja, $\dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \dfrac{1}{2}$. Com isso,

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \left|\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}|x-y|.$$

Por fim,

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|.$$

Assim sendo, f é Lipschitziana com constante de Lipschitz $1/2$. Dessa forma, pela Proposição 6.2, f é uniformemente contínua em $[1,\infty)$.

Exemplo 6.36 (Continuidade da Raiz Quadrada)**.** Vimos acima que a função raiz quadrada é contínua em $[0,1]$ e $[1,\infty)$ (conjuntos fechados). Utilizando o Teorema 6.1, obtemos que a função raiz quadrada é uma função contínua em $[0, \infty)$.

O teorema a seguir mostra que uma função uniformemente contínua transforma sequências de Cauchy em sequências desta mesma categoria.

Teorema 6.15. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua, onde $X \subseteq \mathbb{R}$. Se $(x_n) \subseteq X$ é uma sequência de Cauchy, então $(f(x_n))$ também o é.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall\ x, y \in X \text{ com } |x - y| < \delta, \text{ tem-se } |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

já que f é uniformemente contínua. Como $(x_n) \subseteq X$ é uma sequência de Cauchy, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\ n, m \geq N, \text{ tem-se } |x_n - x_m| < \delta.$$

Consequentemente,

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon, \forall\ n, m \geq N.$$

Isto nos diz que $(f(x_n))$ é uma sequência de Cauchy. $\square$

A seguir, enunciaremos e provaremos uma caracterização sobre existência de limites para podermos utilizá-la no Corolário decorrente.

Lema 6.1. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X'$. Então, $\lim\limits_{x \to y} f(x)$ existe $\Leftrightarrow$ $\forall\ (x_n) \subseteq X\backslash\{y\}$ com $\lim x_n = y$, tem-se que $\lim f(x_n)$ existe.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que $\lim\limits_{x \to y} f(x)$ existe, digamos $\lim\limits_{x \to y} f(x) = l$. Usando o Teorema 5.6, para toda sequência $(x_n) \subseteq X\backslash\{y\}$ com $\lim x_n = y$, tem-se $\lim f(x_n) = l$. Consequentemente, $\lim f(x_n)$ existe.

$\Leftarrow$) Sejam $(x_n), (y_n) \subseteq X\backslash\{y\}$ com $\lim x_n = \lim y_n = y$. Vamos provar que

$$\lim f(x_n) = \lim f(y_n).$$

Seja (z_n) uma sequência definida por

$$z_{2n-1} = x_n \text{ e } z_{2n} = y_n, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Por conseguinte,

$$\lim z_{2n-1} = \lim x_n = y \text{ e } \lim z_{2n} = \lim y_n = y.$$

Com isso, $\lim z_n = y$ (ver primeira questão dos exercícios resolvidos do Capítulo sequência de números reais). Por hipótese, $\lim f(z_n)$ existe. Portanto, usando o Teorema 2.2, encontramos

$$\lim f(x_n) = \lim f(z_{2n-1}) = \lim f(z_{2n}) = \lim f(y_n).$$

Isto nos diz que, $\forall\ (x_n) \subseteq X\backslash\{y\}$ com $\lim x_n = y$, tem-se que $\lim f(x_n) = l$, para algum $l \in \mathbb{R}$. Novamente pelo Teorema 5.6, $\lim\limits_{x\to y} f(x) = l$, isto é, o primeiro limite neste Lema existe. $\square$

O Lema 6.1 nos ajudará a provar o seguinte resultado.

Corolário 6.16. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua e $y \in X'$. Então, $\lim\limits_{x\to y} f(x)$ existe.*

Demonstração. Utilizaremos o resultado exposto no Lema 6.1. Assim sendo, seja $(x_n) \subseteq X\backslash\{y\}$ tal que $\lim x_n = y$. Vamos provar que $\lim f(x_n)$ existe. Usando o Teorema 2.14, temos que (x_n) é uma sequência de Cauchy. Como f é uniformemente contínua, então, utilizando o Teorema 6.15, $(f(x_n))$ é de Cauchy. Por conseguinte, o Teorema 2.15 nos garante que $(f(x_n))$ é convergente. O Lema 6.1 nos diz que $\lim\limits_{x\to y} f(x)$ existe. $\square$

Exemplo 6.37. Defina $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \cos(1/x), \forall\ x \in \mathbb{R}^*.$$

Vimos que $\lim\limits_{x\to 0} \cos(1/x)$ não existe. Assim sendo, f não é uniformemente contínua pelo Corolário 6.16.

6.7 Operações Elementares com Continuidade Uniforme

Nesta seção, mostraremos que a continuidade uniforme é preservada pelas operações mais elementares envolvendo funções. Confira o resultado a seguir.

Teorema 6.17 (Operações com Continuidade Uniforme)**.** *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ uniformemente contínuas. Então:*

i) *$f+g$ é uniformemente contínua, ou em palavras, a soma de funções uniformemente contínuas é uniformemente contínua;*

ii) *$f \cdot g$ é uniformemente contínua se f, g são limitadas, ou em palavras, o produto de duas funções uniformemente contínuas e limitadas é uniformemente contínua;*

iii) *se $|f(x)| \geq k > 0$, $\forall\, x \in X$, então $1/f$ é uniformemente contínua em X.*

Demonstração. Sejam $(x_n), (y_n) \subseteq X$ tais que $\lim(x_n - y_n) = 0$. Como f, g são uniformemente contínuas, então, usando o Teorema 6.13, concluímos que

$$\lim[f(x_n) - f(y_n)] = 0 \text{ e } \lim[g(x_n) - g(y_n)] = 0.$$

i) Veja que

$$\begin{aligned} \lim[(f+g)(x_n) - (f+g)(y_n)] &= \lim[f(x_n) + g(x_n) - f(y_n) - g(y_n)] \\ &= \lim[f(x_n) - f(y_n) + g(x_n) - g(y_n)] \\ &= \lim[f(x_n) - f(y_n)] + \lim[g(x_n) - g(y_n)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $f+g$ é uniformemente contínua, pelo Teorema 6.13.

ii) Suponha que f, g são limitadas. Então, $(f(x_n))$ e $(g(x_n))$ são limitadas. Portanto,

$$\begin{aligned} \lim[(fg)(x_n) - (fg)(y_n)] &= \lim[f(x_n)g(x_n) - f(y_n)g(y_n)] \\ &= \lim[f(x_n)g(x_n) - f(y_n)g(x_n) + f(y_n)g(x_n) - f(y_n)g(y_n)] \\ &= \lim\{[f(x_n) - f(y_n)]g(x_n) + f(y_n)[g(x_n) - g(y_n)]\} \\ &= \lim\{[f(x_n) - f(y_n)]g(x_n)\} + \lim\{f(y_n)[g(x_n) - g(y_n)]\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

ver Teorema 2.9.

iii) Como $|f(x)| \geq k > 0, \forall\, x \in X$, então

$$1/|f(x)| \leq 1/k, \forall\, x \in X.$$

Portanto,

$$1/|f(x_n)|, 1/|f(y_n)| \leq 1/k, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$1/|f(x_n)f(y_n)| \leq 1/k^2, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Com isso, $(1/[f(x_n)f(y_n)])$ é limitada. Dessa forma,

$$\lim[1/f(x_n) - 1/f(y_n)] = \lim \left[\frac{f(y_n) - f(x_n)}{f(x_n)f(y_n)}\right] = 0,$$

pois

$$\lim[f(y_n) - f(x_n)] = -\lim[f(x_n) - f(y_n)] = 0$$

e $(1/[f(x_n)f(y_n)])$ é limitada (ver Teorema 2.9). □

Exemplo 6.38. A função $f(x) = x + \sqrt{x}$ é uniformemente contínua em $[1, \infty)$, pois as funções $g(x) = x$ e $h(x) = \sqrt{x}$ são uniformemente contínuas em $[1, \infty)$ (ver Exemplos 6.29 e 6.35)

No resultado abaixo, provaremos que a composição de funções uniformemente contínuas é novamente uma função do mesmo tipo.

Teorema 6.18. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ funções uniformemente contínuas, onde $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ e $f(X) \subseteq Y$. Então, $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ também o é.*

Demonstração. Sejam $(x_n), (y_n) \subseteq X$ sequências tais que $\lim(x_n - y_n) = 0$. Então, usando o Teorema 6.13, concluímos que $\lim[f(x_n) - f(y_n)] = 0$. Consequentemente, pelo mesmo resultado, obtemos

$$\lim[(g \circ f)(x_n) - (g \circ f)(y_n)] = \lim[g(f(x_n)) - g(f(y_n))] = 0,$$

pois $(f(x_n)), (f(y_n)) \subseteq f(X) \subseteq Y$. Novamente, o Teorema 6.13 nos ajuda a concluir que $g \circ f$ é uniformemente contínua. □

Exemplo 6.39. A função $h : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = 2x + 2\sqrt{x} + 1, \forall\ x \in [1, \infty),$$

é uniformemente contínua em $[1,\infty)$, pois $h = f \circ g$, onde

$$f(x) = 2x + 1 \text{ e } g(x) = x + \sqrt{x}.$$

Exercícios de Fixação

1. Mostre que $f(x) = 1/x$ é uniformemente contínua sobre $Y = [y,\infty)$, onde $y > 0$.

2. Mostre que a função $f(x) = x^2$ não é uniformemente contínua em $[0,\infty)$.

3. Mostre que a função $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

4. Sejam $f(x) = x$ e $g(x) = \text{sen}x$. Mostre que f e g são uniformemente contínuas em $\mathbb{R}$. Mas $f \cdot g$ não é.

6.8 Conclusão

Caro leitor, ao final desta aula, é importante ressaltar que a continuidade e a continuidade uniforme são conceitos de grande importância para Análise Matemática, como se pode constatar facilmente nos tópicos que estão por vir. Recomendo assim, uma releitura cuidadosa das definições e resultados informados neste capítulo.

6.9 Resumo

Apresentamos como identificar as funções reais contínuas e uniformementes contínuas. Mostramos também que hipóteses devemos estabelecer para relacionar estes dois conceitos. Além disso, discutimos aplicações de resultados tais como os Teoremas do Valor Intermediário e de Weierstrass, os quais serão extremamente utilizados na teoria de derivadas a seguir.

6.10 Exercícios Propostos

Exercícios:

1. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções contínuas no ponto $y \in X$. Prove que são contínuas no ponto y as funções $p, q : X \to \mathbb{R}$, definidas por: $p(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $q(x) = \min\{f(x), g(x)\}$.

2. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas. Prove que se X é aberto então $Y = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ é aberto.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Prove que se $f(x) = 0$, $\forall\ x \in X$, então $f(x) = 0$, $\forall\ x \in \overline{X}$.

4. Prove que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua $\Leftrightarrow$ $f(\overline{X}) \subseteq \overline{f(X)}, \forall\ X \subseteq \mathbb{R}$.

5. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas no ponto $z \in X$. Suponha que, $\forall\ \delta > 0$, existem $x, y \in (z - \delta, z + \delta)$ tais que $f(x) < g(x)$ e $f(y) > g(y)$. Prove que $f(z) = g(z)$.

6. Seja $f : X :\to \mathbb{R}$ descontínua no ponto $y \in X$. Prove que existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: ou se pode achar uma sequência de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = y$ e $f(x_n) > f(y) + \varepsilon$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, ou acha-se (y_n) com $y_n \in X$, $\lim y_n = y$ e $f(y_n) < f(y) - \varepsilon$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tal que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$. Prove que existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $f(y) \leq f(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

8. Prove que não existe uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que assuma cada um dos seus valores $f(x)$, $x \in [a, b]$, exatamente duas vezes.

9. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua no conjunto compacto X. Prove que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $k_\varepsilon > 0$ tal que $x, y \in X$, $|y - x| \geq \varepsilon \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq k_\varepsilon |y - x|$.

10. Mostre que a função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, não é uniformemente contínua.

11. Dada $f : X \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua, defina $g : \overline{X} \to \mathbb{R}$ pondo $g(x) = f(x)$, se $x \in X$ é um ponto isolado e $g(x) = \lim\limits_{y \to x} f(y)$ se $x \in X'$. Prove que g é uniformemente contínua e $g(x) = f(x)$, $\forall\, x \in X$.

12. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ uniformemente contínuas. Prove que $p, q : X \to \mathbb{R}$ dadas por $p(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ e $q(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $\forall\, x \in X$, são uniformemente contínuas.

13. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas. Se $\overline{Y} \subseteq X$ e $f(y) = g(y)$, $\forall\, y \in Y$, então $f|_{\overline{Y}} = g|_{\overline{Y}}$.

14. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ aberto. $f : A \to \mathbb{R}$ é contínua $\Leftrightarrow f^{-1}(B)$ é aberto, $\forall\, B \subseteq \mathbb{R}$ aberto.

15. Seja $F \subseteq \mathbb{R}$ fechado. $f : F \to \mathbb{R}$ é contínua $\Leftrightarrow f^{-1}(G)$ é fechado, $\forall\, G \subseteq \mathbb{R}$ fechado.

6.11 Exercícios Resolvidos

Questões Resolvidas:

Ex1. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas. Prove que se X é fechado então

$$Z = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

é fechado.

Demonstração. Seja $x \in \overline{Z}$. Então, existe $(x_n) \subseteq Z$ tal que $\lim x_n = x$. Como $Z \subseteq X$ e X é fechado, então

$$x \in \overline{Z} \subseteq \overline{X} = X.$$

Por outro lado, f e g são contínuas. Assim sendo, pelo Teorema 6.3,

$$\lim f(x_n) = f(x) \text{ e } \lim g(x_n) = g(x).$$

Como $(x_n) \subseteq Z$, temos que

$$f(x_n) = g(x_n), \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Dessa forma,

$$f(x) = \lim f(x_n) = \lim g(x_n) = g(x),$$

ou seja, $f(x) = g(x)$. Isto nos diz que $x \in Z$. Portanto, $\overline{Z} \subseteq Z$. Por fim, Z é fechado. □

Ex2. (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(a) \leq a$ e $b \leq f(b)$. Prove que existe $y \in [a, b]$ tal que $f(y) = y$ (y é denominado ponto fixo de f).

Demonstração. Se $f(a) \leq a$ e $b \leq f(b)$, então

$$f(a) - a \leq 0 \leq f(b) - b.$$

Se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$, o exercício está resolvido, basta considerar $y = a$ ou $y = b$, respectivamente. Caso contrário, isto é,

$$f(a) - a < 0 < f(b) - b.$$

Defina $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = f(x) - x, \forall\ x \in [a, b].$$

Como f é contínua, então pelo Exemplo 5.8 e Teorema 6.6, tem-se que g é contínua. Assim,

$$g(a) = f(a) - a < 0 < f(b) - b = g(b),$$

ou seja, $g(a) < 0 < g(b)$. Usando o Teorema 6.9, existe $y \in (a, b)$ tal que $g(y) = 0$. Isto é, $f(y) - y = 0$. Portanto, $f(y) = y$. □

Ex3. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se periódica se existe $p > 0$ tal que

$$f(x + p) = f(x), \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Prove que toda função contínua periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é limitada e existem $y, z \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(y) \leq f(x) \leq f(z), \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Por indução, prova-se que

$$f(x+np) = f(x), \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado,

$$f(x) = f(x-p+p) = f(x-p).$$

Novamente, por indução, conclui-se

$$f(x-np) = f(x), \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, $f(x+0p) = f(x)$. Portanto,

$$f(x+zp) = f(x), \forall\ z \in \mathbb{Z}.$$

Pela Proposição 6.1, $f|_{[0,p]} : [0,p] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[0,p]$. Como $[0,p]$ é compacto, então $f|_{[0,p]} : [0,p] \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua (ver Teorema 6.14). Pelo Teorema 6.11, existem $y, z \in [0,p]$ tais que

$$f(y) \leq f(x) \leq f(z), \forall\ x \in [0,p].$$

Observe que

$$\mathbb{R} = \cup_{z\in\mathbb{Z}}[zp, (z+1)p].$$

Dessa forma, dado $x \in \mathbb{R}$ existe $z_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $x \in [z_0p, (z_0+1)p]$. Com isso,

$$z_0p \leq x \leq (z_0+1)p.$$

Consequentemente, $0 \leq x - z_0p \leq p$. Com isso,

$$f(y) \leq f(x - z_0p) = f(x) \leq f(z).$$

Por conseguinte, f é limitada. □

Ex4. Dado um conjunto não-vazio $Y \subseteq \mathbb{R}$, defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pondo

$$f(x) = \inf\{|x-y| : y \in Y\}, \forall\ x \in \mathbb{R}$$

Prove que

$$|f(x) - f(z)| \leq |x-z|, \forall\ x, z \in \mathbb{R}.$$

Conclua que f é uniformemente contínua ($f(x)$ é habitualmente denotada por $d(x, Y)$ e é denominada distância do elemento x ao conjunto Y).

Demonstração. Sejam $y \in Y$ e $x, z \in \mathbb{R}$. Assim sendo,

$$f(x) = \inf\{|x-y| : y \in Y\} \leq |x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y|,$$

ou seja,

$$f(x) - |x-z| \leq |z-y|, \forall\ y \in Y.$$

Dessa forma, utilizando a Definição 1.12, temos que

$$f(x) - |x-z| \leq \inf\{|z-y| : y \in Y\} = f(z),$$

ou equivalentemente,

$$f(x) - f(z) \leq |x-z|, \forall\ x, z \in \mathbb{R}.$$

Analogamente, verifica-se que $f(z) - f(x) \leq |x-z|$. Portanto,

$$|f(x) - f(z)| \leq |x-z|, \forall\ x, z \in \mathbb{R}.$$

Isto nos diz que f é Lipschitziana com constante de Lipschitz $k = 1$. Por fim, pela Proposição 6.2, f é uniformemente contínua. □

Ex5. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas, tais que $f(r) = g(r)$, $\forall\ r \in \mathbb{Q}$, prove que $f \equiv g$.

Demonstração. Vimos que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (ver Exemplo 4.17). Vamos provar que

$$f(x) = g(x), \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Seja $x \in \mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$. Assim, existe $(x_n) \subseteq \mathbb{Q}$ tal que $\lim x_n = x$. Como f e g são contínuas em $\mathbb{R}$, então

$$\lim f(x_n) = f(x) \text{ e } \lim g(x_n) = g(x).$$

Como $(x_n) \subseteq \mathbb{Q}$, então, por hipótese

$$f(x_n) = g(x_n), \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Com isso,

$$f(x) = \lim f(x_n) = \lim g(x_n) = g(x),$$

isto é, $f(x) = g(x)$. Isto nos diz que $f \equiv g$. $\square$

Ex6. Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $y \in X$, tal que $f(X) \subseteq Y$. Seja $g : Y \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $f(y) \in Y$. Prove, utilizando a Definição 6.1, que $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em $y \in X$.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\lambda > 0$ tal que

$$\forall\ z \in Y \text{ com } |z - f(y)| < \lambda, \text{ tem-se } |g(z) - g(f(y))| < \varepsilon,$$

pois g é contínua em $f(y) \in Y$. Por outro lado, como f é contínua em $y \in X$, temos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall\ x \in X \text{ com } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \lambda.$$

Pelo que foi feito acima,

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(y)| = |g(f(x)) - g(f(y))| < \varepsilon,$$

ou seja, $g \circ f$ é contínua em $y \in X$. $\square$

Ex7. Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $c \in \mathbb{R}$. Se $f(a) < c < f(b)$, prove, usando a Definição 4.6, que existe $y \in (a, b)$ tal que $f(y) = c$.

Demonstração. Considere os seguintes conjuntos

$$A = \{y \in [a, b] : f(y) \leq c\} \text{ e } B = \{y \in [a, b] : f(y) \geq c\}.$$

Vamos mostrar que A e B são fechados. De fato, seja $y \in \overline{A}$ (respectivamente, $y \in \overline{B}$), assim existe $(x_n) \subseteq A$ (respectivamente, $(x_n) \subseteq B$) tal que $\lim x_n = y$. Como f é contínua, então $\lim f(x_n) = f(y)$. Mas

$$f(x_n) \leq c, \forall\ n \in \mathbb{N}$$

(respectivamente, $f(x_n) \geq c$), pois $x_n \in A$ (respectivamente, $x_n \in B$), $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$f(y) = \lim f(x_n) \leq c$$

(respectivamente, $f(y) \geq c$). Portanto, $y \in A$ (respectivamente, $y \in B$). Ou seja, A é fechado (respectivamente, B é fechado). Por conseguinte,

$$A \cap B = \overline{A} \cap B = A \cap \overline{B}.$$

Como $a \in A$ e $b \in B$, então

$$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \text{ e } [a, b] = A \cup B.$$

Se $A \cap B = \emptyset$, então $(A|B)$ é uma cisão não-trivial de $[a, b]$ (este é não-degenerado, pois $f(a) < f(b)$, isto é, $a \neq b$). Mas, pelo Teorema 4.5, o intervalo $[a, b]$ só admite cisão trivial. Logo, $A \cap B \neq \emptyset$. Dessa forma, existe $y \in A$ e $y \in B$. Isto é,

$$f(y) \leq c \text{ e } f(y) \geq c,$$

com $y \in [a, b]$. Portanto, $f(y) = c$. Como

$$f(a) < c = f(y) < f(b),$$

então $y \neq a$ e $y \neq b$. Por fim, encontramos $y \in (a, b)$ tal que $f(y) = c$. □

Ex8. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua, onde $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo. Prove que $f(I) = \{f(x) : x \in I\} \subseteq \mathbb{R}$ é também um intervalo, usando as definições 1.12 e 1.11.

Demonstração. Suponha, primeiramente, que f é uma função constante (contínua), isto é, $f(x) = \gamma =$ constante, $\forall\, x \in I$. Assim

$$f(I) = \{f(x) : x \in I\} = \{\gamma\} = [\gamma, \gamma],$$

isto é, $f(I)$ é um intervalo degenerado. Considere, então, que f é não-constante. Se $f(I) \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto ilimitado inferiormente (respectivamente, superiormente) denote $\inf f(I) = -\infty$ (respectivamente, $\sup f(I) = \infty$). Como f é não-constante, então existem $\alpha, \beta \in I$ tais que $f(\alpha) < f(\beta)$. Logo,

$$\inf f(I) \leq f(\alpha) < f(\beta) \leq \sup f(I),$$

ou seja, $\inf f(I) < \sup f(I)$. Seja $c \in (\inf f(I), \sup f(I))$. Com isso,

$$\inf f(I) < c < \sup f(I).$$

Pelas definições 1.12 e 1.11, existem $a, b \in I$ tais que

$$\inf f(I) \leq f(a) < c < f(b) \leq \sup f(I).$$

Como f é contínua, então, utilizando o Teorema 6.9, existe $y \in (a, b) \subseteq I$ tal que $f(y) = c$. Dessa forma, $c \in f(I)$. Por fim,

$$(\inf f(I), \sup f(I)) \subseteq f(I).$$

Isto nos leva a concluir que, $f(I)$ é um intervalo com extremos $\inf f(I)$ e $\sup f(I)$. □

Ex9. Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ limitado e $f : X \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua. Prove que f é limitada, ou seja, $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ é limitado.

Demonstração. Suponha que f é ilimitada inferiormente. Isto é, $f(X)$ é ilimitado inferiormente. Seja $x_1 \in X$. Dado $f(x_1) - 1 \in \mathbb{R}$, existe $x_2 \in X$ tal que $f(x_2) < f(x_1) - 1$. Indutivamente, existe $(x_n) \subseteq X$ tal que

$$f(x_{n+1}) < f(x_n) - 1, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Assim sendo,

$$f(x_{n+2}) < f(x_{n+1}) - 1 < f(x_n) - 1 - 1 < f(x_n) - 1, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, seguindo este processo, encontramos

$$f(x_m) < f(x_n) - 1,\ \text{se } m > n.$$

Como X é limitado, então $(x_n) \subseteq X$ é limitada. Pelo Teorema 4.9, existe (x_{n_k}) subsequência de (x_n) tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Assim,

$$\lim_{k\to\infty} [x_{n_{k+1}} - x_{n_k}] = x - x = 0.$$

Por outro lado,

$$f(x_{n_k}) - f(x_{n_{k+1}}) > 1,$$

onde $n_k < n_{k+1}$. Como f é uniformemente contínua, então

$$0 = \lim_{k\to\infty}[f(x_{n_k}) - f(x_{n_{k+1}})] \geq 1.$$

Absurdo! Ou seja, f é limitada inferiormente. Analogamente, prova-se que f é limitada superiormente. $\square$

Ex10. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua e $y \in X'$. Prove, usando a questão anterior, que $\lim_{x\to y} f(x)$ existe.

Demonstração. Vamos utilizar o Teorema 5.6. Como $y \in X'$, então existe $(x_n) \subseteq (X\backslash\{y\})$ com $\lim x_n = y$. Pelo Teorema 2.3 temos que (x_n) é limitada. Como f é uniformemente contínua, então, usando a questão anterior, temos que $(f(x_n))$ é limitada. Pelo Teorema 4.9, existe $(f(x_{n_k}))$ subsequência de $(f(x_n))$ tal que $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = l$. Seja $(y_n) \subseteq (X\backslash\{y\})$ tal que $\lim y_n = y$. Então,

$$\lim(x_n - y_n) = \lim x_n - \lim y_n = y - y = 0.$$

Como f é uniformemente contínua, então pelo Teorema 6.13, temos que

$$\lim[f(x_n) - f(y_n)] = 0.$$

Dessa forma,

$$\lim[f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})] = 0,$$

ver Teorema 2.2. Mas,

$$f(y_{n_k}) = [f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})] + f(x_{n_k}).$$

Logo,

$$\lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = \lim_{k\to\infty}[f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})] + \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = 0 + l = l.$$

Portanto, $\lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = l$. Consequentemente, $\lim f(y_n) = l$, pois $(f(y_n))$ é de Cauchy (ver Lema 2.2 e Teorema 6.15). Por fim, $\lim_{x\to y} f(x) = l$, usando o Teorema 5.6. $\square$

Ex11. Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $c \in \mathbb{R}$. Se $f(a) < c < f(b)$, prove, usando a Definição 1.11, que existe $y \in (a,b)$ tal que $f(y) = c$.

Demonstração. Defina a função $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = f(x) - c, \forall\ x \in [a,b].$$

Com isso, g é contínua, ver Teorema 6.6 e Exemplo 6.9. Além disso,

$$g(a) = f(a) - c < 0 < f(b) - c = g(b),$$

ou seja, $g(a) < 0 < g(b)$. Agora, considere o conjunto

$$X = \{x \in [a, b] : g(x) < 0\}.$$

Vamos provar que $g(\sup X) = 0$. Primeiramente observe que $X \subseteq [a, b]$, consequentemente, X é limitado. Além disso, $a \in X$, pois $g(a) < 0$. Portanto, a existência do $\sup X$ está justificada. Como $\sup X \in \overline{X}$, então existe $(x_n) \subseteq X$ tal que $\lim x_n = \sup X$. Como g é contínua, então, usando o Teorema 6.3, temos que

$$g(\sup X) = \lim g(x_n) \leq 0,$$

pois $(x_n) \subseteq X$ e, por conseguinte, $g(x_n) < 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Suponha, por absurdo, que $g(\sup X) < 0$. Assim, utilizando o Teorema 6.5, temos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{para todo } x \in [a, b] \text{ com } x \in (\sup X - \delta, \sup X + \delta), \text{ tem-se } g(x) < 0.$$

Consequentemente, $x \in X$. Agora, observe que $\sup X < b$. Com efeito, se $\sup X = b$, teríamos

$$g(b) = g(\sup X) \leq 0,$$

mas $g(b) > 0$. Logo, $\sup X < b$. Dessa forma, tomando $\gamma = \min\{\delta, (b - \sup X)/2\} > 0$, obtemos

$$\text{para todo } x \in (\sup X, \sup X + \gamma), \text{ que } x \in X.$$

Isto é um absurdo, pois $\sup X + \gamma/2 \notin X$. Por fim, $g(\sup X) = 0$, isto é $f(y) = c$, onde $y = \sup X$. É fácil ver que $y \in (a, b)$. $\square$

Auto-Avaliação

Sou capaz de verificar se uma função é contínua ou uniformemente contínua e de aplicar os Teoremas do Valor Intermediário e de Weierstarass corretamente?

Próxima Aula

Caro leitor, na próxima aula, estudaremos derivada de funções reais. Recomendo um maior esforço na compreensão dos Teoremas do Valor Intermediário e de Weierstrass, com a finalidade de um melhor entendimento das aplicações que estão por vir.

Referências Bibliográficas

[1] Alonso, M.; Finn, E. J., *Física: Um Curso Universitário.* Segunda Edição, São Paulo, Edgard Blücher Ltda, 2009. 481p.

[2] Bartle, R. G.; Sherbert, D. R., *Introdution to Real Analysis*, Third Edition, New York, JohnWiley and Sons,Inc., 2000. 399p.

[3] Boyce, W. E.; DiPrima, R. C., *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.* Seventh Edition, New York, JohnWiley and Sons,Inc, 2001. 745p.

[4] Brasil, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

[5] Brauer, F.; Nohel, J. A., *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations.* University of Wisconsin, 1989.

[6] Dragomir, S. S., *Some Gronwall Type Inequalities and Applications.* Monograph. Victoria University of Technology, 2002.

[7] Ferreira, J., *A Construção dos Números.* Primeira Edição, Rio de Janeiro, SBM, 2010. 133p.

[8] Figueiredo, D., *Análise I.* Segunda Edição, Rio de Janeiro, LTC, 2008. 266p.

[9] Guillemin, V.; Pollack, A., *Differential Topology.* First Edition, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1974. 227p.

[10] King, A.C.; Billingham, J.; OTTO, S.R., *Differential Equations.* Linear, Nonlinear, Ordinary, Partial. Cambridge University Press. New York, 2003.

[11] Lima, E. L., *Análise Real.* Funções de uma variável, vol.1. 8°. ed. Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[12] Lima, E. L., *Análise Real,* vol.2. Rio de Janeiro, 2004.

[13] Lima, E. L., *Curso de Análise*, vol. 1, Décima Segunda Edição, Rio de Janeiro, IMPA, 2008. 431p.

[14] Melo, W., *Existência de soluções clássicas para as Equações de Burgers e Navier-Stokes.* Dissertação de Mestrado. UFPE, 2007.

[15] Munkres, J. R., *Topology.* Second Edition, New Jersey, Prentice Hall, Inc., 2000. 552p.

[16] Nolt, J.; Rohatys, D.; Varzi, A., *Theory and problems or logic.* Second edition, New York, McGraw-Hill, 2009. 279p.

[17] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis.* Third Edition, New York, McGraw-Hill, Inc., 1976. 351p.

[18] Smoller, J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations.* 2nd ed., Springer-Verlag, 1994.

[19] Tveito, A.; Winther, R., *Introduction to Partial Differential Equations.* A Computational Approach. New York, 1961.

Professor Revisor

Professor Paulo de Souza Rabelo