Capítulo 7

Sétima Aula: Derivadas de Funções Reais

Meta

Apresentar a definição de funções reais deriváveis e algumas informações que podemos obter atrvés deste novo conceito, tais como: a Regra da Cadeia e o Teorema do Valor Médio. Além disso, mostrar como classificar um ponto crítico não-degenerado em ponto de máximo ou de mínimo local.

Objetivos

Ao final desta aula, o leitor deverá ser capaz de identificar quais funções são deriváveis e saber aplicar corretamente a Regra da Cadeia e o Teorema do Valor Médio.

Pré-requisitos

Aula 6, Fundamentos da Matemática e Cálculo II.

7.1 Introdução

Prezado leitor, começaremos esta aula definindo e exemplificando funções deriváveis. Logo em seguida, mostraremos que qualquer operação elementar entre funções deriváveis resulta em uma aplicação do mesmo tipo. Apresentaremos também uma fórmula que nos auxilia no cálculo da derivada de uma composta de funções, denominada Regra da Cadeia, a qual é uma ferramenta de grande utilidade na resolução de exercícios. No desenvolvimento do conteúdo, provaremos alguns teoremas que envolvem derivabilidade, como, por exemplo, os Teoremas de Darboux, de Rolle e do Valor Médio. Por fim, relacionaremos o sinal da derivada de uma função com o crescimento ou decrescimento desta mesma.

7.2 Derivadas e Exemplos

Nesta seção, discurssaremos sobre funções deriváveis. Como exemplos destas funções, temos: as funções seno, cosseno e as aplicações polinomiais. Além disso, mostraremos que qualquer função derivável é também contínua. E para concluir este tópico, definiremos e exemplificaremos derivadas laterais.

Definição 7.1 (Derivada no Ponto)**.** Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $y \in X \cap X'$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é derivável em $y \in X \cap X'$ se

$$\lim_{x \to y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(y+h) - f(y)}{h},$$

existe.

Neste caso, chamamos estes limites de derivada de f no ponto $y \in X \cap X'$ e o denotamos por

$$f'(y) = \lim_{x \to y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(y+h) - f(y)}{h}.$$

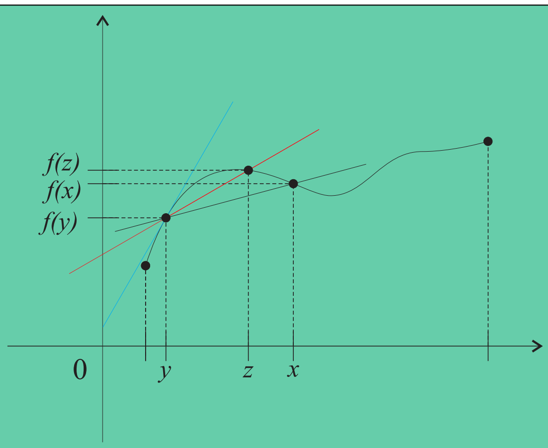

Figura 7.1: Interpretação geométrica da derivada em um ponto

Obs 7.1. Quando x tende a y, a inclinação da reta secante ao gráfico de f nos pontos $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ se aproxima da inclinação da tangente, a este mesmo gráfico, no ponto $(y, f(y))$.

Obs 7.2. Algumas outras notações, encontradas na literatura, para $f'(y)$ são $Df(y)$, $\dfrac{df}{dx}(y)$.

Vejamos uma lista de funções deriváveis no conjunto dos números reais.

Exemplo 7.1 (Derivada da Constante)**.** Seja $f : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = c, \forall\, x \in X,$$

onde c é uma constante. Seja $y \in X \cap X'$. Assim,

$$\lim_{x \to y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \lim_{x \to y} \frac{c - c}{x - y} = \lim_{x \to y} \frac{0}{x - y} = 0.$$

Ou seja, f é derivável em $y \in X \cap X'$ e $f'(y) = 0$. Isto nos diz que a derivada de uma função constante em qualquer ponto é zero.

Exemplo 7.2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = ax + b, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(y + h) - f(y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a(y + h) + b - (ay + b)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ay + ah + b - ay - b}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = \lim_{h \to 0} a = a,$$

ou seja, f é derivável em y e sua derivada é dada por $f'(y) = a$.

Exemplo 7.3. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$. Veja que,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(y+h) - f(y)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(y+h)^n - y^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) y^{n-i} h^i - y^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) y^{n-i} h^i + n y^{n-1} h + y^n - y^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) y^{n-i} h^i + n y^{n-1} h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left\{ \sum_{i=2}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) y^{n-i} h^{i-1} + n y^{n-1} \right\} \\
&= n y^{n-1},
\end{aligned}$$

pois a última soma acima sempre tem uma potência de h com expoente ≥ 1. Dessa forma, f é derivável em y e sua derivada é dada por $f'(y) = n y^{n-1}$.

Exemplo 7.4 (Derivada do Seno e do Cosseno)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela seguinte lei de transformação:

$$f(x) = \operatorname{sen} x, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Provaremos que $f'(y) = \cos y$, para qualquer y real. De fato,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(y+h) - \operatorname{sen} y}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{2 \operatorname{sen}(\frac{1}{2}h) \cos[\frac{1}{2}(2y+h)]}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}h)}{\frac{1}{2}h} \cos\left[\frac{1}{2}(2y+h)\right]
\end{aligned}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}h)}{\frac{1}{2}h} \lim_{h\to 0} \cos\left[\frac{1}{2}(2y+h)\right]$$

$$= \cos y,$$

onde, na última igualdade, utilizamos os Exemplos 5.15 e 5.6. Por fim, a função seno é derivável em y e $\operatorname{sen}'y = \cos y$. Analogamente,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\cos(y+h) - \cos y}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{-2\operatorname{sen}(\frac{1}{2}h)\operatorname{sen}[\frac{1}{2}(2y+h)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(\frac{1}{2}h)}{\frac{1}{2}h} \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}(2y+h)\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(\frac{1}{2}h)}{\frac{1}{2}h} \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}(2y+h)\right] \\
&= -\operatorname{sen} y,
\end{aligned}$$

pois a função seno é contínua (ver Exemplo 5.5). Portanto, a função cosseno é derivável em y e $\cos' y = -\operatorname{sen} y$.

Agora, daremos um exemplo clássico de uma função não derivável em um determinado ponto.

Exemplo 7.5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = |x|, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Veja que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{x} = -1.$$

Dessa forma, pelo Teorema 5.11,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0}$$

não existe, consequentemente, f não é derivável em 0.

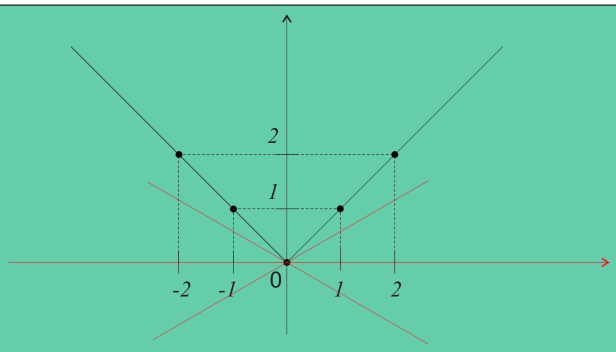

Figura 7.2: Não existe uma reta tangente ao gráfico do módulo no ponto $(0, 0)$ bem definida

Definição 7.2. Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável se f é derivável em cada ponto $y \in X \cap X'$. Neste caso, a função $g : X \cap X' \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(y) = f'(y), \forall\ y \in X \cap X',$$

é denominada função derivada de f.

Exemplo 7.6. A função constante é derivável e sua função derivada é dada através da função nula.

Exemplo 7.7. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^n, \forall\ x \in \mathbb{R},$$

é derivável e sua função derivada é dada por

$$f'(y) = ny^{n-1}, \forall\ y \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 7.8. As funções seno e cosseno são deriváveis e as respectivas funções derivadas são estabelecidas por

$$\text{sen}'(y) = \cos y \text{ e } \cos'(y) = -\text{sen } y.$$

O resultado a seguir no diz que a classe formada por funções deriváveis está contida na coleção constituída por aplicações contínuas.

Teorema 7.1. *Toda função derivável em um ponto é contínua neste mesmo valor.*

Demonstração. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ derivável em $y \in X \cap X'$. Vamos provar que f é contínua em y. De fato,

$$\lim_{x\to y}[f(x) - f(y)] = \lim_{x\to y}\left[\frac{f(x)-f(y)}{x-y}(x-y)\right] = \lim_{x\to y}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\lim_{x\to y}(x-y)$$

$$= f'(y)\cdot 0 = 0.$$

Portanto, $\lim_{x\to y} f(x) = f(y)$. Isto nos diz que f é contínua em y. □

Obs 7.3. Se uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável, então f é contínua em $X \cap X'$.

Exemplo 7.9. Considere que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função modular, isto é,

$$f(x) = |x|, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Vimos que f é contínua em 0, mas não é derivável em 0. Portanto, a recíproca do Teorema 7.1 não é verdadeira.

A partir das definições de limites laterais podemos definir derivadas laterais em um caminho óbvio. Vejamos as definições abaixo.

Definição 7.3 (Derivada à Direita)**.** Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X \cap X'_+$. O limite

$$\lim_{x\to y^+}\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(y+h)-f(y)}{h},$$

quando existe, é chamado derivada à direita de f no ponto y. Neste caso, escrevemos

$$f'_+(y) = \lim_{x\to y^+}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}.$$

Definição 7.4 (Derivada à Esquerda)**.** Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X \cap X'_-$. Se o limite

$$\lim_{x\to y^-}\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(y+h)-f(y)}{h}$$

existe, o denominamos derivada à esquerda de f no ponto y. Nesta situação, escrevemos

$$f'_-(y) = \lim_{x\to y^-}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}.$$

Exemplo 7.10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = |x|, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Vimos no Exemplo 7.9 que

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = 1$$

e que

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = -1.$$

Exemplo 7.11. Vimos no Exemplo 5.24 que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Assim, a derivada lateral à esquerda da função $f(x) = 1/x$, se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, no ponto 0, não existe no sentido da Definição 7.4.

Exercícios de Fixação

1. Utilize a Definição 7.1 para encontrar a derivada das seguintes funções:

i) $\sqrt{x}$;

ii) $1/x$, $x \neq 0$.

2. Mostre que $\sqrt[3]{x}$ não é derivável em 0.

3. Seja $f(x) = x^2$, se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$, se $x \notin \mathbb{Q}$. Mostre que f é derivável em 0 e encontre $f'(0)$.

4. Utilize a Proposição 7.1 para calcular o limite $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\ln x}$ (ver Definição 10.1).

7.3 Operações Elementares com Funções Deriváveis

Nesta seção, apresentaremos as opererações mais elementares envolvendo derivadas. Ressaltamos a fórmula da Regra da Cadeia. Esta nos ensina como calcular a derivada da composta de funções deriváveis. Por fim, provaremos uma Regra de L'Hôpital que nos auxilia na determinação de um limite que exibe uma indeterminação específica.

Teorema 7.2 (Operações com Derivadas)**.** *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$ deriváveis em $y \in X \cap X'$. Então são verdadeiras as seguintes afirmações:*

i) *$f + g : X \to \mathbb{R}$ é derivável em y e*

$$(f+g)'(y) = f'(y) + g'(y);$$

ii) *$f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ é derivável em y e*

$$(f \cdot g)'(y) = f'(y)g(y) + f(y)g'(y);$$

iii) *Se $g(y) \neq 0$, então $f/g : X \to \mathbb{R}$ é derivável em y e*

$$(f/g)'(y) = \frac{f'(y)g(y) - f(y)g'(y)}{[g(y)]^2}.$$

Demonstração. **i)** Observe que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to y} \left[\frac{(f+g)(x) - (f+g)(y)}{x-y} \right] &= \lim_{x \to y} \left[\frac{f(x) + g(x) - f(y) - g(y)}{x-y} \right] \\
&= \lim_{x \to y} \left[\frac{f(x) - f(y)}{x-y} + \frac{g(x) - g(y)}{x-y} \right] \\
&= \lim_{x \to y} \left[\frac{f(x) - f(y)}{x-y} \right] + \lim_{x \to y} \left[\frac{g(x) - g(y)}{x-y} \right] \\
&= f'(y) + g'(y),
\end{aligned}$$

Consequentemente, $f + g$ é derivável em y e $(f+g)'(y) = f'(y) + g'(y)$.

ii) Como g é derivável em y, então g é contínua neste mesmo ponto, ver Teorema 7.1, ou seja, $\lim\limits_{x\to y} g(x) = g(y)$. Com isso, pelo Exemplo 7.1, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to y}\left[\frac{(fg)(x)-(fg)(y)}{x-y}\right] &= \lim_{x\to y}\left[\frac{f(x)g(x)-f(y)g(x)+f(y)g(x)-f(y)g(y)}{x-y}\right] \\
&= \lim_{x\to y}\left\{\frac{[f(x)-f(y)]g(x)+[g(x)-g(y)]f(y)}{x-y}\right\} \\
&= \lim_{x\to y}\left[\frac{f(x)-f(y)}{x-y}g(x)\right]+\lim_{x\to y}\left[\frac{g(x)-g(y)}{x-y}f(y)\right] \\
&= \lim_{x\to y}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\lim_{x\to y}g(x)+f(y)\lim_{x\to y}\frac{g(x)-g(y)}{x-y} \\
&= f'(y)g(y)+f(y)g'(y).
\end{aligned}$$

Portanto, fg é derivável em y e $(fg)'(y) = f'(y)g(y) + f(y)g'(y)$.

iii) Como g é contínua em y e $g(y) \neq 0$, então, pelo Teorema 6.6, $\lim\limits_{x\to y}[1/g(x)] = [1/g(y)]$. Mostraremos, primeiramente, que

$$(1/g)'(y) = \frac{-g'(y)}{[g(y)]^2}.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to y}\left[\frac{(1/g)(x)-(1/g)(y)}{x-y}\right] &= \lim_{x\to y}\left[\frac{g(y)-g(x)}{g(x)g(y)(x-y)}\right] \\
&= \lim_{x\to y}\left[\frac{g(y)-g(x)}{x-y}\frac{1}{g(x)g(y)}\right] \\
&= \lim_{x\to y}\frac{g(y)-g(x)}{x-y}\lim_{x\to y}\frac{1}{g(x)g(y)} \\
&= -\frac{g'(y)}{[g(y)]^2},
\end{aligned}$$

Portanto, $(1/g)'(y) = \dfrac{-g'(y)}{[g(y)]^2}$. Com isso, por **ii)**, f/g é derivável em y e

$$\begin{aligned}(f/g)'(y) = [f \cdot (1/g)]'(y) &= f'(y)(1/g)(y) + f(y)(1/g)'(y)\\ &= f'(y)/g(y) - f(y)g'(y)/[g(y)]^2\\ &= \frac{f'(y)g(y) - f(y)g'(y)}{[g(y)]^2}.\end{aligned}$$

□

Obs 7.4. Segue por induçãoo seguinte fato: se $f_1, f_2, ..., f_n$ são deriváveis em y, então $f_1 + f_2 + ... + f_n$ e $f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_n$ são deriváveis em y,

$$(f_1 + f_2 + ... + f_n)'(y) = f_1'(y) + f_2'(y) + ... + f_n'(y)$$

e também vale

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_n)'(y) = f_1'(y)f_2(y) \cdot ... \cdot f_n(y) + f_1(y)f_2'(y) \cdot ... \cdot f_n(y) + ... + f_1(y)f_2(y) \cdot ... \cdot f_n'(y).$$

Obs 7.5. Note que se f é uma função derivável em y, então, pelo Teorema 7.2, cf também o é (ver Exemplo 7.1). Além disso,

$$(cf)'(y) = 0f(y) + cf'(y) = cf'(y),$$

isto é, $(cf)'(y) = cf'(y)$.

Obs 7.6. Sejam f, g funções deriváveis em y, então $f - g$ também o é. Basta notar que $f - g = f + (-g)$. Além disso,

$$(f - g)'(y) = [f + (-g)]'(y) = f'(y) + (-g)'(y) = f'(y) - g'(y).$$

Exemplo 7.12 (Derivada do Polinômio)**.** Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o polinômio

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Assim, pelo Teorema 7.2, concluímos que

$$p'(y) = a_1 + 2a_2y + ... + na_ny^{n-1},$$

ver Exemplos 7.1 e 7.3.

Exemplo 7.13. Sejam $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ os polinômios

$$p(x) = x + 1 \text{ e } q(x) = 2x - 1, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Assim p/q é derivável em $\mathbb{R}\backslash\{1/2\}$. Além disso,

$$(p/q)'(y) = \frac{p'(y)q(y) - p(y)q'(y)}{[q(y)]^2} = \frac{1(2y-1) - (y+1)2}{(2y-1)^2} = \frac{2y - 1 - 2y - 2}{(2y-1)^2} = \frac{-3}{(2y-1)^2},$$

onde $y \neq 1/2$.

Exemplo 7.14 (Derivada da Tangente)**.** Seja $\tan : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\tan x = \frac{\text{sen} x}{\cos x}, \forall\, x \in X,$$

onde $X = \mathbb{R}\backslash\{(2z+1)\pi/2 : z \in \mathbb{Z}\}$. Assim, pelo Teorema 7.2,

$$\tan'(x) = \frac{\text{sen}'(x)\cos(x) - \text{sen}(x)\cos'(x)}{[\cos(x)]^2} = \frac{\cos(x)\cos(x) + \text{sen}(x)\text{sen}(x)}{[\cos(x)]^2}$$
$$= \frac{\cos^2(x) + \text{sen}^2(x)}{[\cos(x)]^2} = \frac{1}{[\cos(x)]^2} = \sec^2(x),$$

onde $\sec x = 1/\cos x$ é uma função definida em $X = \mathbb{R}\backslash\{(2z+1)\pi/2 : z \in \mathbb{Z}\}$ denominada função secante.

Teorema 7.3 (Regra da Cadeia)**.** *A composta de funções deriváveis é derivável.*

Demonstração. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$, com $f(X) \subseteq Y$, deriváveis em $y \in X \cap X'$ e $f(y) \in Y \cap Y'$, respectivamente. Vamos provar que $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em y e

$$(g \circ f)'(y) = g'(f(y))f'(y).$$

Vamos utilizar o Teorema 5.6. Seja $(x_n) \subseteq X\backslash\{y\}$ tal que $\lim x_n = y$. Será provado que

$$\lim \frac{g(f(x_n)) - g(f(y))}{x_n - y} = g'(f(y))f'(y).$$

Como f é derivável em y, então, pelo Teorema 7.1, f é contínua neste mesmo ponto. Portanto, usando o Teorema 6.3, concluímos que $\lim f(x_n) = f(y)$. considere os seguintes conjuntos

$$\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N} : f(x_n) \neq f(y)\} \text{ e } \mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N} : f(x_n) = f(y)\} = \mathcal{C}\mathbb{N}_1.$$

Como $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$, então $\mathbb{N}_1$ ou $\mathbb{N}_2$ é infinito, pois $\mathbb{N}$ o é. Primeiramente considere que $\mathbb{N}_1$ é infinito e $\mathbb{N}_2$ é finito, então

$$\begin{aligned}
\lim \frac{g \circ f(x_n) - g \circ f(y)}{x_n - y} &= \lim_{n \in \mathbb{N}_1} \frac{g \circ f(x_n) - g \circ f(y)}{x_n - y} \\
&= \lim_{n \in \mathbb{N}_1} \frac{g(f(x_n)) - g(f(y))}{f(x_n) - f(y)} \frac{f(x_n) - f(y)}{x_n - y} \\
&= g'(f(y))f'(y),
\end{aligned}$$

pois $\lim f(x_n) = f(y)$, g é derivável em $f(y)$ e f é derivável em y (ver também os Teoremas 2.1, 2.2 e 5.6). Por outro lado, se $\mathbb{N}_1$ é finito e $\mathbb{N}_2$ é infinito, chegamos a

$$f'(y) = \lim_{n \in \mathbb{N}_2} \frac{f(x_n) - f(y)}{x_n - y} = \lim_{n \in \mathbb{N}_2} \frac{0}{x_n - y} = 0.$$

É verdade também que,

$$\begin{aligned}
\lim \frac{g(f(x_n)) - g(f(y))}{x_n - y} &= \lim_{n \in \mathbb{N}_2} \frac{g(f(x_n)) - g(f(y))}{x_n - y} \\
&= \lim_{n \in \mathbb{N}_2} \frac{g(f(y)) - g(f(y))}{x_n - y} \\
&= \lim_{n \in \mathbb{N}_2} \frac{0}{x_n - y} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por conseguinte,
$$\lim \frac{g(f(x_n)) - g(f(y))}{x_n - y} = g'(f(y))f'(y).$$
Por fim, se $\mathbb{N}_1$ e $\mathbb{N}_2$ são infinitos, então as igualdades

$$\lim_{n\in\mathbb{N}_1} \frac{g(f(x_n)) - g(f(y))}{x_n - y} = \lim_{n\in\mathbb{N}_2} \frac{g(f(x_n)) - g(f(y))}{x_n - y} = g'(f(y))f'(y)$$

nos permitem concluir que

$$\lim \frac{g(f(x_n)) - g(f(y))}{x_n - y} = g'(f(y))f'(y),$$

onde esta última igualdade segue de uma demonstração análoga à realizada na primeira questão dos exercícios resolvidos do Capítulo sequência de números reais. De qualquer maneira, obtemos
$$\lim \frac{g(f(x_n)) - g(f(y))}{x_n - y} = g'(f(y))f'(y),$$
isto é, $g \circ f$ é derivável em y e

$$(g \circ f)'(y) = g'(f(y))f'(y).$$

□

Obs 7.7. No Teorema 7.3 a Regra da Cadeia está estabelecida na fórmula

$$(g \circ f)'(y) = g'(f(y))f'(y),$$

encontrada na demonstração.

Exemplo 7.15. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x^2 \text{ e } g(x) = \text{sen}x, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$g \circ f(x) = \text{sen}(x^2), \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Assim, pela regra da cadeia,

$$(g \circ f)'(\sqrt{\pi}) = g'(f(\sqrt{\pi}))f'(\sqrt{\pi}) = \cos(\pi) \cdot 2\sqrt{\pi} = -2\sqrt{\pi},$$

ou seja, $(g \circ f)'(\sqrt{\pi}) = -2\sqrt{\pi}$.

Exemplo 7.16 (Derivada do Seno e do Cosseno Hiperbólicos)**.** Considere que $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ (ver Teorema 10.2). As funções $\mathrm{senh}, \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\mathrm{senh} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \text{ e } \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

são denominadas seno e cosseno hiperbólicos. Estas funções são deriváveis (ver Teorema 7.3) e suas derivadas são dadas por

$$\mathrm{senh}'(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \cosh x \text{ e } \cosh'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathrm{senh} x,$$

isto é,

$$\mathrm{senh}'(x) = \cosh x \text{ e } \cosh'(x) = \mathrm{senh} x,$$

A seguir, mostraremos, sob algumas hipóteses, que a derivada da inversa de uma função é o inverso multiplicativo da derivada desta.

Corolário 7.4 (Teorema da Função Inversa)**.** *Seja $f : X \to Y$ uma bijeção, onde $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Se f é derivável em $y \in X \cap X'$ e f^{-1} é contínua em $f(y)$, então f^{-1} é derivável em $f(y)$ se, e somente se, $f'(y) \neq 0$. Neste caso,*

$$(f^{-1})'(f(y)) = \frac{1}{f'(y)}.$$

Demonstração. Como $y \in X \cap X'$, então existe $(x_n) \subseteq X \backslash \{y\}$ tal que $\lim x_n = y$. Como f é contínua em y (ver Teorema 7.1), então $\lim f(x_n) = f(y)$ (ver Teorema 6.3). Como f é bijetiva, então $(f(x_n)) \subseteq Y \backslash \{f(y)\}$. Portanto, $f(y) \in Y \cap Y'$.

$\Rightarrow$) Considere que f^{-1} é derivável em $f(y)$. Como

$$f^{-1}(f(x)) = x, \forall\, x \in X,$$

então pelo Teorema 7.3,

$$(f^{-1})'(f(y))f'(y) = [f^{-1} \circ f]'(y) = 1.$$

Portanto, $f'(y) \neq 0$ (caso contrário, $0 = 1$) e

$$(f^{-1})'(f(y)) = \frac{1}{f'(y)}.$$

$\Leftarrow$) Suponha que $f'(y) \neq 0$. Vamos provar que f^{-1} é derivável em $f(y)$, isto é,

$$\lim_{b \to f(y)} \frac{f^{-1}(b) - f^{-1}(f(y))}{b - f(y)}$$

existe. Utilizaremos o Teorema 5.6. Seja $(y_n) \subseteq Y \backslash \{f(y)\}$ tal que $\lim y_n = f(y)$. Como f é bijetiva então existe $(x_n) \subseteq X \backslash \{y\}$ tal que

$$f(x_n) = y_n, \text{ ou seja, } x_n = f^{-1}(y_n).$$

Por outro lado, f^{-1} é contínua em $f(y)$. Assim sendo,

$$\lim x_n = \lim f^{-1}(y_n) = f^{-1}(f(y)) = y.$$

Como f é derivável em y, então, pelo Teorema 5.6, concluímos que

$$\lim \frac{f(x_n) - f(y)}{x_n - y} = f'(y).$$

Como $f'(y) \neq 0$, logo, usando o Teorema 2.11,

$$\lim \frac{x_n - y}{f(x_n) - f(y)} = \lim \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(y)}{x_n - y}} = \frac{1}{f'(y)}.$$

Portanto,

$$\lim \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(f(y))}{y_n - f(y)} = \lim \frac{f^{-1}(f(x_n)) - f^{-1}(f(y))}{f(x_n) - f(y)} = \lim \frac{x_n - y}{f(x_n) - f(y)} = \frac{1}{f'(y)}.$$

Pelo Teorema 5.6, concluímos que

$$\lim_{b \to f(y)} \frac{f^{-1}(b) - f^{-1}(f(y))}{b - f(y)} = \frac{1}{f'(y)}.$$

Isto nos diz que f^{-1} é derivável em $f(y)$ e $(f^{-1})'(f(y)) = 1/f'(y)$. $\square$

Como aplicação do último resultado, mostraremos como obter a derivada da raiz quadrada.

Exemplo 7.17 (Derivada da Raiz Quadrada)**.** Vimos que $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ dada por

$$f(x) = x^2, \forall\, x \in [0, \infty).$$

é derivável (ver Exemplo 5.8). Sabemos que $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

é a inversa de f, a qual é contínua (ver Exemplo 6.35). Observe que

$$f'(y) = 2y \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 0.$$

Assim, pelo Corolário 7.4,

$$(f^{-1})'(f(y)) = \frac{1}{f'(y)}, \forall\, y \in (0, \infty),$$

ou seja, $(f^{-1})'(y^2) = \dfrac{1}{2y}$, $\forall\, y \in (0, \infty)$. Com isso,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \forall\, x \in (0, \infty).$$

Abaixo, descrevemos uma maneira de resolver o limite de certa indeterminação usando derivadas.

Proposição 7.1 (Regra de L'Hôpital)**.** *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções deriváveis em $y \in X \cap X'$. Considere que*

$$\lim_{x \to y} f(x) = f(y) = 0 = g(y) = \lim_{x \to y} g(x)$$

e que $g'(y) \neq 0$. Então,

$$\lim_{x \to y} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

Demonstração. Com efeito, um simples cálculo nos mostra que

$$\lim_{x\to y}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to y}\frac{f(x)}{x-y}\frac{x-y}{g(x)} = \lim_{x\to y}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\frac{x-y}{g(x)-g(y)}$$

$$= \lim_{x\to y}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\frac{1}{\frac{g(x)-g(y)}{x-y}} = \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

□

Exemplo 7.18. Considere a seguinte lei de transformação:

$$f(x) = \mathrm{e}^x - 1, \forall\, x \in \mathbb{R},$$

ver Definição 10.2. Suponha que $f'(0) = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^x = 1$ (ver Teorema 10.2). Então, utilizando a Proposição 7.1, temos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = \frac{f'(0)}{1} = 1,$$

ou seja,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1.$$

Exercícios de Fixação

1. Derive as seguintes funções $f(x) = \tan(x^2)$ e $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

2. Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável em y e que $f(y) = 0$. Mostre que $g(x) = |f(x)|$ é derivável em $y \Leftrightarrow f'(y) = 0$.

3. Seja $f(x) = x^2\mathrm{sen}(1/x^2)$, se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Mostre que f é derivável.

4. Considere que a função $f(x) = x^3 + 2x + 1$ tem inversa f^{-1}. Encontre $(f^{-1})'(0), (f^{-1})'(1)$ e $(f^{-1})'(-1)$.

7.4 Comportamento Local de uma Função Real

Nesta seção, relacionaremos o conceito de derivada lateral com o crescimento ou decrescimento local de uma função, definiremos pontos de máximo e mínimo locais de uma determinada aplicação e, com isso, mostraremos quando tais pontos são críticos. Iniciaremos este tópico com o seguinte resultado.

Teorema 7.5. *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $y \in X \cap X'_-$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Suponha que $f'_-(y)$ existe e $f'_-(y) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que*

$$\textit{para todo } x \in X \cap (y-\delta, y), \ \textit{tem-se } f(x) < f(y).$$

Demonstração. Como

$$f'_-(y) = \lim_{x \to y^-} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0,$$

então, tomando $\varepsilon = f'_-(y) > 0$, concluímos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{para todo } x \in X \cap (y-\delta, y), \ \text{tem-se } \frac{f(x) - f(y)}{x - y} > f'_-(y) - \varepsilon = 0.$$

Mas,

$$x - y < 0, \forall\, x \in X \cap (y - \delta, y).$$

Dessa forma,

$$f(x) - f(y) < 0, \forall\, x \in X \cap (y - \delta, y),$$

ou seja,

$$\text{para todo } x \in X \cap (y-\delta, y), \ \text{tem-se } f(x) < f(y).$$

□

Obs 7.8. Analogamente, podemos encontrar os seguintes resultados semelhantes:

i) $f'_-(y) = \lim\limits_{x \to y^-} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} < 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0$ tal que $\forall\, x \in X \cap (y - \delta, y)$, tem-se $f(x) > f(y)$;

i) $f'_+(y) = \lim\limits_{x \to y^+} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0$ tal que $\forall\, x \in X \cap (y, y + \delta)$, tem-se $f(x) > f(y)$;

iii) $f'_+(y) = \lim\limits_{x \to y^+} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} < 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0$ tal que $\forall\, x \in X \cap (y, y + \delta)$, tem-se $f(x) < f(y)$.

O resultado a seguir nos diz, resumidamente, que se uma função é não-crescente, então as derivadas laterais existentes são não-positivas.

Corolário 7.6. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ não-crescente e $y \in X \cap X'_+$, $z \in X \cap X'_-$. Se $f'_+(y)$ e $f'_-(z)$ existem, então $f'_+(y), f'_-(z) \leq 0$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $f'_-(z) > 0$. Assim sendo, pelo Teorema 7.5, concluímos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{para todo } x \in X \cap (z-\delta, z), \text{ tem-se } f(x) < f(z).$$

Por outro lado, como f é não-crescente, então $f(x) \geq f(z)$, pois $x < z$. Mas $z \in X \cap X'_-$, assim existe $x \in X \cap (z-\delta, z)$. Daí, $f(x) < f(z) \leq f(x)$. Isto é um absurdo. Portanto, $f'_-(z) \leq 0$. Analogamente, prova-se que $f'_+(y) \leq 0$. □

Obs 7.9. Um resultado análogo ao Corolário 7.6 é o seguinte: $f : X \to \mathbb{R}$ não-decrescente e $y \in X \cap X'_+$, $z \in X \cap X'_-$. Se $f'_+(y)$ e $f'_-(z)$ existem, temos que $f'_+(y), f'_-(z) \geq 0$.

Exemplo 7.19. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = -2x^5, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

então f é derivável (ver Exemplo 7.12) e $f'(y) = -10y$. Assim, $f'(0) = 0$. Veja que f é decrescente. Mesmo assim, não podemos afirmar no Corolário 7.6 que

$$f'_-(0) = f'_+(0) = f'(0) < 0,$$

ver Teorema 5.11.

Corolário 7.7. *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $y \in X \cap X'_+ \cap X'_-$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Se f é derivável em y e $f'(y) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que*

$$\textit{para todo } x, z \in X \textit{ com } y - \delta < x < y < z < y + \delta, \textit{ tem-se } f(x) < f(y) < f(z).$$

Demonstração. Suponha que $f'(y) > 0$. Sabemos, pelo Teorema 5.11, que

$$f'(y) = f'_-(y) = f'_+(y) > 0.$$

Pelo Teorema 7.5, temos que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{para todo } x \in X \cap (y - \delta_1, y), \text{ tem-se } f(x) < f(y).$$

E também podemos encontrar $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{para todo } z \in X \cap (y, y + \delta_2), \text{ tem-se } f(y) < f(z).$$

Portanto, para $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \leq \delta_1, \delta_2$, concluímos que

$$\text{para todo } x, z \in X \text{ com } y - \delta < x < y < z < y + \delta,$$

tem-se

$$y - \delta_1 \leq y - \delta < x < y < z < y + \delta \leq y + \delta_2.$$

Por consequentemente,

$$x \in X \cap (y - \delta_1, y) \text{ e } z \in X \cap (y, y + \delta_2).$$

Com isso, $f(x) < f(y) < f(z)$. □

Vejamos como enunciar um resultado análogo ao Corolário 7.7.

Corolário 7.8. *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $y \in X \cap X'_+ \cap X'_-$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Se f é derivável em y e $f'(y) < 0$, então existe $\delta > 0$ tal que*

$$\textit{para todo } x, z \in X \textit{ com } y - \delta < x < y < z < y + \delta, \textit{ tem-se } f(z) < f(y) < f(x).$$

Demonstração. Utilize a ideia do Corolário 7.7 e a Observação 7.8. □

Definição 7.5 (Ponto de Máximo ou Mínimo Global)**.** Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $y \in X$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que y é ponto de máximo (respectivamente, mínimo) de f, se $\forall\, x \in X$, tem-se $f(x) \leq f(y)$ (respectivamente, $f(x) \geq f(y)$). Neste caso, $f(y)$ é chamado valor máximo (respectivamente, valor mínimo) de f.

Obs 7.10. O Teorema 6.11 nos diz que toda função contínua definida em um compacto possui ponto de máximo e mínimo.

Exemplo 7.20. Sabemos que

$$\cos \pi = -1 \leq \cos x \leq 1 = \cos 0, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Assim, 0 e π são pontos de máximo e de mínimo, respectivamente, para a função cosseno. Este exemplo também mostra que o ponto de máximo e de mínimo de uma função não são, necessariamente, únicos. Por exmeplo, 2π é também ponto de máximo da função cosseno.

Exemplo 7.21. A função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(n) = n, \forall\ n \in \mathbb{N}$$

é uma sequência, a qual já vimos que é ilimitada superiormente (ver Definição 2.3 e Teorema 1.2). Portanto, f não possui um ponto de máximo.

Definição 7.6 (Ponto de Máximo Local)**.** Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $y \in X$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $y \in X$ é ponto de máximo local de f, se existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{para todo } x \in X \cap (y - \delta, y + \delta), \text{ tem-se } f(x) \leq f(y).$$

Neste caso, $f(y)$ é dito valor máximo local de f.

Definição 7.7 (Ponto de Mínimo Local)**.** Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $y \in X$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma aplicação. Dizemos que $y \in X$ é ponto de mínimo local de f, se existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{para todo } x \in X \cap (y - \delta, y + \delta), \text{ tem-se } f(x) \geq f(y).$$

Neste caso, $f(y)$ é dito valor mínimo local de f.

Exemplo 7.22. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função sinal, isto é, $f(x) = \text{sgn}(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Note que, 0 não é ponto de mínimo local de f. Suponha, por absurdo, que 0 seja um ponto de mínimo local de f. Assim, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) \geq f(0) = 1, \forall\ x \in (-\delta, \delta).$$

Mas,

$$1 \leq f(-\delta/2) = -1 < 1.$$

Isto é um absurdo. Logo, 0 não é ponto de mínimo local de f.

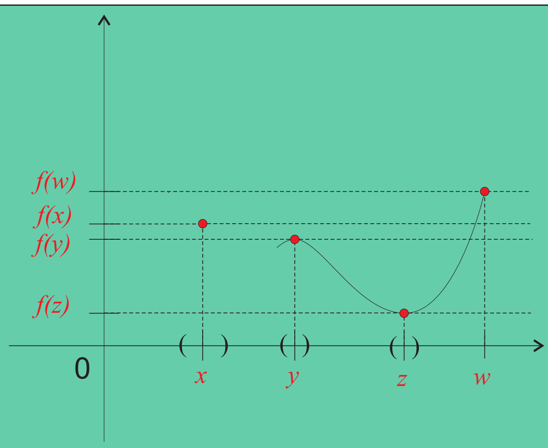

Figura 7.3: x, y, w são pontos de máximo local. x, z são pontos de mínimo local. z e w são pontos de mínimo e máximo, respectivamente.

Exemplo 7.23. No Exemplo 7.22, 0 é ponto de máximo local de f. De fato, para $\delta = 1 > 0$, tem-se

$$f(x) \leq 1 = f(0), \forall\, x \in (-1, 1).$$

Definição 7.8 (Ponto de Máximo ou Mínimo Local Estrito)**.** Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $y \in X$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que y é ponto de máximo (respectivamente, mínimo) local estrito de f, se existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{para todo } x \in (X \backslash \{y\}) \cap (y - \delta, y + \delta), \text{ tem-se } f(x) < f(y)$$

(respectivamente, $f(x) > f(y)$). Neste caso, $f(y)$ é denominado valor máximo (respectivamente, mínimo) local estrito f.

Obs 7.11. Observe que segue diretamente das definições 7.6, 7.7 e 7.8 que todo ponto de máximo (respectivamente, ponto de mínimo) local estrito é um ponto de máximo (respectivamente, ponto de mínimo) local.

Exemplo 7.24. No Exemplo 7.22 0 é ponto de máximo local, mas não é ponto de máximo local estrito de f. De fato, para todo $\delta > 0$ existe

$$\delta/2 \in (-\delta, \delta) \text{ tal que } f(\delta/2) = 1 = f(0).$$

Exemplo 7.25. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = x^3, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Observe que, 0 não é ponto de máximo, nem ponto de mínimo, local estrito de f. Com efeito, para qualquer $\delta > 0$ existem $-\delta/2, \delta/2 \in (-\delta, \delta)$ tais que

$$f(-\delta/2) = (-\delta/2)^3 = -\delta^3/8 < 0 = f(0) \text{ e } f(\delta/2) = (\delta/2)^3 = \delta^3/8 > 0 = f(0),$$

Portanto,

$$f(-\delta/2) < f(0) \text{ e } f(\delta/2) > f(0).$$

Exemplo 7.26. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^2, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Veja que 0 é ponto de mínimo local estrito de f. De fato, para $\delta = 1 > 0$, tem-se

$$f(0) = 0 < x^2 = f(x), \forall\, x \in (-1, 1)\backslash\{0\},$$

ou seja,

$$f(0) < f(x), \forall\, x \in (-1, 1)\backslash\{0\}.$$

Corolário 7.9. *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $y \in X \cap X'_-$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Se y é ponto de mínimo local de f, então $f'_-(y) \leq 0$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $f'_-(y) > 0$. Utilizando o Teorema 7.5, concluímos que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{para todo } x \in X \cap (y - \delta_1, y), \text{ tem-se } f(x) < f(y).$$

Por outro lado, como y é ponto de mínimo local de f, então existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$f(y) \leq f(x), \forall\, x \in X \cap (y - \delta_2, y + \delta_2).$$

Escolha $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Portanto, seja $x \in X \cap (y - \delta, y)$ (x existe, pois $y \in X \cap X'_-$), com isso

$$x \in X \text{ e } y - \delta_1, y - \delta_2 \leq y - \delta < x < y < y + \delta_2.$$

Dessa forma, $f(x) < f(y) \leq f(x)$. Absurdo! Por fim, $f'_-(y) \leq 0$. □

Obs 7.12. Analogamente ao que foi feito no Corolário 7.9 e Observação 7.8, conclui-se que

i) $f'_+(y) \leq 0$, se $y \in X \cap X'_+$ é ponto de máximo local de f;

ii) $f'_+(y) \geq 0$, se $y \in X \cap X'_+$ é ponto de mínimo local de f;

iii) $f'_-(y) \geq 0$, se $y \in X \cap X'_-$ é ponto de máximo local de f.

Definição 7.9 (Ponto Crítico)**.** Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ derivável. Dizemos que $y \in X \cap X'$ é ponto crítico de f se $f'(y) = 0$.

Exemplo 7.27. Seja $f(x) = x^3$ então f é derivável e $f'(0) = 0$, isto é, 0 é ponto crítico de f. Por outro lado, $f'(1) = 3 \neq 0$. Portanto, 1 não é ponto crítico de f.

Exemplo 7.28. Vimos que

$$\text{sen}' x = \cos x, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Assim, os pontos críticos da função seno são os números da forma

$$(2z + 1)\pi/2, \forall\ z \in \mathbb{Z}.$$

O Corolário abaixo informa que todo ponto de mínimo ou máximo local de uma função derivável é ponto crítico desta mesma.

Corolário 7.10. *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ derivável em $y \in X \cap X'_- \cap X'_+$. Se y é ponto de máximo ou de mínimo local de f, então $f'(y) = 0$.*

Demonstração. Seja y um ponto de mínimo de f, então, pelo Teorema 5.6 e Corolário 7.9, concluímos que

$$0 \leq f'_+(y) = f'(y) = f'_-(y) \leq 0,$$

ou seja, $f'(y) = 0$. Se y é ponto de máximo de f, então, analogamente ao que foi feito anteriormente,

$$0 \leq f'_-(y) = f'(y) = f'_+(y) \leq 0,$$

ver Observação 7.12. Portanto, $f'(y) = 0$. □

Obs 7.13. Se f é derivável e y é ponto de máximo ou de mínimo local de f, então, pelo Corolário 7.10, y é ponto crítico de f.

Exemplo 7.29. Considere a função

$$f(x) = x^3, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Vimos que 0 não é ponto de máximo, nem de mínimo, local de f. Mas, $f'(0) = 0$. Com isso, a recíproca do Corolário 7.10 não é verdadeira.

Exercícios de Fixação

1. Encontre os pontos críticos, os máximos e mínimos locais das funções $f(x) = x^3 - 3x + 4$ e $g(x) = 3x - 4x^2$.

7.5 Teoremas Importantes sobre Derivabilidade

Caro leitor, nesta seção, veremos os teorema mais importantes sobre derivadas de funções reais. Entre eles estão os Teoremas de Rolle e do Valor Médio, que de fato, são equivalentes. Começemos com o seguinte resultado, que garantirá a inexistência de uma primitiva para uma determinada função.

Teorema 7.11 (Teorema de Darboux)**.** *Seja $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Se $f'(c) < z < f'(d)$, para algum $z \in \mathbb{R}$, então existe $a \in (c, d)$ tal que $f'(a) = z$.*

Demonstração. Como f é derivável, então, pelo Teorema 7.1, f é contínua em $[c, d]$. Lembre que $[c, d]$ é compacto. Assim sendo, usando o Teorema 6.11, existe $a \in [c, d]$ tal que

$$f(a) \leq f(x), \forall\, x \in [c, d],$$

ou seja, a é ponto de mínimo de f. Pelo Corolário 7.10, $f'(a) = 0$, se $a \in (c, d)$. Precisamos verificar que $a \neq c$ e $a \neq d$. Faremos a prova em dois casos.

Primeiramente, considere que $z = 0$. Por hipótese,

$$f'_{-}(d) = f'(d) > z = 0.$$

Utilizando o Teorema 7.5, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{para todo } x \in X \cap (d - \delta, d), \text{ tem-se } f(x) < f(d).$$

Observe que $X \cap (d-\delta, d) \neq \emptyset$, pois $d \in X'_-$ (ver Teorema 4.4). Dessa forma, $a \neq d$. Caso contrário,

$$f(x) < f(d) = f(a),$$

o que é um absurdo! (a é ponto de mínimo de f). Analogamente, prova-se que $a \neq c$. Portanto,

$$f'(a) = 0 = z, \text{ com } a \in (c, d),$$

ou seja, a é o ponto procurado.

Agora, passemos para o caso geral. Defina $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = f(x) - z, \forall\, x \in [c, d].$$

Assim, g é derivável e $g'(x) = f'(x) - z$. Consequentemente,

$$g'(c) = f'(c) - z < 0 < f'(d) - z = g'(d).$$

Usando o que foi feito nesta demonstração, existe $a \in (c, d)$ tal que

$$f'(a) - z = g'(a) = 0.$$

Por fim, $f'(a) = z$. $\square$

Vejamos uma simples aplicação do Teorema 7.11. Esta será utilizada na teoria das Integrais a Riemann.

Exemplo 7.30. Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x \in [-1, 0); \\ 1, & \text{se } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Afirmamos que não existe $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ derivável tal que

$$g'(x) = f(x), \forall\, x \in [-1, 1].$$

De fato, suponha, por absurdo, que este fato ocorra. Assim,

$$g'(-1) = f(-1) = -1 < 0 < 1 = f(1) = g'(1).$$

Com isso, $g'(-1) < 0 < g'(1)$. Pelo Teorema 7.11, existe $a \in (-1, 1)$ tal que

$$f(a) = g'(a) = 0.$$

Isto é uma contradição, pois, $f \neq 0$.

Em palavras, o resultado a seguir nos diz, sob algumas hipóteses, que se uma função assume o mesmo valor nos extremos do intervalo sobre o qual está definida, então existe algum valor no domínio que a reta tangente neste tem inclinação horizontal.

Teorema 7.12 (Teorema de Rolle)**.** *Seja* $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[c, d]$ *e derivável em* (c, d)*, onde* $f(c) = f(d)$*. Então existe* $a \in (c, d)$ *tal que* $f'(a) = 0$*.*

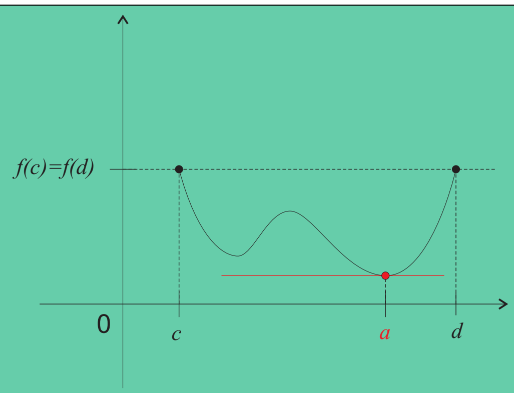

Figura 7.4: A inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ é nula.

Demonstração. Como f é contínua em $[c, d]$ e $[c, d]$ é compacto, então, usando o Teorema 6.11, existem $a_1, a_2 \in [c, d]$ tais que

$$f(a_1) \leq f(x) \leq f(a_2), \forall\ x \in [c, d].$$

Utilizando o Corolário 7.10, concluímos que

$$f'(a_1) = f'(a_2) = 0, \text{ se } a_1, a_2 \in (c, d).$$

Dessa forma, se $a_1 \in (c, d)$ ou $a_2 \in (c, d)$, temos que a é a_1 ou a_2, respectivamente. Caso contrário, se $a_1 = a_2 = c$, temos que

$$f(c) = f(a_1) \leq f(x) \leq f(a_2) = f(c), \forall\ x \in [c, d],$$

ou seja,

$$f(x) = f(c), \forall\, x \in [c, d],$$

isto é, f é constante. Com isso,

$$f'(x) = 0, \forall\, x \in [c, d],$$

ver Exemplo 7.1. Em particular, para $a = (c+d)/2$, obtemos $f'(a) = 0$. O caso $a_1 = a_2 = d$ é análogo. Se $a_1 = c$ e $a_2 = d$, então

$$f(c) = f(a_1) \leq f(x) \leq f(a_2) = f(d) = f(c), \forall\, x \in [c, d],$$

por hipótese. Assim,

$$f(x) = f(c), \forall\, x \in [c, d].$$

Portanto,

$$f'(x) = 0, \forall\, x \in [c, d].$$

Em particular, para $a = (c+d)/2$, obtemos $f'(a) = 0$. O caso $a_1 = d$ e $a_2 = c$ é análogo. $\square$

Exemplo 7.31. Seja $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ contínua em $[c, d]$ e derivável em (c, d), onde $f(c) = f(d) = 0$. Vamos provar que dado $b \in \mathbb{R}$, existe $a \in (c, d)$ tal que $f'(a) = bf(a)$. De fato, defina $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = f(x)\mathrm{e}^{-bx}, \forall\, x \in [c, d],$$

ver Definição 10.2. Dessa forma g é contínua em $[c, d]$ e derivável em (c, d), onde

$$g(c) = f(c)\mathrm{e}^{-bc} = 0 = f(d)\mathrm{e}^{-bd} = g(d).$$

Além disso,

$$g'(x) = f'(x)\mathrm{e}^{-bx} - bf(x)\mathrm{e}^{-bx} = [f'(x) - bf(x)]\mathrm{e}^{-bx},$$

ver Teoremas 7.2 e 10.2. Aplicando o Teorema 7.12 a g existe $a \in (c, d)$ tal que $g'(a) = 0$, ou seja,

$$[f'(a) - bf(a)]\mathrm{e}^{-ba} = 0.$$

Portanto, $f'(a) - bf(a) = 0$, isto é, $f'(a) = bf(a)$.

O Teorema do Valor Médio, nada mais é que o Teorema 7.12 com uma rotação no sistema de eixos que ilustra o gráfico da função em questão.

Teorema 7.13 (Teorema do Valor Médio)**.** *Seja $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ contínua em $[c, d]$ e derivável em (c, d). Então, existe $a \in (c, d)$ tal que*

$$f'(a) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c}.$$

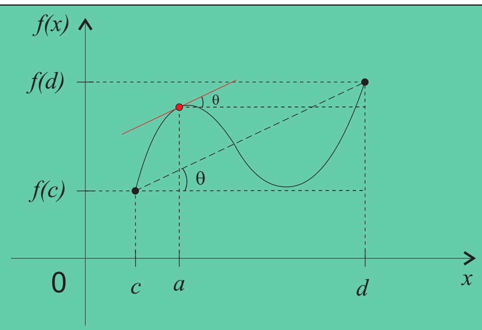

Figura 7.5: A inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ é a mesma que a da secante, a este mesmo gráfico, nos pontos $(c, f(c))$ e $(d, f(d))$.

Demonstração. Seja $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = f(x) - yx, \forall\ x \in [c, d],$$

onde $y \in \mathbb{R}$ é tal que $g(c) = g(d)$. Assim sendo,

$$g(c) = g(d) \Leftrightarrow f(c) - yc = f(d) - yd \Leftrightarrow f(d) - f(c) = yd - yc$$

$$\Leftrightarrow y(d - c) = f(d) - f(c) \Leftrightarrow y = \frac{f(d) - f(c)}{d - c}.$$

Aplicando o Teorema 7.12 a g, concluímos que existe $a \in (c, d)$ tal que $g'(a) = 0$. Ou seja, $f'(a) - y = 0$, isto é,

$$f'(a) = y = \frac{f(d) - f(c)}{d - c}.$$

□

Exemplo 7.32. Seja $x > 0$. Pelo Teorema 7.13, existe $a \in (0, x)$ tal que

$$\mathrm{sen} x - \mathrm{sen} 0 = \cos a(x - 0),$$

ver Exemplo 7.4. Logo,

$$-x \leq \text{sen}x = (\cos a)x \leq x,$$

pois $-1 \leq \cos a \leq 1$ e $x > 0$. Ou seja,

$$|\text{sen}x| \leq x, \forall\ x > 0.$$

Exemplo 7.33. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável em um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Uma raiz de f é um número $a \in I$ tal que $f(a) = 0$. Provaremos que entre duas raízes consecultivas de f' existe no máximo uma raiz de f. Considere, por absurdo, que existem $c, d \in (y, z)$ tais que

$$f(c) = f(d) = f'(y) = f'(z) = 0,$$

onde c, d são raízes de f entre as raízes consecultivas y, z de f'. Note que $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ é derivável. Dessa forma, pelo Teorema 7.13, existe $a \in (c, d)$ tal que

$$f'(a) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c} = \frac{0}{d - c} = 0.$$

Mas,

$$a \in (y, z) \text{ e } f'(a) = 0.$$

Absurdo! Pois y, z são raízes consecultivas de f'. Vejamos um exemplo para esta aplicação. Considere a função polinomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por

$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Assim, p possui exatamente uma raiz em $(1, 3)$. De fato, observe que

$$p'(x) = 3x^2 - 12x + 9, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Assim, $p'(1) = p'(3) = 0$. Com isso, 1 e 3 são raízes consecultivas de p'. Portanto, existe no máximo uma raiz de p em $(1, 3)$. Usando o Teorema 6.9, concluímos que existe $y \in (1, 3)$ tal que $p(y) = 0$, já que $p(3) < 0 < p(1)$. Assim, este y é único no intervalo $(1, 3)$.

Na verdade os Teoremas 7.12 e 7.13 são maneiras diferentes de informar o mesmo fato. Em Matemática, dizemos simplesmente que tais resultados são equivalentes. O que fizemos acima foi verificar que o Teorema de Rolle resulta o Teorema do Valor Médio, mais também é verdade que a recíproca é válida. Com efeito, se $f(c) = f(d)$, no Teorema 7.13, então existe $a \in (c, d)$ tal que

$$f'(a) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c} = 0.$$

Isto é a conclusão do Teorema 7.12.

Como aplicação do Teorema 7.13, mostraremos que toda função que possui derivada nula é constante.

Corolário 7.14. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua, onde $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo. Se*

$$f'(x) = 0, \forall\ x \in int(I),$$

então, f é constante em I.

Demonstração. Suponha que

$$f'(x) = 0, \forall\ x \in \text{int}(I).$$

Sejam $c, d \in I$, então $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[c, d]$ e derivável em $(c, d) \subseteq \text{int}(I)$. Pelo Teorema 7.13, existe $a \in (c, d)$ tal que

$$0 = f'(a) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c}.$$

Assim, $f(d) = f(c)$. Como c, d são arbitrários, então f é constante. □

Exemplo 7.34. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ tal que

$$|f(y) - f(x)| \leq l|y - x|^k, \forall\ x, y \in I,$$

onde $k > 1$, l é uma constante positiva e I é um intervalo em $\mathbb{R}$. Asim sendo, f é contínua (basta tomar $\delta = \sqrt[k]{\varepsilon/2l} > 0$ na Definição 6.1). Observe que

$$0 \leq \left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| = \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \leq \frac{l|y - x|^k}{|y - x|} \leq l|y - x|^{k-1}.$$

Dessa forma, usando o Teorema 5.5, obtemos

$$\lim_{y \to x} \left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| = 0,$$

já que $k > 1$. Com isso,

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 0.$$

Usando o Corolário 7.14, inferimos que f é constante em I.

Agora, vamos relacionar a monotonicidade de uma função com o sinal de sua derivada.

Corolário 7.15. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável, onde $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo. Então os seguintes itens são verdadeiros:*

i) *f é não-crecente $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall\, x \in I$;*

ii) *f é não-decrecente $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall\, x \in I$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) O Teorema 5.6, o Corolário 7.6 e a Observação 7.8 provam as idas dos itens **i)** e **ii)**.

$\Leftarrow$) Suponha que $f'(x) \leq 0$ (respectivamente, $f'(x) \geq 0$) $\forall\, x \in I$. Sejam $x, y \in I$ com $x < y$. Pelo Teorema 7.13, existe $a \in (x, y)$ tal que

$$f'(a) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Mas, $f'(a) \leq 0$ (respectivamente, $f'(a) \geq 0$). Portanto,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 0$$

(respectivamente, ≥ 0). Como $y - x > 0$, então $f(y) - f(x) \leq 0$ (respectivamente, $f(y) - f(x) \geq 0$). Ou seja, $f(y) \leq f(x)$ (respectivamente, $f(y) \geq f(x)$). Por fim, f é não-crescente (respectivamente, não-decrescente). □

Exemplo 7.35. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^5, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Assim, $f'(x) = 5x^4 \geq 0$. Portanto, pelo Corolário 7.15, f é uma função não-decrescente.

Exercícios de Fixação

1. Encontre os intervalos sobre os quais a função $f(x) = x^2 - 3x + 5$ é não-decrescente, não-crescente.

2. Utilize o Teorema 7.13 para provar que $|\text{sen}x - \text{sen}y| \leq |x - y|$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$.

3. Utilize o Teorema 7.13 para provar que $(x - 1)/x \leq \ln x \leq x - 1$, para $x > 1$.
Sugestão: Use o fato $\ln' x = 1/x$ (ver Teorema 10.1).

4. Seja $f(x) = 0$, se $x < 0$, e $f(x) = 1$, se $x \geq 0$. Mostre que não existe g tal que $g' \equiv f$.

5. Suponha que $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ contínua em $[0, 2]$, derivável em $(0, 2)$ e $f(0) = 0$, $f(1) = f(2) = 1$. Mostre que existem $a, b \in (0, 2)$ tais que $f'(a) = 1$ e $f'(b) = 1/3$.

7.6 Conclusão

Caro leitor, ao final desta aula, devemos ressaltar que o conceito de derivabilidade é imprescindível para a Análise Matemática. É claro que a definição dada neste material para função derivável pode não servir em alguns estudos mais avançados. Por isso, recomendamos a leitura do livro [9], para que o aluno possa encontrar uma nova interpretação para o significado de aplicação diferenciável.

7.7 Resumo

Nesta aula, apresentamos o conceito de funções deriváveis. Neste contexto, exemplificamos e mostramos propriedades elementares de tais funções. Além disso, provamos resultados como, por exemplo, o Teorema do Valor Médio, que tem aplicações realmente surpreendentes, algumas destas demonstradas na aula. Para finalizar o tópico, relacionamos a monotonicidade de uma função derivável com o estudo do sinal da derivada desta mesma.

7.8 Exercícios Propostos

Exercícios:

1. Sejam $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall\ x \in X$. Se f e h são deriváveis em $y \in X \cap X'$, com $f(y) = h(y)$ e $f'(y) = h'(y)$, prove que g é derivável em y, com $g'(y) = f'(y) = h'(y)$.

2. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ derivável em $y \in X \cap X'_+ \cap X'_-$. Se $x_n < y < y_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = \lim y_n = y$, prove que $\lim \dfrac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(y)$.

3. Dê exemplo de uma função derivável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sequências de pontos $0 < x_n < y_n$, com $\lim x_n = \lim y_n = 0$ sem que entretanto exista o limite $\lim \dfrac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$.

4. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $y \in \mathrm{int}X$. Dê um exemplo em que o limite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(y+h) - f(y-h)}{2h}$ existe porém f não é derivável em y.

5. Admitindo que $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ e que $\lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{\mathrm{e}^y}{y} = \infty$, prove que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ quando $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, possui derivada nula em 0, o mesmo ocorrendo com $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com f'' e assim por diante.

6. Seja I um intervalo com centro 0. Uma função $F : I \to \mathbb{R}$ chama-se par quando $f(-x) = f(x)$ e ímpar quando $f(-x) = -f(x)$, $\forall\ x \in I$. Se f é par, suas derivadas de ordem par (quando existem) são funções pares e suas derivadas de ordem ímpar são funções ímpares. Emparticular, estas últimas se anulam no ponto 0. Enuncie o resultado análogo para f ímpar.

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável, tal que $f(tx) = tf(x)$ para quaisquer $t, x \in \mathbb{R}$. Prove que $f(x) = f'(0)x$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Mais geralmente, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é k vezes derivável e $f(tx) = t^k f(x)$, $\forall\ t, x \in \mathbb{R}$, prove que $f(x) = [f^{(k)}(0)/k!]x^k$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

8. Dizemos que uma função f é de classe C^n, $n \in \mathbb{N}$, e escrevemos $f \in C^n$ se f é n vezes derivável e $f^{(n)}$ é contínua. Dizemos que f é de classe C^∞ e escrevemos $f \in C^\infty$ se $f \in C^n$,

$\forall\, n \in \mathbb{N}$. Dê exemplo de uma função de classe C^n que não é de classe C^{n+1}. Dê exemplo de uma função de classe C^∞.

Demonstração. Veja os Exemplos 8.2 e 8.1. $\square$

9. Dê exemplo de uma função derivável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que 0 seja limite de uma sequência de pontos críticos de f, mas $f'(0) > 0$.

10. Se $y \in I$ é um ponto crítico de $f : I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo aberto I, prove que existe $\delta > 0$ tal que y é o único ponto crítico de f no intervalo $(y - \delta, y + \delta)$. Conclua que, se f é de classe C^1, então num conjunto compacto $K \subseteq I$, onde os pontos críticos de f são todos não-degenerados, só existe um número finito destes.

11. Prove que se o ponto crítico y da função $f : I \to \mathbb{R}$ é limite de uma sequência de pontos críticos $(y_n) \subseteq I \backslash \{y\}$ e $f''(y)$ existe, então $f''(y) = 0$.

12. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log x / x$. Admitindo que $(\log)'(x) = 1/x$, indique os intervalos de crescimento e decrescimento de f, seus pontos críticos e seus limites quando $x \to 0$ e quando $x \to \infty$.

13. Faça um trabalho análogo ao do exercício anterior para a função $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \mathrm{e}^x / x$, admitindo que $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

14. Seja $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ contínua em $[c, d]$, derivável e m (c, d), exceto possivelmente em $y \in (c, d)$. Se $\lim_{x \to y} f'(x) = l$, prove que $f'(y) = l$.

15. Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio de grau ímpar. Prove que existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $p''(y) = 0$.

7.9 Exercícios Resolvidos

Questões Resolvidas:

Ex1. $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em $y \in X \cap X' \Leftrightarrow$ existe uma função $g : X \to \mathbb{R}$, contínua em y, tal que $f(x) = f(y) + g(x)(x - y)$, $\forall\, x \in X$.

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja $f : X \to \mathbb{R}$ derivável em $y \in X \cap X'$. Defina $g : X \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, \text{ se } x \neq y \text{ e } g(y) = f'(y).$$

Observe que

$$\lim_{x \to y} g(x) = \lim_{x \to y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(y) = g(y).$$

Portanto, g é contínua em $y \in X \cap X'$. Além disso,

$$g(x) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y},$$

se $x \neq y$. Logo,

$$g(x)(x - y) = f(x) - f(y),$$

se $x \neq y$, ou seja,

$$f(x) = g(x)(x - y) + f(y), \forall\, x \in X.$$

$\Leftarrow$) Seja $g : X \to \mathbb{R}$, contínua em y, tal que

$$f(x) = f(y) + g(x)(x - y), \forall\, x \in X.$$

Assim sendo,

$$\lim_{x \to y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \lim_{x \to y} g(x) = g(y),$$

pois g é contínua em y. Dessa forma, f é derivável em y e $f'(y) = g(y)$. □

Ex2. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^1, o conjunto dos seus pontos críticos é fechado.

Demonstração. Seja

$$C = \{x \in \mathbb{R} : f'(x) = 0\}$$

o conjunto dos pontos críticos de f. Vamos provar que C é fechado. Considere $y \in \overline{C}$. Dessa forma, existe $(x_n) \subseteq C$ tal que $\lim x_n = y$. Veja que

$$f'(x_n) = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Como $f \in C^1$, então f' é contínua. Portanto,

$$0 = \lim f'(x_n) = f'(y),$$

ou seja, $f'(y) = 0$, isto é, $y \in C$. Com isso, C é fechado. $\square$

Ex3. Seja $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ contínua em $[c,d]$, derivável em (c,d), com $f'(x) \geq 0$, $\forall\ x \in (c,d)$. Se $f'(x) = 0$ apenas num conjunto finito, prove que f é crescente.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que f não é crescente. Assim sendo, existem $a < b$ tais que $a, b \in [c,d]$ e $f(a) \geq f(b)$. Se $f(a) > f(b)$, então, pelo Teorema 7.13, existe $z \in (a,b) \subseteq (c,d)$ tal que

$$f'(z) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0.$$

Considerando que

$$f'(x) \geq 0, \forall\ x \in (c,d),$$

obtemos um absurdo. Consequentemente, $f(a) = f(b)$. Dessa forma, usando o Teorema 7.12, concluímos que existe $u \in (a,b) \subseteq (c,d)$, tal que $f'(u) = 0$. Agora, pela Lei da Tricotomia, temos que ou

$$f(u) = f(a), \text{ ou } f(u) > f(a) \text{ ou } f(u) < f(a).$$

Se $f(u) > f(a) = f(b)$, então pelo Teorema 7.13 existe $p \in (u,b) \subseteq (c,d)$ tal que

$$f'(p) = \frac{f(b) - f(u)}{b - u} < 0.$$

Isto é um absurdo, pois $f'(x) \geq 0$, $\forall\ x \in (c,d)$. Se $f(u) < f(a)$, então pelo Teorema 7.13 existe $q \in (a,u) \subseteq (c,d)$ tal que

$$f'(q) = \frac{f(u) - f(a)}{u - a} < 0.$$

Isto é uma contradição, já que $f'(x) \geq 0$, $\forall\ x \in (c,d)$. Logo, $f(a) = f(u)$. Portanto, utilizando o Teorema 7.12, existe $v \in (a,u) \subseteq (c,d)$ tal que $f'(v) = 0$. Continuando este processo, encontramos uma infinidade de valores em (c,d) que satisfazem $f'(x) = 0$. Isto prova o resultado por contraposição. $\square$

Auto-Avaliação

Sou capaz de identificar funções deriváveis e saber aplicar corretamente a Regra da Cadeia e o Teorema do Valor Médio?

Proxima Aula

Caro leitor, na próxima aula, estudaremos a Fórmula de Taylor. A partir desta, podemos aproximar algumas funções a um determinada aplicação polinomial, denominada polinômio de Taylor.

Referências Bibliográficas

[1] Alonso, M.; Finn, E. J., *Física: Um Curso Universitário.* Segunda Edição, São Paulo, Edgard Blücher Ltda, 2009. 481p.

[2] Bartle, R. G.; Sherbert, D. R., *Introdution to Real Analysis*, Third Edition, New York, JohnWiley and Sons,Inc., 2000. 399p.

[3] Boyce, W. E.; DiPrima, R. C., *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.* Seventh Edition, New York, JohnWiley and Sons,Inc, 2001. 745p.

[4] Brasil, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

[5] Brauer, F.; Nohel, J. A., *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations.* University of Wisconsin, 1989.

[6] Dragomir, S. S., *Some Gronwall Type Inequalities and Applications.* Monograph. Victoria University of Technology, 2002.

[7] Ferreira, J., *A Construção dos Números.* Primeira Edição, Rio de Janeiro, SBM, 2010. 133p.

[8] Figueiredo, D., *Análise I.* Segunda Edição, Rio de Janeiro, LTC, 2008. 266p.

[9] Guillemin, V.; Pollack, A., *Differential Topology.* First Edition, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1974. 227p.

[10] King, A.C.; Billingham, J.; OTTO, S.R., *Differential Equations.* Linear, Nonlinear, Ordinary, Partial. Cambridge University Press. New York, 2003.

[11] Lima, E. L., *Análise Real.* Funções de uma variável, vol.1. 8º. ed. Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[12] Lima, E. L., *Análise Real,* vol.2. Rio de Janeiro, 2004.

[13] Lima, E. L., *Curso de Análise*, vol. 1, Décima Segunda Edição, Rio de Janeiro, IMPA, 2008. 431p.

[14] Melo, W., *Existência de soluções clássicas para as Equações de Burgers e Navier-Stokes.* Dissertação de Mestrado. UFPE, 2007.

[15] Munkres, J. R., *Topology.* Second Edition, New Jersey, Prentice Hall, Inc., 2000. 552p.

[16] Nolt, J.; Rohatys, D.; Varzi, A., *Theory and problems or logic.* Second edition, New York, McGraw-Hill, 2009. 279p.

[17] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis.* Third Edition, New York, McGraw-Hill, Inc., 1976. 351p.

[18] Smoller, J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations.* 2nd ed., Springer-Verlag, 1994.

[19] Tveito, A.; Winther, R., *Introduction to Partial Differential Equations.* A Computational Approach. New York, 1961.

Professor Revisor

Professor Paulo de Souza Rabelo