Capítulo 8

Oitava Aula: Fórmula de Taylor para Funções Reais

Meta

Apresentar o conceito de derivada de ordem superior. Mostrar também que existe uma fórmula para aproximar linearmente algumas funções, denominada Fórmula de Taylor.

Objetivos

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de aplicar corretamente a Fórmula de Taylor.

Pré-requisitos

Aula 7, Fundamentos da Matemática e Cálculo II.

8.1 Introdução

Caro leitor, iniciaremos esta aula definindo e exemplificando algumas funções que possuem a propriedade de serem deriváveis mais de uma vez, isto é, conceituaremos o que significa derivada de ordem superior. Como um bom exemplo, exporemos uma fórmula para encontrar a derivada de ordem qualquer da função seno. Contribuiremos também com um contra-exemplo de uma função que não possui derivada de todas as ordens. Em seguida, provaremos o Teorema da Fórmula de Taylor Infinitesimal. Para este, exibiremos uma aplicação que relaciona o sinal da segunda derivada de uma função com seus pontos de máximo e mínimo locais. Outra aplicação, de grande importância computacional, demonstrada nesta aula, é mais uma forma da Regra de L'Hôpital. Por fim, trabalharemos em uma outra maneira de escrever a Fórmula de Taylor, esta é denominada Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange. Com esta, descreveremos um valor aproximado para o número de Euler e.

8.2 Derivadas de Ordem Superior

Caro leitor, para enunciarmos e provarmos o Teorema da Fórmula de Taylor, precisaremos da definição de derivada de ordem superior. Assim sendo, vamos começar esta seção com o seguinte conceito.

Definição 8.1 (Derivada de Ordem Superior)**.** Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo. Dizemos que $f : I \to \mathbb{R}$ é n-vezes derivável em I quando $f^{(n)}(y)$ existe, para todo $y \in I$. Aqui, $f^{(n)}(y)$ é denominada n-ésima derivada de f no ponto y e é indutivamente definida por

$$f^{(0)}(y) = f(y),\ f''(y) = (f')'(y) \text{ e } f^{(n)}(y) = (f^{(n-1)})'(y), \forall\ n = 2, 3, ...$$

Exemplo 8.1 (Derivada n-ésima do Seno)**.** Vimos, no Exemplo 7.4, que $\text{sen}'y = \cos y$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$\text{sen}''y = \cos' y = -\text{sen}y.$$

Consequentemente,

$$\text{sen}'''y = (-\text{sen})'(y) = -\cos y.$$

Dessa forma,

$$\text{sen}^{(iv)}y = (-\cos)'(y) = \text{sen}y.$$

Indutivamente, chegamos a

$$\text{sen}^{(2n)}y = (-1)^n\text{sen}y \text{ e } \text{sen}^{(2n-1)}y = (-1)^{n+1}\cos y.$$

Definição 8.2. Seja $f : I \to \mathbb{R}$, onde $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo. Dizemos que f é n vezes derivável em $y \in I$, quando existe $\delta > 0$ tal que f é $n-1$ vezes derivável em $I \cap (y-\delta, y+\delta)$ e $f^{(n)}(y)$ existe.

Exemplo 8.2. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = x^n|x|, \forall\ x \in \mathbb{R},$$

onde $n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que f não é $(n+1)$-vezes derivável em 0 e

$$f^{(n)}(x) \;=\; (n+1)!|x|, \forall\ x \in \mathbb{R}. \tag{8.1}$$

A primeira derivada é encontrada da seguinte maneira:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^n|h|-0}{h} = \lim_{h\to 0} h^{n-1}|h| = 0.$$

Pela definição de f, temos que

$$f(x) = \begin{cases} x^{n+1}, & \text{se } x > 0; \\ -x^{n+1}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Portanto,

$$f'(x) = \begin{cases} (n+1)x^n, & \text{se } x > 0; \\ -(n+1)x^n, & \text{se } x < 0; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Deste modo,

$$f'(x) = (n+1)x^{n-1}|x|, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Seguindo este raciocínio, provamos a igualdade (8.1). Por outro lado, a função modular não é derivável em 0 (ver Exemplo 7.5). Logo, não existe $f^{(n+1)}(0)$.

Exemplo 8.3 (Derivada n-ésima do Cosseno)**.** O Exemplo 7.4 afirma que $\cos' y = -\text{sen}y$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$\cos'' y = (-\text{sen})'(y) = -\cos y.$$

Logo,

$$\cos''' y = (-\cos)'(y) = \text{sen} y.$$

Consequentemente,

$$\cos^{(iv)} y = \text{sen}' y = \cos y.$$

Indutivamente, obtemos

$$\cos^{(2n)} y = (-1)^n \cos y \text{ e } \cos^{(2n-1)} y = (-1)^n \text{sen} y.$$

Exercícios de Fixação

1. Seja $f(x) = \cos(yx)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ e $y \neq 0$ é constante. Encontre $f^{(n)}(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Utilize indução para provar a seguinte regra de Leibniz.

$$(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} f^{(n-i)} g^{(i)}.$$

8.3 Resultados Importantes sobre a Fórmula de Taylor

Nesta seção, provaremos os Teoremas da Fómula de Taylor Infinitesimal e com Resto de Lagrange. Como aplicação exibiremos uma forma de determinar se um ponto crítico de uma função é ponto de máximo ou mínimo local desta, utilizando o sinal da derivada de segunda ordem. Para enunciar o Teorema da Fórmula de Taylor Infinitesimal precisaremos do seguinte resultado.

Lema 8.1. *Seja $r : J \to \mathbb{R}$ uma função n-vezes derivável em $0 \in J$, onde $J \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo. Então,*

$$r^{(i)}(0) = 0, \forall\, i \in 0, 1, 2..., n \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0.$$

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que

$$r^{(i)}(0) = 0, \forall\, i \in 0, 1, 2..., n.$$

Considere que $n = 1$. Assim, $r(0) = r'(0) = 0$. Dessa forma,

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^1} = \lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{r(h)-r(0)}{h-0} = r'(0) = 0.$$

Agora, considere que $n = 2$. Logo, $r(0) = r'(0) = r''(0) = 0$. Com isso, usando o Teorema 7.13, concluímos que existe a entre 0 e h, tal que

$$r'(a) = \frac{r(h)-r(0)}{h-0} = \frac{r(h)-0}{h} = \frac{r(h)}{h}.$$

Portanto,

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h}\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{r'(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{r'(a)}{a}\frac{a}{h}.$$

Quando $h \to 0$, tem-se que $a \to 0$. Logo,

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{r'(a)-r'(0)}{a-0}\frac{a}{h} = 0,$$

pois $r''(0) = 0$, $a/h \leq 1$ (ver Teorema 5.10). Seguindo este processo provamos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^n} = 0.$$

$\Leftarrow$) Agora, suponha que $\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^n} = 0$. Primeiramente provaremos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^i} = 0, \forall\ i = 0, 1, 2..., n.$$

De fato,

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^i} = \lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^n}h^{n-i} = \lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^n}\lim_{h\to 0}h^{n-i} = 0,$$

pois $n - i \geq 0$. Como r é derivável em 0, então, pelo Teorema 7.1, r é contínua em 0. Dessa forma,

$$r(0) = \lim_{h\to 0} r(h) = \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^0} = 0$$

Além disso,

$$r'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{r(h) - r(0)}{h - 0} = \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Defina agora, $f : J \to \mathbb{R}$ por

$$f(h) = r(h) - \frac{r''(0)h^2}{2}, \forall\ h \in J.$$

Assim sendo,

$$f(0) = r(0) - \frac{r''(0)\cdot 0}{2} = 0, f'(0) = r'(0) - r''(0)\cdot 0 = 0 \text{ e } f''(0) = r''(0) - r''(0) = 0.$$

Dessa forma, pelo que foi feito acima, $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h^2} = 0$. Por fim,

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(h)}{h^2} - \frac{r''(0)}{2}\right] = -\frac{r''(0)}{2}.$$

Consequentemente, $r''(0) = 0$. Proseguindo este raciocínio, garantimos que $r^{(i)}(0) = 0$, para todo $i = 0, 1, ..., n$. $\square$

Teorema 8.1 (Fórmula de Taylor Infinitesimal)**.** *Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função n-vezes derivável em $y \in I$. Defina $r : J \to \mathbb{R}$ por*

$$r(h) = f(y+h) - f(y) - f'(y)h - f''(y)\frac{h^2}{2!} - ... - f^{(n)}(y)\frac{h^n}{n!},$$

onde $J = \{h \in \mathbb{R} : y + h \in I\}$. Então,

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0.$$

O polinômio

$$p(h) = f(y) + f'(y)h + f''(y)\frac{h^2}{2!} + ... + f^{(n)}(y)\frac{h^n}{n!}$$

é chamado polinômio de Taylor de ordem n para a função f no ponto y. Este polinômio é único que satisfaz a definição de $r(h) = f(y+h) - p(h)$, onde $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$.

Demonstração. Como f é n-vezes derivável em $y \in I$, então, utilizando a definição de r, temos que r é n-vezes derivável em $0 \in J$ (ver Teorema 7.2). Veja que

$$r(0) = f(y) - f(y) - f'(y)0 - f''(y)\frac{0}{2!} - ... - f^{(n)}(y)\frac{0}{n!} = 0,$$

$$r'(0) = f'(y) - f'(y) - 2f''(y)\frac{0}{2!} - ... - nf^{(n)}(y)\frac{0}{n!} = 0, ..., r^{(n)}(0) = 0.$$

Usando o Lema 8.1, concluímos que $\lim_{h \to 0} r(h)/h^n = 0$. Vamos provar que o polinômio de Taylor de f é o único que satisfaz a definição de r. Suponha que existe p polinômio tal que $r(h) = f(y+h) - p(h)$, onde $\lim_{h \to 0} r(h)/h^n = 0$. Usando novamente o Lema 8.1, obtemos $r^{(i)}(0) = 0$, para todo $i = 0, 1, 2, ..., n$. Daí,

$$p^{(i)}(0) = f^{(i)}(y) - r^{(i)}(0) = f^{(i)}(y), \forall\ i = 0, 1, ..., n.$$

Dessa forma, se $p(h) = a_0 + a_1 h + ... + a_n h^n$, então

$$p^{(i)}(0) = i! a_i, \forall\ i = 0, 1, ..., n,$$

ou seja,

$$a_i = \frac{p^{(i)}(0)}{i!} = \frac{f^{(i)}(y)}{i!}, \forall\ i = 0, 1, ..., n.$$

Logo,

$$p(h) = f(y) + f'(y)h + f''(y)\frac{h^2}{2!} + ... + f^{(n)}(y)\frac{h^n}{n!}.$$

□

Obs 8.1. Como $\lim_{h \to 0} r(h)/h^n = 0$, então o polinômio de Taylor de f em y é uma aproximação de f para os pontos próximos a y.

Exemplo 8.4. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável em $y \in \text{int}I$. Considere que y é ponto crítico de f e $f''(y) \neq 0$ (neste caso, y é chamado ponto crítico não-degenerado de f). Então,

i) $f''(y) > 0 \Rightarrow y$ é ponto de mínimo local de f;

ii) $f''(y) < 0 \Rightarrow y$ é ponto de máximo local de f.

Demonstração. **i)** Como $y \in \text{int}I$, então existe $\lambda > 0$ tal que $(y-\lambda, y+\lambda) \subseteq I$ (ver Definição 4.1). Ou seja, $y + h \in I$, se $|h| < \lambda$. Utilizando o Teorema 8.1, temos que

$$f(y+h) = f(y) + f'(y)h + f''(y)\frac{h^2}{2!} + r(h),$$

onde $\lim\limits_{h\to 0} r(h)/h^2 = 0$. Com y é ponto crítico de f, então $f'(y) = 0$. Assim,

$$f(y+h) = f(y) + f''(y)\frac{h^2}{2!} + r(h).$$

Dessa forma,

$$\frac{f(y+h) - f(y)}{h^2} = \left[\frac{f''(y)}{2!} + \frac{r(h)}{h^2}\right].$$

Portanto,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(y+h) - f(y)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{f''(y)}{2!} + \frac{r(h)}{h^2}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{f''(y)}{2!} + \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^2} = \frac{f''(y)}{2!} > 0.$$

Pelo Teorema 5.2, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{para todo } h \in I, \text{ com } 0 < |h| < \delta_1, \text{ tem-se } \frac{f(y+h) - f(y)}{h^2} > 0.$$

Seja $\delta < \min\{\delta_1, \lambda\}$ um número positivo. Logo,

$$f(y+h) - f(y) > 0, \forall\ h \in I, \text{ com } 0 < |h| < \delta,$$

ou seja,

$$f(y+h) > f(y), \forall\ h \in I, \text{ com } 0 < |h| < \delta.$$

Isto nos diz que y é ponto de mínimo local de f.

ii) Novamente pelo Teorema 8.1, concluímos que

$$f(y+h) = f(y) + f'(y)h + f''(y)\frac{h^2}{2!} + r(h),$$

onde $\lim_{h\to 0} r(h)h^n = 0$. Mas, $f'(y) = 0$. Com isso,

$$f(y+h) = f(y) + f''(y)\frac{h^2}{2!} + r(h).$$

Portanto,

$$\frac{f(y+h) - f(y)}{h^2} = \left[\frac{f''(y)}{2!} + \frac{r(h)}{h^2}\right].$$

Dessa forma,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(y+h) - f(y)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{f''(y)}{2!} + \frac{r(h)}{h^2}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{f''(y)}{2!} + \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^2} = \frac{f''(y)}{2!} < 0.$$

Pelo Teorema 5.2, existe $0 < \delta < \lambda$ tal que

$$\text{para todo } h \in I, \text{ com } 0 < |h| < \delta, \text{ tem-se } \frac{f(y+h) - f(y)}{h^2} < 0.$$

Logo, $f(y+h) < f(y)$, se h é suficientemente pequeno. Por fim, y é ponto de máximo local de f. □

Agora, vejamos uma maneira de resolvermos um limite que envolve uma indeterminação.

Exemplo 8.5 (Regra de L'Hôpital)**.** Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções n-vezes deriváveis em $y \in I$. Considere que

$$f^{(i)}(y) = g^{(i)}(y) = 0, \forall\ i = 0, 1, 2, ..., n-1 \text{ e } g^{(n)}(y) \neq 0.$$

Então,

$$\lim_{x\to y} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(y)}{g^{(n)}(y)}.$$

De fato, usando o Teorema 8.1, obtemos

$$f(y+h) = f(y) + f'(y)h + f''(y)\frac{h^2}{2!} + ... + f^{(n)}(y)\frac{h^n}{n!} + r(h) = f^{(n)}(y)\frac{h^n}{n!} + r(h),$$

onde $\lim_{h\to 0} r(h)/h^n = 0$. Analogamente,

$$g(y+h) = g(y) + g'(y)h + g''(y)\frac{h^2}{2!} + ... + g^{(n)}(y)\frac{h^n}{n!} + s(h) = g^{(n)}(y)\frac{h^n}{n!} + s(h),$$

onde $\lim_{h\to 0} s(h)/h^n = 0$. Portanto,

$$\lim_{x\to y}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(y+h)}{g(y+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f^{(n)}(y)}{n!}+\frac{r(h)}{h^n}}{\frac{g^{(n)}(y)}{n!}+\frac{s(h)}{h^n}} = \frac{f^{(n)}(y)}{g^{(n)}(y)}.$$

Teorema 8.2 (Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange)**.** *Seja* $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ *uma função* n*-vezes derivável em* (c,d)*, onde* $f^{(n-1)}$ *é contínua em* $[c,d]$*. Então, existe* $x\in(c,d)$ *tal que*

$$f(d) = f(c) + f'(c)(d-c) + f''(c)\frac{(d-c)^2}{2!} + ... + f^{(n-1)}(c)\frac{(d-c)^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(x)\frac{(d-c)^n}{n!}.$$

Demonstração. Seja

$$k = \frac{n!}{(d-c)^n}\left[f(d) - f(c) - f'(c)(d-c) - ... - \frac{f^{(n-1)}(c)(d-c)^{n-1}}{(n-1)!}\right].$$

Defina $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ por

$$g(x) = f(d) - f(x) - f'(x)(d-x) - ... - \frac{f^{(n-1)}(x)(d-x)^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{k(d-x)^n}{n!}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} g(c) &= f(d) - f(c) - f'(c)(d-c) - ... - \frac{f^{(n-1)}(c)(d-c)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &\quad - \left[f(d) - f(c) - f'(c)(d-c) - ... - \frac{f^{(n-1)}(c)(d-c)^{n-1}}{(n-1)!}\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Além disso,

$$g(d) = f(d) - f(d) - f'(c)(d-d) - ... - \frac{f^{(n-1)}(c)(d-d)^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{k(d-d)^n}{n!} = 0.$$

Como f é n-vezes derivável em (c,d) e $f^{(n-1)}$ é contínua em $[c,d]$, então g é contínua em $[c,d]$, derivável em (c,d) e

$$g'(x) = \frac{k - f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(d-x)^{n-1}.$$

Mas, $g(c) = g(d) = 0$. Dessa forma, pelo Teorema 7.12, existe $x \in (c,d)$ tal que $g'(x) = 0$. Consequentemente,

$$\frac{k - f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(d-x)^{n-1} = 0,$$

isto é, $k - f^{(n)}(x) = 0$. Por fim,

$$f^{(n)}(x) = k = \frac{n!}{(d-c)^n}\left[f(d) - f(c) - f'(c)(d-c) - ... - \frac{f^{(n-1)}(c)(d-c)^{n-1}}{(n-1)!}\right].$$

Como queríamos demonstrar. □

Exemplo 8.6. Seja $\mathrm{e} : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathrm{e}(x) = \mathrm{e}^x, \forall\, x \in [0,1],$$

ver Definição 10.2. Considere que $(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x$, para todo $x \in [0,1]$ (ver Teorema 10.2). Assim sendo, pelo Teorema 8.2, temos que existe $x \in (0,1)$ tal que:

$$\mathrm{e} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{8!} + \frac{\mathrm{e}^x}{9!}.$$

Veja que o polinômio de Taylor de ordem 9 de e no ponto 1 é dado por $1 + 1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{8!}$. Assim, $\mathrm{e} \approx 2,71828$.

Exercícios de Fixação

1. Encontre o valor aproximado de $\sqrt{2}$.

2. Se $x \in [0,1]$ e $n \in \mathbb{N}$, mostre que $|\ln(1+x) - (x - x^2/2 + x^3/3 - ... + (-1)^{n-1}x^n/n)| < x^{n+1}/(n+1)$. Utilize este fato para aproximar $\ln(3/2)$.

8.4 Conclusão

Caro leitor, ao final desta aula, é importante ressaltar que a Fórmula de Taylor é uma boa ferramenta para aproximar alguns valores, tais como raiz quadrada e o número de Euler.

Além disso, existem limites de expressões indeterminadas, encontradas no cálculo elementar, que são solucionados com aplicação da Regra de L'Hôpital, a qual é consequência imediata da Fórmula de Taylor Infinitesimal. Portanto, o Teorema da Fórmula de Taylor deve fazer parte do conhecimento do estudante.

8.5 Resumo

Nesta aula, apresentamos dois estudos importantíssimos na teoria de derivada de funções reais. Estes são: derivada de ordem superior e Fórmula de Taylor. Estes estão ligados estreitamente e nos levam a um estudo do comportamento local da função. Por exemplo, vimos como identificar pontos de máximo ou mínimo local, através do sinal da derivada de segunda ordem, de uma função, usando a Fórmula de Taylor.

8.6 Exercícios Propostos

Exercícios:

1. Prove a igualdade $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n + x^{n+1}/(1-x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Use a Fórmula de Taylor Infinitesimal para calcular as derivadas sucessivas, no ponto 0, da função $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1/(1-x)$.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^5/(1 + x^6)$. Calcule as derivadas de ordem 2001 e 2003 de f no ponto 0.

3. Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio de grau n. Prove que $y, x \in \mathbb{R}$ quaisquer tem-se $p(x) = p(y) + p'(y)(x-y) + ... + \dfrac{p^{(n)}(y)(x-y)^n}{n!}$.

4. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável em $y \in \text{int } I$. Prove que

$$f''(y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(y+h) + f(y-h) - 2f(y)}{h^2}.$$

8.7 Exercícios Resolvidos

Questões Resolvidas:

Ex1. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável num ponto $y \in \text{int}I$. Prove que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(y+h) - f(y-h)}{2h} = f'(y).$$

Demonstração. Como f é derivável em $y \in \text{int}I$, então, utilizando o Teorema 8.1, temos que

$$f(y+h) = f(y) + f'(y)h + r(h), \text{ onde } \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0,$$

e também

$$f(y-h) = f(y) - f'(y)h + s(h), \text{ onde } \lim_{h\to 0} \frac{s(h)}{h} = 0.$$

Subtraindo a segunda desigualdade da primeira, encontramos:

$$f(y+h) - f(y-h) = 2f'(y)h + r(h) - s(h).$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(y+h) - f(y-h)}{2h} &= \lim_{h\to 0} \left[f'(y) + \frac{r(h) - s(h)}{2h} \right] \\
&= f'(y) + \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{2h} - \lim_{h\to 0} \frac{s(h)}{2h} \\
&= f'(y).
\end{aligned}$$

□

Ex2. Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável em $y \in \text{int } I$. Se $f(y) = g(y)$, $f'(y) = g'(y)$ e $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in I$, prove que $f''(y) \geq g''(y)$.

Demonstração. Defina $p : I \to \mathbb{R}$ por

$$p(x) = f(x) - g(x), \forall\, x \in I.$$

Assim sendo, p é duas vezes derivável em $y \in \text{int}I$. Por conseguinte,

$$p(y) = f(y) - g(y) = 0 \text{ e } p'(y) = f'(y) - g'(y) = 0$$

e também

$$p(x) = f(x) - g(x) \geq 0, \forall\ x \in I.$$

Usando o Teorema 8.1, temos que

$$p(y+h) = p(y) + p'(y)h + p''(y)h^2/2 + r(h),$$

onde $\lim\limits_{h \to 0} r(h)/h^2 = 0$. Com isso, para h suficientemente pequeno,

$$0 \leq p(y+h) = p''(y)h^2/2 + r(h),$$

ou seja,

$$0 \leq p''(y)/2 + \lim_{h \to 0} r(h)/h^2 = p''(y)/2.$$

Portanto, $f''(y) - g''(y) = p''(y) \geq 0$, isto é, $f''(y) \geq g''(y)$.

□

Ex3. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-vezes derivável em $y \in \mathbb{R}$. Prove que se, para algum $y \in \mathbb{R}$ vale $f'(y) = ... = f^{(n)}(y) = 0$. então $(g \circ f)^{(i)}(y) = 0$, para $i = 1, 2, ..., n$.

Demonstração. Usando o Teorema 7.3, concluímos que

$$(g \circ f)'(y) = g'(f(y))f'(y) = g'(f(y)) \cdot 0 = 0.$$

Analogamente,

$$(g \circ f)''(y) = [(g' \circ f)f']'(y) = [(g'' \circ f)(f')^2 + (g' \circ f)f''](y) = (g'' \circ f)(y)(f')^2(y) + (g' \circ f)(y)f''(y)$$

$$= (g'' \circ f)(y) \cdot 0 + (g' \circ f)(y) \cdot 0 = 0.$$

Generalize este processo por indução sobre n. □

Auto-Avaliação

Sou capaz de aplicar corretamente o Teorema da Fórmula de Taylor?

Proxima Aula

Caro leitor, na próxima aula, estudaremos Integrais de funções reais limitadas. Recomendo ao aluno fazer uma revisão nas definições de supremo e ínfimo. Estas serão utilizadas com muita frequência na próxima aula.

Referências Bibliográficas

[1] Alonso, M.; Finn, E. J., *Física: Um Curso Universitário.* Segunda Edição, São Paulo, Edgard Blücher Ltda, 2009. 481p.

[2] Bartle, R. G.; Sherbert, D. R., *Introdution to Real Analysis*, Third Edition, New York, JohnWiley and Sons,Inc., 2000. 399p.

[3] Boyce, W. E.; DiPrima, R. C., *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.* Seventh Edition, New York, JohnWiley and Sons,Inc, 2001. 745p.

[4] Brasil, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

[5] Brauer, F.; Nohel, J. A., *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations.* University of Wisconsin, 1989.

[6] Dragomir, S. S., *Some Gronwall Type Inequalities and Applications.* Monograph. Victoria University of Technology, 2002.

[7] Ferreira, J., *A Construção dos Números.* Primeira Edição, Rio de Janeiro, SBM, 2010. 133p.

[8] Figueiredo, D., *Análise I.* Segunda Edição, Rio de Janeiro, LTC, 2008. 266p.

[9] Guillemin, V.; Pollack, A., *Differential Topology.* First Edition, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1974. 227p.

[10] King, A.C.; Billingham, J.; OTTO, S.R., *Differential Equations.* Linear, Nonlinear, Ordinary, Partial. Cambridge University Press. New York, 2003.

[11] Lima, E. L., *Análise Real.* Funções de uma variável, vol.1. 8º. ed. Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[12] Lima, E. L., *Análise Real,* vol.2. Rio de Janeiro, 2004.

[13] Lima, E. L., *Curso de Análise*, vol. 1, Décima Segunda Edição, Rio de Janeiro, IMPA, 2008. 431p.

[14] Melo, W., *Existência de soluções clássicas para as Equações de Burgers e Navier-Stokes.* Dissertação de Mestrado. UFPE, 2007.

[15] Munkres, J. R., *Topology.* Second Edition, New Jersey, Prentice Hall, Inc., 2000. 552p.

[16] Nolt, J.; Rohatys, D.; Varzi, A., *Theory and problems or logic.* Second edition, New York, McGraw-Hill, 2009. 279p.

[17] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis.* Third Edition, New York, McGraw-Hill, Inc., 1976. 351p.

[18] Smoller, J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations.* 2nd ed., Springer-Verlag, 1994.

[19] Tveito, A.; Winther, R., *Introduction to Partial Differential Equations.* A Computational Approach. New York, 1961.

Professor Revisor

Professor Paulo de Souza Rabelo