Capítulo 9

Nona Aula: Integral a Riemann de Funções Reais

Meta

Apresentar as funções reais que são integráveis a Riemann. Mostrar também resultados como, por exemplo, Teorema Fundamental do Cálculo, Mudança de Variável e Integração por Partes, os quais têm aplicações diretas em Equações Diferenciais Parciais (ver dissertação [14]).

Objetivos

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de identificar funções integráveis e aplicar corretamente os Teoremas Fundamental do Cálculo, Mudança de Variáveis e Integração por Partes.

Pré-requisitos

Aula 8, Fundamentos da Matemática e Cálculo II.

9.1 Introdução

Nesta aula, mostraremos, através de somas inferior e superior, como verificar se uma determinada função limitada é integrável. De posse destas aplicações, estudaremos quais operações elementares podem ser realizadas sobre tais para obtermos novamente uma função do mesmo tipo, ou seja, integrável. Em seguida, demonstraremos condições suficientes de integrabilidade como, por exemplo, continuidade e monotonicidade. Por fim, veremos alguns teoremas que nos possibilitam entender por que a integral indefinida é, em alguns textos, considerada uma antiderivada. Entre estes estão os Teoremas Fundamental do Cálculo e Mudança de Variável. Aplicações destes dois resultados estão inseridas também no contexto da Matemática Financeira e Ciências Biológicas.

9.2 Integral a Riemann e Exemplos

Nesta seção, colocaremos à disposição do leitor algumas definições, tais como as de integrais inferior e superior, para nos tornarmos aptos a descrever um conceito preciso do que significa uma função ser integrável a Riemann em $\mathbb{R}$.

Definição 9.1 (Partição)**.** Um subconjunto finito $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\} \subseteq [a, b]$ do intervalo $[a, b]$ é denominado uma partição deste intervalo se $a, b \in P$. Por convenção, consideraremos que $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$. Denotaremos a partição P por

$$P : a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = b.$$

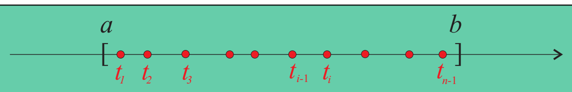

Figura 9.1: Partição

Definição 9.2 (Subintervalo da Partição)**.** Seja $P : a = t_0 < ... < t_n = b$ uma partição do intervalo $[a, b]$. O intervalo da forma

$$[t_{i-1}, t_i], \forall\ i = 1, 2, ...n,$$

é denominado i-ésimo intervalo da partição P.

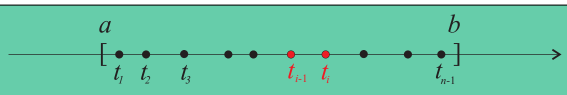

Figura 9.2: i-ésimo intervalo

Exemplo 9.1. Os conjuntos

$$P = \{1, 2, 4\}, Q = \{1, 3, 4\} \text{ e } R = \{1, 2, 3, 4\}$$

são partições do intervalo $[1, 4]$. Os intervalos $[1, 2]$ e $[2, 4]$ são, respectivamente, o primeiro e o segundo intervalo da partição P.

Definição 9.3. Uma partição Q de $[a, b]$ refina uma outra partição do mesmo intervalo P, se $P \subseteq Q$.

Exemplo 9.2. A partição $Q = \{1, 3, 4\}$ de $[1, 4]$ não refina a partição $P = \{1, 2, 4\}$ de $[1, 4]$, pois $2 \in P$, mas $2 \notin Q$. Porém, a partição $R = \{1, 2, 3, 4\}$ refina a partição $Q = \{1, 3, 4\}$, pois $Q \subseteq R$.

Exemplo 9.3. Se P e Q são partições de um intervalo $[a, b]$, então $P \cup Q$ é uma partição de $[a, b]$ que refina P e Q simultaneamente, já que $P \cup Q$ é finito e $P, Q \subseteq P \cup Q$.

Definição 9.4 (Oscilação)**.** Seja $P : a = t_0 < ... < t_n = b$ uma partição de $[a, b]$. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Sejam

$$m_i^f = \inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} \text{ e } M_i^f = \sup\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}, \forall\ i = 1, 2, ..., n.$$

Definimos e denotamos a oscilação de f no i-ésimo intervalo de P por

$$w_i^f = M_i^f - m_i^f, \forall\ i = 1, 2..., n.$$

Obs 9.1. Observe que a oscilação depende da partição estudada.

Obs 9.2. Denotaremos $m^f = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ e $M^f = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$.

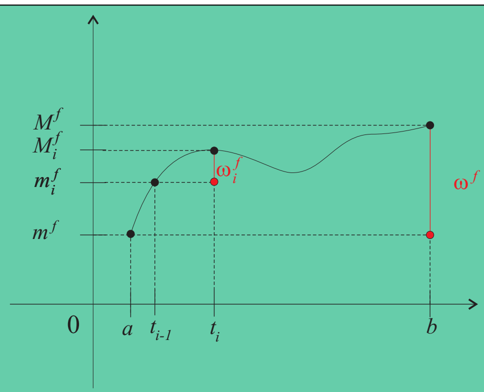

Figura 9.3: Oscilação

Exemplo 9.4. Relembre a definição da função característica de $\mathbb{Q}$ (ver Exemplo 6.15). Analogamente podemos definir a função característica de $\mathbb{Q}$ no intervalo $[a, b]$, basta estabelecer a seguinte lei de transformação

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{se } x \in [a, b] \cap \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Seja $P : a = t_0 < \ldots < t_n = b$ uma partição qualquer de $[a, b]$. Como em qualquer intervalo não-degenerado existe um número racional e um irracional (ver Teorema 1.6), então f assume os valores 0 e 1 em qualquer intervalo da partição P. Com isso,

$$m_i^f = \inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} = 0$$

e também

$$M_i^f = \sup\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} = 1,$$

onde $i = 1, 2, \ldots, n$. Portanto,

$$w_i^f = M_i^f - m_i^f = 1, \forall\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Exemplo 9.5. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = k, \forall\ x \in [a, b].$$

Considere $P : a = t_0 < ... < t_n = b$ uma partição qualquer de $[a, b]$. Assim,

$$m_i^f = \inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} = \inf\{k : x \in [t_{i-1}, t_i]\} = k$$

e de maneira análoga

$$M_i^f = \sup\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} = \sup\{k : x \in [t_{i-1}, t_i]\} = k,$$

onde $i = 1, 2, ..., n$. Consequentemente,

$$w_i^f = M_i^f - m_i^f = k - k = 0,$$

onde $i = 1, 2, ..., n$.

Exemplo 9.6. Considere a função $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [1, 2); \\ 2, & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

Seja $P : 1 = t_0 < ... < t_n = 2$ uma partição qualquer de $[1, 2]$. Assim,

$$m_i^f = \inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} = 1,$$

para todo $i = 1, 2, ..., n$, pois $f(x) = 1$ ou 2. Além disso,

$$M_i^f = \sup\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} = \sup\{1 : x \in [t_{i-1}, t_i]\} = 1,$$

para todo $i = 1, 2, ..., n - 1$. Por outro lado,

$$M_n^f = \sup\{f(x) : x \in [t_{n-1}, 2]\} = 2,$$

já que $f(2) = 2$. Portanto,

$$w_i^f = M_i^f - m_i^f = 1 - 1 = 0,$$

para todo $i = 1, 2, ..., n - 1$ e

$$w_n^f = M_n^f - m_n^f = 2 - 1 = 1.$$

Definição 9.5 (Somas Inferior e Superior)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. De-*

finimos as somas inferior e superior de f em relação à partição $P : a = t_0 < ... < t_n = b$, respectivamente, por

$$s^f(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i^f(t_i - t_{i-1}) \quad e \quad S^f(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i^f(t_i - t_{i-1}).$$

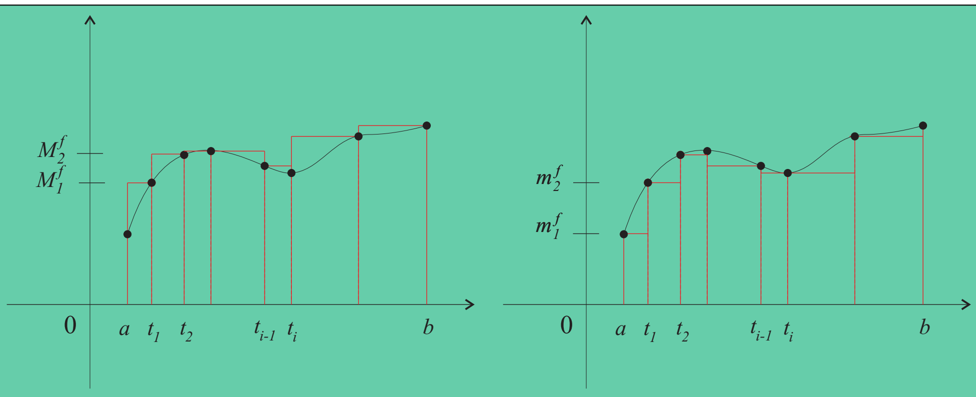

Figura 9.4: Somas superior e inferior, respectivamente.

Obs 9.3. Note que as somas inferior e superior dependem da partição que está sendo considerada.

Obs 9.4. Observe que

$$s^f(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i^f(t_i - t_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^{n} m^f(t_i - t_{i-1}) = m^f \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})$$

$$= m^f(t_n - t_0) = m^f(b - a),$$

onde na primeira desigualdade usamos o fato que $[t_{i-1}, t_i] \subseteq [a, b]$ para concluir que $m_i^f \geq m^f$ (para a prova deste fato ver exercícios sobre ínfimo). Assim,

$$s^f(P) \geq m^f(b - a), \forall\ P \text{ partição de } [a, b].$$

Analogamente,

$$S^f(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i^f(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M^f(t_i - t_{i-1}) = M^f \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = M^f(b - a).$$

Deste modo,

$$S^f(P) \leq M^f(b-a), \forall\ P \text{ partição de } [a,b].$$

pois $[t_{i-1}, t_i] \subseteq [a,b]$ (ver exercícios sobre supremo). Por fim,

$$s^f(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i^f(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i^f(t_i - t_{i-1}) = S^f(P), \forall\ P \text{ partição de } [a,b].$$

já que $m_i^f \leq M_i^f$, $\forall\ i = 1, 2, ..., n$ (ver definições 1.11 e 1.12). Com isso,

$$m^f(b-a) \leq s^f(P) \leq S^f(P) \leq M^f(b-a),$$

para qualquer partição P do intervalo $[a,b]$.

Obs 9.5. É fácil ver que

$$S^f(P) - s^f(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i^f(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i^f(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(M_i^f - m_i^f)(t_i - t_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_i^f(t_i - t_{i-1}).$$

Exemplo 9.7. No Exemplo 9.4 vimos que a função característica de $\mathbb{Q}$ em $[a,b]$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1$, se $x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$, caso contrário, satisfaz

$$m_i^f = 0 \text{ e } M_i^f = 1, \forall\ i = 1, 2, ..., n$$

para qualquer $P : a = t_0 < ... < t_n = b$ partição de $[a,b]$. Portanto,

$$s^f(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i^f(t_i - t_{i-1}) = 0$$

e também

$$S^f(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i^f(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = b - a.$$

Exemplo 9.8. Vimos que a função constante, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = k$, satisfaz

$$m_i^f = M_i^f = k, \forall\ i = 1, 2, ..., n,$$

para qualquer partição $P : a = t_0 < ... < t_n = b$ de $[a, b]$. Dessa forma,

$$s^f(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i^f(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} k(t_i - t_{i-1}) = k\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = k(b-a)$$

e de maneira análoga,

$$S^f(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i^f(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} k(t_i - t_{i-1}) = k\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = k(b-a).$$

Exemplo 9.9. No Exemplo 9.6 vimos que a função, $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1$, $\forall\ x \in [1, 2)$ e $f(2) = 2$ satisfaz

$$m_i^f = M_i^f = 1, \forall\ i = 1, 2, ..., n-1, m_n^f = 1 \text{ e } M_n^f = 2$$

para qualquer partição $P : 1 = t_0 < ... < t_n = 2$ de $[1, 2]$. Portanto,

$$s^f(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i^f(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = 2 - 1 = 1$$

e também

$$S^f(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i^f(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n-1}(t_i - t_{i-1}) + 2(t_n - t_{n-1}) = t_{n-1} - t_0 + 2(t_n - t_{n-1})$$

$$= 4 - 1 - t_{n-1} = 3 - t_{n-1}.$$

Definição 9.6 (Integrais Inferior e Superior)**.** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. As integrais inferior e superior de f são definidas e denotadas, respectivamente, por

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{s^f(P) : P \text{ partição de } [a, b]\}$$

e

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{S^f(P) : P \text{ partição de } [a, b]\}.$$

Obs 9.6. O supremo e ínfimo na Definição 9.6 estão sendo encontrados variando as partições, denotadas por P, do intervalo $[a, b]$.

Obs 9.7. Note que a existência do ínfimo e a do supremo na Definição 9.6 está justificada na Observação 9.4.

Exemplo 9.10. No Exemplo 9.7 vimos que para a função característica de $\mathbb{Q}$ em $[a, b]$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1$, se $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$, caso contrário, satisfaz

$$s^f(P) = 0 \text{ e } S^f(P) = b - a, \forall\ P \text{ partição de } [a, b].$$

Portanto, encontramos a integral inferior da seguinte forma

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{s^f(P) : P \ \text{ partição } \ \text{de } [a, b]\} = \sup\{0 : P \ \text{ partição } \ \text{de } [a, b]\} = 0,$$

e a integral superior é dada por

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{S^f(P) : P \ \text{ partição } \ \text{de } [a, b]\} = \inf\{b - a : P \ \text{ partição } \ \text{de } [a, b]\} = b - a.$$

Exemplo 9.11. Vimos, no Exemplo 9.8, que a função constante, estabelecida por $f(x) = k$, satisfaz

$$s^f(P) = k(b - a) \text{ e } S^f(P) = k(b - a), \forall\ P \text{ partição de } [a, b].$$

Assim sendo,

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{s^f(P) : P \ \text{ partição } \ \text{de } [a, b]\} = \sup\{k(b-a) : P \ \text{ partição } \ \text{de } [a, b]\} = k(b-a)$$

e analogamente

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{S^f(P) : P \ \text{ partição } \ \text{de } [a, b]\} = \inf\{k(b-a) : P \ \text{ partição } \ \text{de } [a, b]\} = k(b-a).$$

O resultado a seguir nos diz, em palavras, que quando refinamos uma partição a soma inferior não diminui e a soma superior não aumenta.

Teorema 9.1. *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e P, Q partições de $[a, b]$ tais que $P \subseteq Q$ (isto é, Q refina P), então*

$$s^f(P) \leq s^f(Q) \ \text{ e } \ S^f(Q) \leq S^f(P).$$

Demonstração. A demonstração se resume a uma partição do tipo $Q = P \cup \{c\} \supseteq P$, já que o que faremos abaixo pode ser generalizado com uma quantidade finita de passos semelhantes. Assim sendo, sejam

$$P : a = t_0 < ... < t_n = b \text{ e } Q : a = t_0 < ... < t_{j-1} < c < t_j < ... < t_n = b$$

partições de $[a, b]$ (consideramos que c está no j-ésimo intervalo de Q). Sejam

$$M_{c1}^f = \sup\{f(x) : x \in [t_{j-1}, c]\} \text{ e } M_{c2}^f = \sup\{f(x) : x \in [c, t_j]\}.$$

Como $[t_{j-1}, c], [c, t_j] \subseteq [t_{j-1}, t_j]$, então $M_{c1}^f, M_{c2}^f \leq M_j^f$. Com isso,

$$\begin{aligned}
S^f(P) - S^f(Q) &= \sum_{i=1}^{n} M_i^f(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{j-1} M_i^f(t_i - t_{i-1}) - M_{c1}^f(c - t_{j-1}) - M_{c2}^f(t_j - c) \\
&- \sum_{i=j+1}^{n} M_i^f(t_i - t_{i-1}) \\
&= M_j^f(t_j - t_{j-1}) - M_{c1}^f(c - t_{j-1}) - M_{c2}^f(t_j - c) \\
&\geq M_j^f(t_j - t_{j-1}) - M_j^f(c - t_{j-1}) - M_j^f(t_j - c) \\
&= M_j^f(t_j - t_{j-1} - c + t_{j-1} - t_j + c) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $S^f(P) - S^f(Q) \geq 0$. Ou seja, $S^f(P) \geq S^f(Q)$. Analogamente, $s^f(P) \leq s^f(Q)$. □

O Corolário abaixo nos informa que a soma inferior nunca supera a superior.

Corolário 9.2. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Sejam P e Q partições de $[a, b]$ quaisquer, então $s^f(P) \leq S^f(Q)$.*

Demonstração. Sejam P e Q partições de $[a, b]$. Vimos no Exemplo 9.3 que $P \cup Q$ é uma partição que refina P e Q simultaneamente. Com isso, pelo Teorema 9.1, temos que

$$s^f(P) \leq s^f(P \cup Q) \leq S^f(P \cup Q) \leq S^f(Q).$$

Portanto, $s^f(P) \leq S^f(Q)$. $\square$

Corolário 9.3. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada tal que $m^f \leq f(x) \leq M^f$, $\forall\ x \in [a,b]$. Então,*

$$m^f(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq M^f(b-a).$$

Demonstração. Vimos na Observação 9.5 que

$$m^f(b-a) \leq s^f(P) \leq S^f(P) \leq M^f(b-a),$$

$\forall\ P$ partição de $[a,b]$. Dessa forma,

$$m^f(b-a) \leq s^f(P) \leq \sup\{s^f(P) : P \text{ partição de } [a,b]\} = \underline{\int_a^b} f,$$

ou seja, $m^f(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f$. Por outro lado,

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{S^f(P) : P \text{ partição de } [a,b]\} \leq S^f(P) \leq M^f(b-a).$$

Além disso, pelo Corolário 9.2, temos que

$$s^f(P) \leq S^f(Q),$$

$\forall\ P, Q$ partições de $[a,b]$. Com isso,

$$\sup\{s^f(P) : P \text{ partição de } [a,b]\} \leq \inf\{S^f(Q) : Q \text{ partição de } [a,b]\},$$

ver exercícios sobre supremo e ínfimo no Capítulo Números Reais. Por conseguinte, $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$. Portanto,

$$m^f(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq M^f(b-a).$$

$\square$

Estamos prontos para definir Integral a Riemann.

Definição 9.7 (Integral a Riemann)**.** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Dizemos que f é integrável a Riemann, ou simplesmente integrável, se $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. Neste caso, definimos e denotamos a integral de f por

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

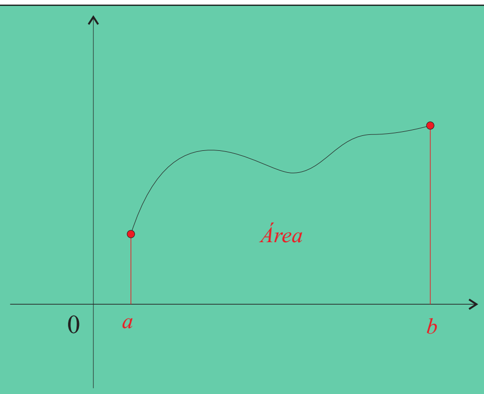

Figura 9.5: Integral

Obs 9.8. Quando houver possibilidade de confusão escreveremos $\displaystyle\int_a^b f(x)$ para representar a integral da função f.

Exemplo 9.12 (Característica Não-integrável)**.** Vimos no Exemplo 9.10 que a função característica de $\mathbb{Q}$ em $[a, b]$, f, não é integrável, pois

$$\underline{\int_a^b} f = 0 \neq b - a = \overline{\int_a^b} f.$$

Exemplo 9.13 (Integral da Constante)**.** No Exemplo 9.11 mostramos que a função constante $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = k$, satisfaz

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = k(b - a).$$

Logo, a função constante é integrável e $\displaystyle\int_a^b f = k(b - a)$.

Vejamos, agora, duas maneiras equivalentes de definir integral utilizando somas inferior e superior.

Teorema 9.4 (Caracterização de Integração)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então, são equivalentes os seguintes itens:*

i) *f é integrável;*

ii) *dado $\varepsilon > 0$, existem P e Q partições de $[a, b]$ tais que*

$$S^f(P) - s^f(Q) < \varepsilon;$$

iii) *dado $\varepsilon > 0$, existe $R : a = t_0 < ... < t_n = b$ partição de $[a, b]$ tal que*

$$S^f(R) - s^f(R) < \varepsilon,$$

ou equivalentemente,

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^f (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon.$$

Demonstração. **i) $\Rightarrow$ ii)** Suponha, primeiramente, que f é integrável. A Definição 9.7, nos diz que

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f,$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$ e usando as definições 1.11 e 1.12, existem P, Q partições de $[a, b]$ tais que

$$\underline{\int_a^b} f - \varepsilon/2 < s^f(Q) \text{ e } \overline{\int_a^b} f + \varepsilon/2 > S^f(P),$$

isto é,

$$\int_a^b f - \varepsilon/2 < s^f(Q) \text{ e } \int_a^b f + \varepsilon/2 > S^f(P).$$

Subtraindo a primeira desigualdade da segunda, obtemos

$$S^f(P) - s^f(Q) < \int_a^b f + \varepsilon/2 - \int_a^b f + \varepsilon/2.$$

Consequentemente,

$$S^f(P) - s^f(Q) < \varepsilon.$$

ii) $\Rightarrow$ **iii)** Dado $\varepsilon > 0$, suponha que existem P, Q partições de $[a, b]$ tais que

$$S^f(P) - s^f(Q) < \varepsilon.$$

Vimos, no Exemplo 9.3 que $R = P \cup Q$ refina P, Q simultaneamente. Daí, usando o Teorema 9.1, concluímos que

$$S^f(R) - s^f(R) \leq S^f(P) - s^f(Q) < \varepsilon.$$

Se $R : a = t_0 < ... < t_n = b$, então, pela Observação 9.5,

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^f (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon.$$

iii) $\Rightarrow$ **i)** Agora, suponha que dado $\varepsilon > 0$ existe R partição de $[a, b]$ tal que

$$S^f(R) - s^f(R) < \varepsilon.$$

Sabemos que

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f,$$

ver Corolário 9.3. Considere, por absurdo, que

$$\underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f,$$

Agora, tome $\varepsilon = \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f > 0$. Por hiótese, existe R partição de $[a, b]$ tal que

$$S^f(R) - s^f(R) < \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f.$$

Mas isto é um absurdo, já que a Definição 9.6, nos diz que

$$S^f(R) - s^f(R) \geq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f.$$

Por fim,

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f,$$

ou seja, f é integrável. $\square$

Exemplo 9.14. Dado $\varepsilon > 0$, seja $R : 1 = t_0 < ... < t_n = 2$ partição de $[1, 2]$ tal que $2 - t_{n-1} < \varepsilon$. Vimos no Exemplo 9.9 que a função, $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1$, $\forall\ x \in [1, 2)$ e $f(2) = 2$, satisfaz

$$s^f(P) = 1 \text{ e } S^f(P) = 3 - t_{n-1},$$

$\forall\ P$ partição de $[1, 2]$. Portanto,

$$S^f(R) - s^f(R) = 3 - t_{n-1} - 1 = 2 - t_{n-1} < \varepsilon.$$

Utilizando o Teorema 9.4, f é integrável. Por outro lado,

$$\int_1^2 f = \underline{\int_1^2} f = \sup\{s^f(P) : P \text{ é partição de } [1, 2]\} = \sup\{1 : P \text{ é partição de } [1, 2]\} = 1,$$

isto é, $\int_1^2 f = 1$.

Exercícios de Fixação

1. Considere o intervalo $[0, 4]$. Seja $f(x) = x^2$, $\forall\ x \in [0, 4]$. Encontre as somas inferior e superior de f para as partições $P = \{0, 1, 2, 4\}$ e $Q = \{0, 2, 3, 4\}$. Podemos dizer que Q refina P?

2. Seja $f(x) = 2$, $\forall\ x \in [0, 1)$ e $f(x) = 1$, $\forall\ x \in [1, 2]$. Mostre que f é integrável e calcule sua integral.

3. Seja $g(x) = 2$, $\forall\ x \in [0, 1)$ e $g(x) = 3$, $\forall\ x \in [1, 2]$. Mostre que g é integrável e calcule sua integral.

4. Suponha que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é tal que $f(x) = 0$ exceto para os valores $c_1, c_2, ..., c_n \in [a, b]$.

Mostre que f é integrável e que $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

5. Sejam $c \leq d$ pontos em $[a,b]$. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = k$, se $x \in [c,d]$ e $f(x) = 0$, caso contrário. Mostre que f é integrável e que $\displaystyle\int_a^b f = k(d-c)$.

9.3 Operaçõe Elementares com a Integral a Riemann

No Lema a seguir provaremos uma outra maneira de encontrar a oscilação de uma função, definida em um intervalo, em um sub-intervalo de uma partição qualquer do seu domínio.

Lema 9.1 (Caracterização da Oscilação)**.** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então, a oscilação no i-ésimo intervalo da partição $P : a = t_0 < ... < t_n = b$ pode ser encontrada da seguinte forma:*

$$w_i^f = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [t_{i-1}, t_i]\}.$$

Demonstração. Vamos provar que

$$M_i^f - m_i^f = \sup X_i,$$

onde $X_i = \{|f(x) - f(y)| : x, y \in [t_{i-1}, t_i]\}$. De fato, sejam $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$. Observe que

$$|f(x) - f(y)| \leq M_i^f - m_i^f,$$

ou seja, $M_i^f - m_i^f$ é cota superior para X_i. Agora, dado $\varepsilon > 0$, tem-se que existem $c, d \in [t_{i-1}, t_i]$ tais que

$$M_i^f - \varepsilon/2 < f(c) \text{ e } m_i^f + \varepsilon/2 > f(d),$$

ver definições 1.11 e 1.12. Portanto,

$$|f(c) - f(d)| \geq f(c) - f(d) > M_i^f - \varepsilon/2 - (m_i^f + \varepsilon/2) = M_i^f - m_i^f - \varepsilon,$$

isto é,

$$|f(c) - f(d)| > M_i^f - m_i^f - \varepsilon,$$

onde $c, d \in [t_{i-1}, t_i]$. Dessa forma, usando a Definição 1.11, concluímos que $M_i^f - m_i^f =$

$\sup X_i$. □

Abaixo, listamos algumas operações elementares que são verificáveis por funções integráveis a Riemann.

Teorema 9.5 (Propriedades da Integral)**.** *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis. Então, as seguintes afirmações são válidas:*

i) *$f + g, f \cdot g$ são integráveis e*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \ \ e \ \ \int_a^b kf = k\int_a^b f,$$

ou em palavras, a integral da soma é a soma das integrais e a constante pode ser retirada da integral;

ii) *Se $0 < c \leq |g(x)|$, para todo $x \in [a, b]$, onde c é uma constante, então $f/g : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável;*

iii) *$f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in [a, b]$, então*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g;$$

iv) *$|f| : [a, b] \to \mathbb{R}$, definida por*

$$|f|(x) = |f(x)|, \forall\ x \in [a, b],$$

é integrável e

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|,$$

ou em palavras, o módulo da integral é menor ou igual a integral do módulo.

Demonstração. **i)** Sejam $P : a = t_0 < ... < t_n = b$ e $Q : a = v_0 < ... < v_r = b$ partições de $[a, b]$ arbitrárias. Vimos que

$$\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g,$$

ver exercícios de supremo no Capítulo Números Reais. Assim sendo $M_i^{f+g} \le M_i^f + M_i^g$. Com isso,

$$S^{f+g}(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i^{f+g}(t_i - t_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n}(M_i^f + M_i^g)(t_i - t_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} M_i^f(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} M_i^g(t_i - t_{i-1}) = S^f(P) + S^g(P),$$

ou seja,

$$S^{f+g}(P) \le S^f(P) + S^g(P), \forall\ P \text{ partição de } [a,b].$$

Observe que,

$$\overline{\int_a^b}(f+g) = \inf\{S^{f+g}(R) : R \text{ é partição de } [a,b]\} \le S^{f+g}(P) \le S^f(P) + S^g(P),$$

$\forall$ P partição de $[a,b]$. Lembre que, pelo Exemplo 9.3, $P \cup Q$ refina P e Q simultaneamente. Portanto, pelo Teorema 9.1,

$$\overline{\int_a^b}(f+g) \le S^f(P \cup Q) + S^g(P \cup Q) \le S^f(P) + S^g(Q).$$

Deste modo, pelo Exemplo 1.9, concluímos que

$$\begin{aligned}
\overline{\int_a^b}(f+g) &\le \inf\{S^f(P) + S^g(Q) : P, Q \text{ são partições de } [a,b]\} \\
&= \inf\{S^f(P) : P \text{ é partição de } [a,b]\} + \inf\{S^g(Q) : Q \text{ é partição de } [a,b]\} \\
&= \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g = \int_a^b f + \int_a^b g,
\end{aligned}$$

pois f e g são integráveis, isto é,

$$\overline{\int_a^b}(f+g) \le \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Analogamente, prova-se que $\int_a^b f + \int_a^b g \le \underline{\int_a^b}(f+g)$. Assim,

$$\overline{\int_a^b}(f+g) \le \int_a^b f + \int_a^b g \le \underline{\int_a^b}(f+g),$$

Por conseguinte, $\overline{\int_a^b}(f+g) \leq \underline{\int_a^b}(f+g)$. Por outro lado, pelo Corolário 9.3, obtemos

$$\overline{\int_a^b}(f+g) \leq \underline{\int_a^b}(f+g) \leq \overline{\int_a^b}(f+g).$$

Logo, $\overline{\int_a^b}(f+g) = \underline{\int_a^b}(f+g)$. Isto nos diz que, $f+g$ é integrável e

$$\int_a^b (f+g) = \overline{\int_a^b}(f+g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g \leq \underline{\int_a^b}(f+g) = \int_a^b (f+g),$$

Por fim,

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Agora vamos provar que $f \cdot g$ é integrável. Como f e g são integráveis, então inferimos que f e g são limitadas. Assim, existe $d \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x)|, |g(x)| \leq d, \forall\ x \in [a,b].$$

Sejam $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$. Logo, pelo Lema 9.1, concluímos que

$$\begin{aligned}
|fg(x) - fg(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\
&= |f(x)[g(x) - g(y)] + [f(x) - f(y)]g(y)| \\
&\leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)||g(y)| \\
&\leq d(w_i^f + w_i^g).
\end{aligned}$$

Novamente, pelo Lema 9.1, temos que

$$w_i^{fg} \leq d(w_i^f + w_i^g), \forall\ i = 1, 2, ..., n.$$

Como f e g são integráveis, então dado $\varepsilon > 0$, existe, pelo Teorema 9.4 e Exemplo 9.3,

$R : a = s_0 < ... < s_m = b$ partição de $[a, b]$ tal que

$$\sum_{i=1}^{m} w_i^f (s_i - s_{i-1}) < \varepsilon/2d \text{ e } \sum_{i=1}^{m} w_i^g (s_i - s_{i-1}) < \varepsilon/2d.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} w_i^{fg} (s_i - s_{i-1}) &\leq \sum_{i=1}^{m} d(w_i^f + w_i^g)(s_i - s_{i-1}) \\
&\leq d\left[\sum_{i=1}^{m} w_i^f (s_i - s_{i-1}) + \sum_{i=1}^{m} w_i^g (s_i - s_{i-1})\right] \\
&< d[\varepsilon/2d + \varepsilon/2d] \;=\; \varepsilon.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 9.4, tem-se que $f \cdot g$ é integrável. Em particular, obtemos que kf é integrável, ver Exemplo 9.13. Se $k \geq 0$ e usando que f é integrável, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_a^b kf &= \overline{\int_a^b} kf \;=\; \inf\{S^{kf}(P) : P \text{ é partição de } [a, b]\} \\
&= \inf\{kS^f(P) : P \text{ é partição de } [a, b]\} \\
&= k \inf\{S^f(P) : P \text{ é partição de } [a, b]\} \\
&= k \overline{\int_a^b} f = k \int_a^b f,
\end{aligned}$$

ver exercícios de supremo e ínfimo no Capítulo Números Reais. Analogamente, se $k < 0$, encontramos

$$\begin{aligned}
\int_a^b kf &= \overline{\int_a^b} kf \;=\; \inf\{S^{kf}(P) : P \text{ é partição de } [a, b]\} \\
&= \inf\{ks^f(P) : P \text{ é partição de } [a, b]\} \\
&= k \sup\{s^f(P) : P \text{ é partição de } [a, b]\}
\end{aligned}$$

$$= \; k\underline{\int_a^b} f \; = \; k\int_a^b f.$$

Por conseguinte, $\int_a^b kf = k\int_a^b f$.

ii) Suponha que

$$0 < c \leq |g(x)|, \forall\ x \in [a,b].$$

Vamos provar que $1/g$ é integrável. Sejam $x, y \in [\gamma_{i-1}, \gamma_i]$, onde $T : a = \gamma_0 < ... < \gamma_\theta$ é uma partição do intervalo $[a,b]$. Assim sendo,

$$|1/g(x) - 1/g(y)| = \left|\frac{g(y) - g(x)}{g(x)g(y)}\right| \leq \frac{w_i^g}{c^2}.$$

Utilizando o Lema 9.1, obtemos

$$w_i^{1/g} \leq w_i^g/c^2, \forall\ i = 1, ..., \theta.$$

Como foi feito anteriormente, $1/g$ é integrável, pelo Teorema 9.4. Assim, pelo item **i**), $f/g = f \cdot 1/g$ é integrável.

iii) Considere que

$$f(x) \leq g(x), \forall\ x \in [a,b],$$

então $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in [\eta_{i-1}, \eta_i]$, onde $Y : a = \eta_0 < ... < \eta_\beta$ é uma partição de $[a,b]$. Logo,

$$m_i^f \leq m_i^g, \forall\ i = 1, ..., \beta,$$

ver exercícios de ínfimo no Capítulo Números Reais. Assim sendo,

$$s^f(Y) = \sum_{i=1}^{\beta} m_i^f(\eta_i - \eta_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{\beta} m_i^g(\eta_i - \eta_{i-1}) = s^g(Y).$$

Logo,

$$\int_a^b f \; = \; \overline{\int_a^b} f \; = \; \sup\{s^f(Y) : Y \text{ é uma partição de } [a,b]\}$$

$$\leq \sup\{s^g(Y) : Y \text{ é uma partição de } [a,b]\}$$

$$= \overline{\int_a^b} g = \int_a^b g,$$

pois f e g são integráveis, ou seja, $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

iv) Sejam $Z : z_0 < ... < z_u = b$ uma partição e $x, y \in [z_{i-1}, z_i]$. Portanto, usando o Lema 9.1, concluímos

$$||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)| \leq w_i^f.$$

E usando o mesmo resultado, obtemos $w_i^{|f|} \leq w_i^f$. Como foi feito anteriormente, $|f|$ é integrável. Por outro lado,

$$-f(x) \leq |f(x)| \leq f(x), \forall\ x \in [a,b].$$

Logo, usando os itens **i**) e **iii**), chegamos a

$$-\int_a^b f \leq \int_a^b |f| \leq \int_a^b f,$$

isto é, $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$. □

Vejamos uma simples aplicação do Teorema 9.5.

Exemplo 9.15. Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integráveis, com

$$\int_a^b g = 0 \text{ e } g(x) \geq 0, \forall\ x \in [a,b],$$

então $\int_a^b fg = 0$. Com efeito, sabemos que existem $c, d \in \mathbb{R}$ tais que

$$c \leq f(x) \leq d, \forall\ x \in [a,b],$$

já que f é limitada. Multiplicando por g, encontramos

$$cg(x) \leq f(x)g(x) \leq dg(x), \forall\ x \in [a,b].$$

Integrando o resultado chegamos a

$$0 = c\int_a^b g \le \int_a^b fg \le d\int_a^b g = 0,$$

ver Teorema 9.5. Por fim, $\int_a^b fg = 0$.

O Lema a seguir nos relata uma outra maneira de definirmos integrais inferior e superior.

Lema 9.2 (Caracterização de Integrais Inferior e Superior)**.** *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e Q uma partição de $[a,b]$ fixa. Então,*

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{s^f(P) : Q \subseteq P\} \text{ e } \overline{\int_a^b} f = \inf\{S^f(P) : Q \subseteq P\}.$$

Demonstração. Queremos provar que

$$\sup\{s^f(P) : Q \subseteq P\} = \sup\{s^f(R) : R \text{ partição de } [a,b]\}$$

e também

$$\inf\{S^f(P) : Q \subseteq P\} = \inf\{S^f(R) : R \text{ partição de } [a,b]\}.$$

É claro que

$$\{s^f(P) : Q \subseteq P\} \subseteq \{s^f(R) : R \text{ partição de } [a,b]\}$$

e

$$\{S^f(P) : Q \subseteq P\} \subseteq \{S^f(R) : R \text{ partição de } [a,b]\},$$

onde tais conjuntos são limitados (ver Observação 9.4). Portanto, as desigualdades seguintes são verdadeiras:

$$\sup\{s^f(P) : Q \subseteq P\} \le \sup\{s^f(R) : R \text{ partição de } [a,b]\}$$

$$\inf\{S^f(P) : Q \subseteq P\} \le \inf\{S^f(R) : R \text{ partição de } [a,b]\}.$$

Suponha, por absurdo, que as desigualdades acima são estritas. Tome

$$\varepsilon = \sup\{s^f(R) : R \text{ partição de } [a,b]\} - \sup\{s^f(P) : Q \subseteq P\} > 0.$$

Usando a Definição 1.11, concluímos que existe uma partição R_0 tal que

$$\sup\{s^f(R) : R \text{ partição de } [a,b]\} - \varepsilon < s^f(R_0),$$

isto é,

$$\sup\{s^f(P) : Q \subseteq P\} < s^f(R_0).$$

Utilizando o Teorema 9.1, chegamos a

$$\sup\{s^f(P) : Q \subseteq P\} < s^f(R_0) \leq s^f(P),$$

onde $P = R_0 \cup Q$. Isto é um absurdo, pois $Q \subseteq P$ (ver Definição 1.11). Analogamente, inferimos que a desigualdade

$$\inf\{S^f(P) : Q \subseteq P\} < \inf\{S^f(R) : R \text{ partição de } [a,b]\}$$

é um absurdo. Por fim, usando a Definição 9.6, temos

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{s^f(R) : R \text{ partição de } [a,b]\} = \sup\{s^f(P) : Q \subseteq P\}$$

e também

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{S^f(R) : R \text{ partição de } [a,b]\} = \inf\{S^f(P) : Q \subseteq P\}.$$

□

Agora, estudemos mais uma propriedade da Integral a Riemann.

Teorema 9.6. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então, f é integrável se, e somente se, $f|_{[a,c]}$ e $f|_{[c,b]}$ são integráveis, onde $c \in (a,b)$. Neste caso,*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Demonstração. Considere as seguintes notações

$$g \equiv f|_{[a,c]} \text{ e } h \equiv f|_{[c,b]}.$$

Sejam

$$A = \{S^g(P); P \text{ partição de [a,c]}\} \text{ e } B = \{S^h(Q); Q \text{ partição de [c,b]}\}.$$

Vimos que

$$A + B = \{S^g(P) + S^h(Q); P, Q \text{ partições de } [a,c] \text{ e } [c,b], \text{ respectivamente}\}.$$

Sejam

$$P : a = t_0 < ... < t_n = c \text{ e } Q : c = t_n < ... < t_m = b$$

partições de $[a,c]$ e $[c,b]$, respectivamente. Assim,

$$S^g(P) + S^h(Q) = \sum_{i=1}^{n} M_i^g(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=n}^{m} M_i^h(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{m} M_i^f(t_i - t_{i-1}) = S^f(R),$$

onde $R : a = t_0 < ... < t_n = c < ... < t_m = b$ é uma partição de $[a,b]$ que contém c. Usando o Lema 9.2, temos que

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{S^f(P) : \{a,c,b\} \subseteq P\} = \inf\{A + B\} = \inf A + \inf B = \overline{\int_a^c} g + \overline{\int_c^b} h,$$

ver Exemplo 1.9. Analogamente, prova-se

$$\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} g + \underline{\int_c^b} h.$$

Logo, subtraindo estes resultados, obtemos

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = \left(\overline{\int_a^c} g - \underline{\int_a^c} g\right) + \left(\overline{\int_c^b} h - \underline{\int_c^b} h\right).$$

Pelo Corolário 9.3, as parcelas da soma acima são ≥ 0. Logo,

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = 0 \Leftrightarrow \overline{\int_a^c} g - \underline{\int_a^c} g = \overline{\int_c^b} h - \underline{\int_c^b} h = 0,$$

ou seja, f é integrável se, e somente se, g e h também o são. Neste caso,

$$\int_a^b f = \overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^c} g + \overline{\int_c^b} h = \int_a^c g + \int_c^b h = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

□

Obs 9.9. No texto, adotaremos as seguintes convenções:

$$\int_a^a f = 0, \int_a^b f = -\int_b^a f.$$

Obs 9.10. Por indução podemos generalizar o Teorema 9.6. Sejam $c_1, c_2, ..., c_n \in (a, b)$, então f é integrável se, e somente se, $f|_{[a,c_1]}$, $f|_{[c_1,c_2]}$,..., $f|_{[c_n,b]}$ são integráveis. Neste caso,

$$\int_a^b f = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + ... + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f + \int_{c_n}^b f.$$

Exemplo 9.16 (Integral da Função Escada)**.** Seja $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0, 1); \\ 2, & \text{se } x \in [1, 2); \\ 3, & \text{se } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Portanto, pelo Teorema 9.6, f é integrável e

$$\int_0^3 f = \int_0^1 1 + \int_1^2 2 + \int_2^3 3 = 1(1-0) + 2(2-1) + 3(3-2) = 6,$$

ver Exemplo 9.13.

Exercícios de Fixação

1. Considere a função $f(x) = x + 1$, para $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$, caso contrário. Mostre que f não é integrável.

9.4 Teoremas Importantes sobre Integrabilidade

O principal interesse, nesta seção, é enunciar e provar os Teoremas Fundamental do Cálculo, Mudança de Variável e Integração por Partes. Porém, trabalharemos também em outros resultados que também não passam despercebidos na teoria das funções integráveis a

Riemann. Iniciamos com uma afirmação que expõe uma condição suficiente para integrabilidade.

Teorema 9.7 (Integrabilidade de Funções Contínuas)**.** *Toda função contínua* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é integrável.*

Demonstração. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Como $[a, b]$ é compacto, utilizando o Teorema 6.14, concluímos que f é uniformemente contínua. Com isso, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{para todo } x, y \in [a, b], \text{ com } |x - y| < \delta, \text{ tem-se } |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Vamos provar que f é integrável. Seja $P : a = t_0 < ... < t_n = b$ uma partição de $[a, b]$ tal que

$$|t_i - t_{i-1}| < \delta, \forall\ i = 1, 2, ..., n.$$

Como f é contínua em $[a, b]$, então f é contínua em $[t_{i-1}, t_i]$, $\forall\ i = 1, 2, .., n$ (ver Teorema 6.1). Dessa forma, f é uniformemente contínua em $[t_{i-1}, t_i]$, $\forall\ i = 1, 2, ..., n$, pelo Teorema 6.14 ($[t_{i-1}, t_i]$ é compacto). Assim sendo, usando o Teorema 6.11, concluímos que existem $x_i, y_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tais que

$$f(x_i) \le f(x) \le f(y_i), \forall\ x \in [t_{i-1}, t_i].$$

Observe que

$$|x_i - y_i| \le |t_i - t_{i-1}| < \delta.$$

Logo,

$$f(y_i) - f(x_i) = |f(x_i) - f(y_i)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^f (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} [f(y_i) - f(x_i)](t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b - a} b - a = \varepsilon,$$

ou seja,

$$S^f(P) - s^f(P) = \sum_{i=1}^{n} w_i^f (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon.$$

O Teorema 9.4 nos garante que f é integrável. $\square$

Exemplo 9.17 (Integrabilidade do Seno, Cosseno, Polinômio)**.** Vimos nos Exemplos 6.8 e 6.9 que as funções seno, cosseno e polinomial são exemplos de funções contínuas em $[a, b]$. Logo, estas funções são integráveis pelo Teorema 9.7.

Exemplo 9.18. Vimos no Exemplo 9.14 que a função $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$, para todo $x \in [1, 2)$ e $f(2) = 2$ é integrável. Analogamente ao que foi feito no Exemplo 6.1, encontramos que f é descontínua em 2. Assim, a recíproca do Teorema 9.7 é falsa.

Vejamos outra condição suficiente para que uma função seja integrável.

Teorema 9.8 (Integrabilidade de Funções Monótonas)**.** *Toda função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monótona é integrável.*

Demonstração. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função não-crescente e não-constante. Se f fosse constante o problema estaria resolvido pelo Exemplo 9.13. Dado $\varepsilon > 0$, seja $P : a = t_0 < ... < t_n = b$ uma partição de $[a, b]$ tal que

$$|t_i - t_{i-1}| < \frac{\varepsilon}{f(a) - f(b)}.$$

Observe que $f(b) < f(a)$ e $f(t_i) \leq f(t_{i-1})$, pois f é não-crescente. Portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} w_i^f (t_i - t_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n} [f(t_{i-1}) - f(t_i)](t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{f(a) - f(b)} \sum_{i=1}^{n} (f(t_{i-1}) - f(t_i)) \\ &= \frac{\varepsilon}{f(a) - f(b)} f(a) - f(b) = \varepsilon,\end{aligned}$$

isto é,

$$S^f(P) - s^f(P) = \sum_{i=1}^{n} w_i^f (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon.$$

O Teorema 9.4 nos garante que f é integrável. Analogamente, prova-se o caso f não-decrescente. □

Exemplo 9.19. A recíproca do Teorema 9.8 não é verdadeira, pois a função seno é integrável mas não é monótona em $[0, 2\pi]$.

Exemplo 9.20. A função característica de $\mathbb{Q}$ em $[a, b]$ não é uma função monótona, pois não é integrável (ver Exemplo 9.12).

Definição 9.8 (Integral Indefinida)**.** Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável e $y \in [a, b]$, onde $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo. Dizemos que uma função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma integral indefinida de f se essa aplicação pode ser definida por

$$g(x) = g(y) + \int_y^x f, \forall\ x \in [a, b].$$

Exemplo 9.21. Considere a função constante $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = k, \forall\ x \in [0, 1].$$

Defina $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = kx, \forall\ x \in [0, 1].$$

Com isso,

$$g(0) + \int_0^x f = 0 + \int_0^x k = kx = g(x), \forall\ x \in [0, 1],$$

ver Exemplo 9.13. Portanto, g é a integral indefinida de f.

Definição 9.9 (Primitiva)**.** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, onde $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo. Se $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função derivável tal que

$$g'(x) = f(x), \forall\ x \in [a, b],$$

dizemos que g é uma primitiva de f.

Obs 9.11. Observe que a primitiva, quando existe, não é única. De fato, se g é uma primitiva de f, então $g + k$ também o é, onde k é uma constante qualquer, já que

$$(g + k)'(x) = g'(x) + 0 = f(x), \forall\ x \in [a, b],$$

ver Exemplo 9.13.

Exemplo 9.22. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Defina $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \frac{x^{n+1}}{n + 1}, \forall\ x \in [0, 1].$$

Assim sendo,

$$g'(x) = \frac{(n + 1)x^n}{n + 1} = x^n = f(x), \forall\ x \in [0, 1].$$

Com isso, g é primitiva de f.

Exemplo 9.23. A função seno é a primitiva da função cosseno em $[a, b]$, pois

$$\text{sen}' x = \cos x, \forall\ x \in [a, b],$$

ver Exemplo 7.4. A função constante é a primitiva da função identicamente nula, pois a derivada da constante é 0 (ver Exemplo 7.1).

Exemplo 9.24. Vimos no Exemplo 7.30 que a função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -1$, se $-1 \leq x < 0$ e $f(x) = 1$, se $0 \leq x \leq 1$ não possui primitiva.

Teorema 9.9 (Teorema Fundamental do Cálculo)**.** *Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $y \in I$ um ponto fixo. Considere as funções $f, g : I \to \mathbb{R}$, onde f é contínua em I. Então, são equivalentes os seguintes itens:*

i) $g(x) = g(y) + \displaystyle\int_y^x f, \forall\ x \in I;$

ii) $g'(x) = f(x),\ \forall\ x \in I.$

Em palavras, g é uma integral indefinida de f se, e somente se, é uma primitiva para esta mesma função.

Demonstração. **i)** $\Rightarrow$ **ii)** Sejam $z, z + h \in I$. Assim, pelo Teorema 9.6, concluímos que

$$\begin{aligned}
\frac{g(z+h) - g(z)}{h} - f(z) &= \frac{g(y) + \displaystyle\int_y^{z+h} f - \left(g(y) + \displaystyle\int_y^z f\right)}{h} - \frac{\displaystyle\int_z^{z+h} f(z)}{h} \\
&= \frac{\displaystyle\int_y^{z+h} f - \displaystyle\int_y^z f}{h} - \frac{\displaystyle\int_z^{z+h} f(z)}{h} \\
&= \frac{\displaystyle\int_z^{z+h} f}{h} - \frac{\displaystyle\int_z^{z+h} f(z)}{h} \\
&= \int_z^{z+h} \frac{[f - f(z)]}{h}.
\end{aligned}$$

A integral de f existe, pois f é contínua (ver Teorema 9.7). Além disso, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{para todo } x \in I, \text{ com } |x - z| < \delta, \text{ tem-se } |f(x) - f(z)| < \varepsilon.$$

Dessa forma, usando o Teorema 9.5, com $0 < |h| < \delta$ e $z + h \in I$, inferimos

$$\begin{aligned} \left|\frac{g(z+h) - g(z)}{h} - f(z)\right| &= \left|\int_z^{z+h} \frac{[f - f(z)]}{h}\right| \leq \left|\frac{1}{h}\right| \int_z^{z+h} |f - f(z)| \\ &\leq \left|\frac{1}{h}\right| \int_z^{z+h} \varepsilon \leq \left|\frac{1}{h}\right| |h|\, \varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

pois $0 < |h| < \delta$ implica em $|x - z| < \delta$, para x entre z e $z + h$. Assim sendo,

$$\lim_{h \to 0} \left|\frac{g(z+h) - g(z)}{h} - f(z)\right| = 0,$$

isto é,

$$g'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} = f(z).$$

ii) $\Rightarrow$) **i)** Reciprocamente, suponha que $g'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in I$. Defina $\lambda : I \to \mathbb{R}$ por

$$\lambda(x) = \int_y^x f, \forall\, x \in I.$$

Analogamente ao que foi feito acima,

$$\lambda'(x) = f(x), \forall\, x \in I.$$

Dessa forma, $\lambda'(x) = g'(x)$, isto é, $(\lambda - g)'(x) = 0$. Pelo Corolário 7.14, concluímos que $\lambda(x) - g(x) = k$, onde k é constante. Como

$$k = \lambda(y) - g(y) = \int_y^y f - g(y) = -g(y),$$

ver observações do Teorema 9.6, então,

$$g(x) = \lambda(x) - k = g(y) + \int_y^x f, \forall\ x \in I.$$

$\square$

Obs 9.12. Com as hipóteses estabelecidas no Teorema 9.9, temos que

$$g(b) = g(a) + \int_a^b f,$$

ou equivalentemente,

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

Neste caso, para calcular a integral de uma função integrável basta encontrar sua primitiva, caso isto seja possível.

Exemplo 9.25 (Integral do Seno e do Cosseno)**.** Usando o Teorema 9.9, podemos concluir que

$$\int_0^\pi \text{sen} = -\cos(\pi) - [-\cos(0)] = 1 + 1 = 2.$$

E que,

$$\int_0^\pi \cos = \text{sen}(\pi) - \text{sen}(0) = 0 - 0 = 0.$$

Exemplo 9.26 (Integral do Polinômio)**.** Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^n, \forall\ x \in [0, 1],$$

para $n \in \mathbb{N}$. Seja $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \forall\ x \in [0, 1].$$

Dessa forma, pelo Teorema 9.9, obtemos

$$\int_0^1 f = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Teorema 9.10 (Mudança de Variável)**.** *Sejam* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua e* $h : [c, d] \to \mathbb{R} \in C^1$, *com* $h([c,d]) \subseteq [a,b]$. *Então,*

$$\int_{h(c)}^{h(d)} f = \int_c^d (f \circ h)h'.$$

Demonstração. Usando o Teorema 9.9, concluímos que

$$\int_{h(c)}^{h(d)} f = g(h(d)) - g(h(c)),$$

onde g é a primitava de f em $[a,b]$. Com o Teorema 7.3, concluímos que

$$(g \circ h)'(x) = g'(h(x))h'(x) = f(h(x))h'(x), \forall\ x \in [a,b].$$

Portanto, $g \circ h$ é a primitiva da função $(f \circ h) \circ h' : [c,d] \to \mathbb{R}$, a qual é contínua, pois f é contínua e $h \in C^1$. Novamente, usando o Teorema 9.9, chegamos ao seguinte resultado:

$$\int_c^d (f \circ h)h' = g \circ h(d) - g \circ h(c) = g(h(d)) - g(h(c)) = \int_{h(c)}^{h(d)} f.$$

Por fim,

$$\int_c^d (f \circ h)h' = \int_{h(c)}^{h(d)} f.$$

□

Exemplo 9.27. Seja $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \cos x, \forall\ x \in [0, \pi/2].$$

e $h : [0, \pi/4] \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = 2x, \forall\ x \in [0, \pi/4].$$

Usando o Teorema 9.10, concluímos que

$$2\int_0^{\pi/4} \cos(2x) = \int_0^{\pi/4} \cos(2x)2 = \int_0^{\pi/4} (f \circ h)h' = \int_{h(0)}^{h(\pi/4)} f = \int_0^{\pi/2} \cos$$

$$= \operatorname{sen}(\pi/2) - \operatorname{sen}(0) = 1,$$

ou seja, $\int_0^{\pi/4} \cos(2x) = 1/2$.

Teorema 9.11 (Integração por Partes)**.** *Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1. Então,*

$$\int_a^b f'g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b fg'.$$

Demonstração. Primeiramente, usando o Teorema 7.2, concluímos que,

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \forall\ x \in [a,b].$$

Com isso, fg é a primitiva de $f'g+fg'$. Portanto, utilizando os Teoremas 7.2 e 9.9, chegamos a

$$\int_a^b f'g + \int_a^b fg' = \int_a^b [f'g + fg'] = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Consequentemente,

$$\int_a^b f'g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b fg'.$$

$\square$

Exemplo 9.28. Sejam $f, g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = \cos x \text{ e } g(x) = x, \forall\ x \in [0,\pi].$$

Logo, pelo Teorema 9.11, obtemos

$$\int_0^\pi \cos(x)x = \operatorname{sen}(\pi)\pi - \operatorname{sen}(0)0 - \int_0^\pi \operatorname{sen}(x)(x)' = -\int_0^\pi \operatorname{sen} = \cos(\pi) - \cos(0) = -2.$$

Teorema 9.12 (Teorema do Valor Médio para Integrais)**.** *Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções, com f contínua, g integrável e $g(x) \geq 0$, $\forall\ x \in [a,b]$. Assim, existe $y \in [a,b]$ tal que*

$$\int_a^b fg = f(y)\int_a^b g.$$

Demonstração. Como f é contínua no compacto $[a,b]$, então, utilizando o Teorema 6.11, existem $c, d \in [a,b]$ tais que

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d), \forall\ x \in [a,b].$$

Como $g(x) \geq 0$, $\forall\ x \in [a, b]$, então

$$f(c)g(x) \leq f(x)g(x) \leq f(d)g(x), \forall\ x \in [a, b].$$

Pelo Teorema 9.5,

$$f(c) \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq f(d) \int_a^b g.$$

Observe que a função $\left(\int_a^b g\right) f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua (ver Teorema 6.6). Agora, usando o Teorema 6.9, concluímos que existe $y \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b fg = f(y) \int_a^b g.$$

$\square$

Corolário 9.13. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, existe $y \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f = f(y)(b - a).$$

Demonstração. Defina a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = 1$. Lembre que g é integrável e

$$\int_a^b g = b - a,$$

ver Exemplo 9.13. Além disso, $g(x) = 1 \geq 0$, $\forall\ x \in [a, b]$. Dessa forma, pelo Teorema 9.12, existe $y \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b fg = f(y) \int_a^b g = f(y)(b - a).$$

$\square$

Exemplo 9.29. Como a função cosseno é contínua e a função seno é não-negativa e integrável em $[0, \pi]$, então, usando o Teorema 9.12, concluímos que existe $y \in [0, \pi]$ tal que

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} \cos = \cos(y) \int_0^\pi \operatorname{sen} = \cos y[-\cos(\pi) + \cos(0)] = \cos y(1 + 1) = 2 \cos y,$$

ou equivalentemente,

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} \cos = 2 \cos y.$$

Teorema 9.14 (Fórmula de Taylor com Resto Integral)**.** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ n vezes derivável com $f^{(n)}$ contínua em $[y, y+h]$, onde $y, y+h \in I$. Então,*

$$f(y+h) = f(y) + f'(y)h + ... + \frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!}h^{n-1} + \left[\int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(y+th)\right] h^n.$$

Demonstração. Precisaremos da função auxiliar $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(t) = f(y+th), \forall\ t \in [0,1].$$

Veja que, usando o Teorema 7.3, encontramos

$$g'(t) = f'(y+th)h, g''(t) = f''(y+th)h^2, ..., g^{(n)}(t) = f^{(n)}(y+th)h^n.$$

Portanto,

$$g'(0) = f'(y)h,\ g''(0) = f''(y)h^2, ...,\ g^{(n)}(0) = f^{(n)}(y)h^n.$$

Com isso, a fórmula dada no Teorema 9.14 é equivalente a

$$g(1) = g(0) + g'(0) + ... + \frac{g^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n)}(t).$$

Vamos provar esta fórmula por indução sobre n. Se $n = 1$, temos que provar a igualdade

$$g(1) = g(0) + \int_0^1 g'.$$

Porém, este fato segue diretamente do Teorema 9.9. Suponha, agora que

$$g(1) = g(0) + g'(0) + ... + \frac{g^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n)}(t).$$

Vamos provar que

$$g(1) = g(0) + g'(0) + ... + \frac{g^{(n)}(0)}{n!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t).$$

Usando o Teorema 9.11, concluímos que

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t) = \frac{(1-1)^n}{n!} g^n(1) - \frac{(1-0)^n}{n!} g^{(n)}(0) - \int_0^1 -\frac{n(1-t)^{n-1}}{n!} g^{(n)}(t) =$$

$$-\frac{1}{n!}g^{(n)}(0)+\int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n)}(t)=-\frac{g^{(n)}(0)}{n!}+g(1)-g(0)-g'(0)-...-\frac{g^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}.$$

Portanto,

$$g(1)=g(0)+g'(0)+...+\frac{g^{(n)}(0)}{n!}+\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}g^{(n+1)}(t).$$

□

Exemplo 9.30. Veremos que $\mathrm{e}^{(n)}=\mathrm{e}$ (ver Teorema 10.2). Assim,

$$\mathrm{e}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{8!}+\int_0^1 \frac{(1-t)^9}{9!}\mathrm{e}^t.$$

Ou seja,

$$\int_0^1 (1-t)^9\mathrm{e}^t=9!\mathrm{e}-(2)9!-\frac{9!}{2!}-\frac{9!}{3!}-...-\frac{9!}{8!}.$$

Exercícios de Fixação

1. Sejam $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínuas tais que $\int_a^b f=\int_a^b g$. Mostre que existe $c\in[a,b]$ tal que $f(c)=g(c)$.

2. Mostre que $f(x)=\mathrm{sen}(1/x)$, se $x\in(0,1]$ e $f(0)=0$ é integrável.

3. Encontre a derivada da função $F(x)=\int_0^{x^2}(1+t^3)^{-1}$.

4. Use o Teorema 9.10 para calcular as integrais $\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}$ e $\int_1^4 \cos\sqrt{t}/\sqrt{t}$.

9.5 Leitura Complementar

Nesta seção, trabalharemos com aplicações de uma desigualdade do tipo Gronwall e desenvolveremos uma teoria que estende os conceito de Integral a Riemann, as então chamadas Integrais a Riemann-Stieltjes.

9.5.1 Desigualdade Tipo Gronwall e Equação de Fisher

Neste tópico, estamos interessados em aplicar uma desigualdade do tipo Gronwall na teoria das Equações Diferenciais Parciais de Fisher.

Teorema 9.15 (Desigualdade tipo Gronwall). *Seja $f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Se, para todo $t \in [0,T]$,*

$$f'(t) \leq Mf(t), \tag{9.1}$$

onde $M \in \mathbb{R}$ é uma constante, então,

$$f(t) \leq e^{Mt}f(0), \forall\ t \in [0,T]. \tag{9.2}$$

Demonstração. Defina a aplicação $z : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$z(t) = e^{-Mt}f(t), \forall\ t \in [0,T].$$

Como f é derivável, então z é derivável e

$$z'(t) = [e^{-Mt}]'f(t) + e^{-Mt}f'(t),$$

para todo $t \in [0,T]$. Aplicando a Regra da Cadeia (ver Teorema 7.3), chegamos a

$$\begin{aligned} z'(t) &= -Me^{-Mt}f(t) + e^{-Mt}f'(t) \\ &= e^{-Mt}[f'(t) - Mf(t)]. \end{aligned}$$

Mas, a desigualdade (9.1) nos diz que

$$f'(t) - Mf(t) \leq 0,$$

para todo $t \in [0,T]$. Logo,

$$z'(t) = e^{-Mt}\Big[f'(t) - Mf(t)\Big] \leq 0.$$

Consequentemente, $z'(t) \leq 0$. Portanto, z é uma função não-crescente (ver Corolário 7.15). Em particular, $z(t) \leq z(0)$, para todo $t \in [0,T]$, isto é,

$$e^{-Mt}f(t) \leq e^{-M\cdot 0}f(0).$$

Dessa forma, $e^{-Mt}y(t) \leq y(0)$. Por fim,

$$f(t) \leq e^{Mt}f(0),$$

para todo $t \in [0,T]$. Isto finaliza a prova do Teorema 9.15. $\square$

Para aplicar a Desigualdade tipo Gronwall, precisaremos de algumas definições e um resultado em especial envolvendo $\mathbb{R}^2$.

Definição 9.10 (Aberto no Plano)**.** Dizemos que um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^2$ é aberto se para cada $(x,y) \in X$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x,y) \subseteq X$, onde

$$B_\varepsilon(x,y) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \|(a,b)-(x,y)\| < \varepsilon\}.$$

Aqui $\|(t,s)\| = \sqrt{t^2+s^2}, \forall\ (t,s) \in \mathbb{R}^2$.

Definição 9.11 (Ponto de Acumulação no Plano)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}^2$. Um ponto $(x,y) \in X'$ se para qualquer $\varepsilon > 0$, tem-se

$$X \cap (B_\varepsilon(x,y) \backslash \{(x,y)\}) \neq \emptyset.$$

Definição 9.12 (Continuidade no Plano)**.** Sejam $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $(a,b) \in X$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é contínua em (a,b), se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{para todo } (x,y) \in X \text{ com } \|(x,y)-(a,b)\| < \delta, \text{ tem-se } |f(x,y)-f(a,b)| < \varepsilon.$$

Definição 9.13 (Limite no Plano)**.** Sejam $(a,b) \in X'$ e $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que o limite de $f(x,y)$, quando (x,y) tende para (a,b), é l se dado $\varepsilon > 0$, exite $\delta > 0$ tal que

$$\text{para todo } x \in X, \text{ com } 0 < \|(x,y)-(a,b)\| < \delta, \text{ tem-se } |f(x,y)-l| < \varepsilon.$$

Neste caso escrevemos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l.$$

Definição 9.14 (Derivada Parcial no Plano)**.** Seja $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função definida no aberto X. Definimos a derivada parcial de f, em relação à primeira variável, em $(a,b) \in X$,

através do limite
$$f_x(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$
Analogamente, definimos a derivada parcial de f, em relação à segunda variável, no ponto (a,b), como sendo o limite

$$f_t(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}.$$

Caso um destes limites não exista, simplesmente diremos que a respectiva derivada parcial, em tal ponto, não existe.

O resultado a seguir nos informa quando podemos passar uma derivada parcial pelo sinal de integração.

Teorema 9.16 (Teorema de Leibniz)**.** *Seja $f : [a,b] \times X \to \mathbb{R}$ contínua, onde $X \subseteq \mathbb{R}$ é aberto, tal que a função, definida canonicamente, $f_t : [a,b] \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ é continua. Então, a aplicação $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$\varphi(t) = \int_a^b f(x,t)dx,$$

possui derivada em cada ponto $t \in X$ e

$$\varphi'(t) = \int_a^b f_t(x,t)dt.$$

Agora, faremos uma aplicação da Desigualdade tipo Gronwall com o propósito de analisar o Comportamento Assintótico de uma solução da Equação Diferencial Parcial de Fisher. Para a sua elaboração, será demonstrado o seguinte teorema.

Teorema 9.17. *Seja u uma solução da Equação Diferencial Parcial de Fisher*

$$u_t = u_{xx} + u(1-u), \tag{9.3}$$

onde u, u_x, u_{xx}, u_t são funções contínuas em $[0,1] \times [0,\infty)$. Consideremos que u satisfaz as condições de fronteira

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \tag{9.4}$$

e a condição inicial

$$u(x,0) = f(x). \tag{9.5}$$

Se existe $\varepsilon > 0$ tal que o dado inicial f satisfaz

$$\varepsilon \leq f(x) \leq 1 + \varepsilon, \tag{9.6}$$

para todo $x \in [0,1]$, e

$$u(x,t) \geq \varepsilon, \tag{9.7}$$

para todo $x \in [0,1], t \geq 0$. Então, u se aproxima assintoticamente da solução $u = 1$, do problema (9.3)*, no seguinte sentido:*

$$\int_0^1 [u(x,t) - 1]^2 dx \leq e^{-2\varepsilon t} \int_0^1 [u(x,0) - 1]^2 dx,$$

para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Definamos uma função $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(t) = \int_0^1 (u(x,t) - 1)^2 dx.$$

Portanto, pelo Teorema de Leibniz (ver Teorema 9.16), f é derivável em $[0, \infty)$ e

$$f'(t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 [u(x,t) - 1]^2 dx = \int_0^1 \{[u(x,t) - 1]^2\}_t dx.$$

Consequentemente,

$$f'(t) = \int_0^1 2[u(x,t) - 1][u(x,t) - 1]_t dx = \int_0^1 2(u-1)u_t dx = 2\int_0^1 (u-1)u_t dx.$$

Usando a equação (9.3), segue que

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2\int_0^1 (u-1)[u_{xx} + u(1-u)]dx \\ &= 2\int_0^1 [u_{xx}(u-1) + u(1-u)(u-1)]dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_0^1 [u_{xx}(u-1) - u(u-1)^2]dx \\
&= 2\int_0^1 u_{xx}(u-1)dx - 2\int_0^1 u(u-1)^2 dx.
\end{aligned}
$$

Integrando por partes (ver Teorema 9.11), chegamos a

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= 2\left[(u-1)u_x\Big|_0^1 - \int_0^1 u_x^2 dx\right] - 2\int_0^1 u(u-1)^2 dx \\
&= 2\left\{[u(1,t)-1]u_x(1,t) - [u(0,t)-1]u_x(0,t) - \int_0^1 u_x^2 dx\right\} - 2\int_0^1 u(u-1)^2 dx.
\end{aligned}
$$

De acordo com os dados de fronteira em (9.4), obtem-se

$$
f'(t) = -2\int_0^1 u_x^2 dx - 2\int_0^1 u(u-1)^2 dx.
$$

Notemos que, $\int_0^1 u_x^2 dx \geq 0$. Então,

$$
f'(t) \leq -2\int_0^1 u(u-1)^2 dx.
$$

Pela desigualdade (9.7), temos que

$$
f'(t) \leq -2\int_0^1 \varepsilon(u-1)^2 dx \leq -2\varepsilon\int_0^1 (u-1)^2 dx = -2\varepsilon f(t).
$$

E assim, pelo Teorema 9.15, obtemos

$$
f(t) \leq e^{-2\varepsilon t} f(0),
$$

para todo $t \geq 0$, ou seja,

$$
\int_0^1 [u(x,t)-1]^2 dx \leq e^{-2\varepsilon t}\int_0^1 [u(x,0)-1]^2 dx,
$$

para todo $t \geq 0$. Isto conclui a prova do Teorema. □

A existência de uma solução para Problema de Fronteira acima está discutida em [18]. Além disso, a desigualdade (9.7) é sempre satisfeita se as outras condições no Teorema 9.17

são verificáveis. Para ver a prova deste fato ver [19].

Observe que, com as mesmas hipóteses estabelecidas no Teorema 9.17, podemos reescrever a desigualdade

$$\int_0^1 [u(x,t)-1]^2 dx \leq e^{-2\varepsilon t} \int_0^1 [u(x,0)-1]^2 dx.$$

da seguinte maneira:

$$\|u(\cdot,t)-1\|_{L^2([0,1])} \leq e^{-\varepsilon t}\|u(\cdot,0)-1\|_{L^2([0,1])},$$

para todo $t \geq 0$, onde $\|u(\cdot,t)\|_{L^2([0,1])} = \left(\int_0^1 [u(x,t)]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$. Consequentemente,

$$\lim_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)-1\|_{L^2([0,1])} = 0.$$

9.5.2 Integral a Riemann-Stieltjes de Funções Reais

Além da Integral a Riemann, a Integral a Riemann-Stieltjes, assim chamada devido a Bernhard Riemann e Thomas Joannes Stieltjes, nos permite obter resultados e aplicações ainda mais abrangentes e igualmente importantes para o desenvolvimento da Matemática.

Uma vez que a Integral a Riemann-Stieltjes é uma generalização da Integral a Riemann estudaremos esse instrumento, a partir dos conceitos e resultados até aqui apresentados.

Demonstraremos alguns resultados importantes sobre a Integral a Riemann-Stieltjes e suas principais propriedades. Provaremos o Teorema de Mudança de Variáveis para a Integração a Riemann-Stieltjes e estabeleceremos condições sob as quais a Integral a Riemann-Stieltjes pode ser reduzida à Integral a Riemann.

Analogamente ao que foi feito para a Integral a Riemann, definiremos as somas inferior e superior para a Integral a Riemann-Stieltjes.

Definição 9.15. Sejam $\alpha, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções limitadas, com α monótona crescente. Definimos e denotamos, para cada partição $P : a = x_0 < \ldots < x_n = b$ de $[a,b]$, a soma inferior de f com respeito a α e P por

$$s^f(\alpha,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i^f[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})]$$

e a soma superior de f com respeito a α e P por

$$S^f(\alpha, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i^f[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})],$$

onde, $\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) > 0$, uma vez que α é crescente.

Exemplo 9.31. Sejam $\alpha, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções definidas por

$$f(x) = c \text{ e } \alpha(x) = x + 1, \forall\, x \in [a, b].$$

Sabemos que f e α são limitadas em $[a, b]$ e que α é monótona crescente em $[a, b]$. Seja $P : a = x_0 < ... < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$, então

$$m_i^f = \inf\{f(x); x \in [x_i, x_{i-1}]\} = \inf\{c; x \in [x_i, x_{i-1}]\} = c.$$

Além disso,

$$M_i^f = \sup\{f(x); x \in [x_i, x_{i-1}]\} = \sup\{c; x \in [x_i, x_{i-1}]\} = c.$$

Logo,

$$\begin{aligned} s^f(\alpha, P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i^f[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} c[x_i + 1 - (x_{i-1} + 1)] \\ &= c\sum_{i=1}^{n}[x_i - x_{i-1}] = c(x_n - x_0) = c(b - a) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S^f(\alpha, P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i^f[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} c(x_i + 1)(x_{i-1} + 1) \\ &= c\sum_{i=1}^{n}[x_i - x_{i-1}] = c(x_n - x_0) = c(b - a). \end{aligned}$$

Exemplo 9.32. Sejam $\alpha, f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dadas por $\alpha(x) = x^2$ e

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]; \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1]. \end{cases}$$

Tanto f quanto α são limitadas inferiomente por 0 e superiormente por 1. Claramente α é crescente. Considere uma partição $P : 0 = x_0 < ... < x_n = 1$ de $[0,1]$. Vimos que

$$m_i^f = \inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 0 \quad \text{e} \quad M_i^f = \sup\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 1.$$

Logo,

$$s^f(\alpha, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i^f[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} 0[(x_i)^2 - (x_{i-1})^2] = 0$$

e

$$\begin{aligned} S^f(\alpha, P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i^f[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} 1[(x_i)^2 - (x_{i-1})^2] \\ &= (x_n)^2 - (x_0)^2 = 1^2 - 0^2 = 1. \end{aligned}$$

Proposição 9.1. *Sejam $\alpha, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e P, Q partições de $[a,b]$. Se Q refina P, então*

$$s^f(\alpha, P) \leq s^f(\alpha, Q) \text{ e } S^f(\alpha, Q) \leq S^f(\alpha, P),$$

ou, em outras palavras, a soma inferior não diminui e a soma superior não aumenta.

Demonstração. Suponhamos inicialmente que Q contém exatamente um ponto a mais que P, isto é, $Q = P \cup \{k\}$. Sejam $P : a = x_0 < ... < x_n = b$ e $Q : a = x_0 < ... < x_{j-1} < k < x_j < ... < x_n = b$ partições de $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, onde Q refina P. Sejam

$$m_{k1}^f = \inf\{f(x); x \in [x_{j-i}, k]\} \text{ e } m_{k2}^f = \inf\{f(x); x \in [k, x_j]\}.$$

Como $[x_{j-i}, k], [k, x_j] \subseteq [x_{j-i}, x_j]$, então $m_{k1}^f, m_{k2}^f \geq m_j^f$. Daí,

$$\begin{aligned} s^f(\alpha, P) - s^f(\alpha, Q) &= m_j^f[\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] - m_{k1}^f[\alpha(k) - \alpha(x_{j-1})] - m_{k2}^f[\alpha(x_j) - \alpha(k)] \\ &\leq m_j^f[\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] - m_j^f[\alpha(k) - \alpha(x_{j-1})] - m_j^f[\alpha(x_j) - \alpha(k)] \\ &= m_j^f[\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1}) - \alpha(k) + \alpha(x_{j-1}) - \alpha(x_j) + \alpha(k)] = 0. \end{aligned}$$

Como esse procedimento pode ser generalizado para uma quantidade finita de passos, temos que $s^f(\alpha, P) \leq s^f(\alpha, Q)$. Analogamente, mostramos que $S^f(\alpha, Q) \leq S^f(\alpha, P)$. □

Estenderemos os conceitos apresentados em Integral a Riemann para a Integral a Riemann-Stieltjes, ou seja, definiremos as integrais inferior e superior de uma função limitada

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, com respeito a $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ para uma partição $P : a = x_0 < ..., x_n = b$ de $[a,b]$.

Definição 9.16. Sejam $\alpha, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções limitadas, com α monótona crescente. Definimos e denotamos a integral inferior de Riemann-Stieltjes no intervalo $[a,b]$ de f com respeito a α por

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha = \sup\{s^f(\alpha, P); P \text{ partição de } [a,b]\}$$

e a integral superior de Riemann-Stieltjes no intervalo $[a,b]$ de f com respeito a α por

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \inf\{S^f(\alpha, P); P \text{ partição de } [a,b]\}.$$

Exemplo 9.33. Sejam $\alpha, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = c \text{ e } \alpha(x) = x + 1, \forall\ x \in [a,b].$$

Vimos no Exemplo 9.31 que

$$s^f(\alpha, P) = S^f(\alpha, P) = c(b-a).$$

Logo, as integrais inferior e superior de Riemann-Stieltjes de f são, respectivamente,

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha = \sup\{s^f(\alpha, P)\} = \sup\{c(b-a)\} = c(b-a)$$

e

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \inf\{S^f(\alpha, P)\} = \inf\{c(b-a)\} = c(b-a).$$

Exemplo 9.34. Para as funções $\alpha, f : [0,1] \to \mathbb{R}$, com $\alpha(x) = x^2$ e

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]; \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1], \end{cases}$$

temos, que

$$s^f(\alpha, P) = 0 \text{ e } S^f(\alpha, P) = 1.$$

Daí,

$$\underline{\int_0^1} f d\alpha = \sup\{s^f(\alpha, P)\} = \sup\{0\} = 0$$

e

$$\overline{\int_0^1} f d\alpha = \inf\{S^f(\alpha, P)\} = \inf\{1\} = 1.$$

Proposição 9.2. *Sejam $\alpha, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções limitadas, com α monótona crescente. Então,*

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f d\alpha,$$

ou, em outras palavras, a integral inferior nunca ultrapassa a superior.

Demonstração. Sejam P_1, P_2 partições de $[a,b]$ e $P = P_1 \cup P_2$. Sabemos que P refina P_1 e P_2 (ver Exemplo 9.3). Da Proposição 9.1, temos que

$$s^f(\alpha, P_1) \leq s^f(\alpha, P) \leq S^f(\alpha, P) \leq S^f(\alpha, P_2).$$

Fixando P_1, concluímos que $\inf\{S^f(\alpha, P_2)\}$ existe e

$$s^f(\alpha, P_1) \leq \inf\{S^f(\alpha, P_2)\} = \overline{\int_a^b} f d\alpha, \forall\ P_1.$$

Consequentemente, $\sup\{s^f(\alpha, P_1)\}$ existe e

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha = \sup\{s^f(\alpha, P_1)\} \leq \overline{\int_a^b} f d\alpha.$$

$\square$

Neste momento, definiremos e exemplificaremos a Integral a Riemann-Stieltjes como uma generalização da Integral a Riemann.

Definição 9.17 (Integral a Riemann-Stieltjes)**.** Sejam $\alpha, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções limitadas, com α monótona crescente. Dizemos que f é integrável a Riemann-Stieltjes no intervalo $[a,b]$, com respeito a α, quando

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha = \overline{\int_a^b} f d\alpha.$$

Definimos o valor comum como a Integral a Riemann-Stieltjes de f com respeito a α em $[a,b]$ e denotamos este valor por $\displaystyle\int_a^b f d\alpha$. Neste caso, escrevemos $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

Exemplo 9.35. Consideremos mais uma vez as funções $\alpha, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = c \text{ e } \alpha(x) = x + 1, \forall\, x \in [a, b].$$

Temos, do Exemplo 9.33, que

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha = c(b - a) = \overline{\int_a^b} f d\alpha.$$

Logo, $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

Exemplo 9.36. Para as funções $\alpha, f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, com

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]; \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1], \end{cases}$$

e $\alpha(x) = x^2$, mostramos, que

$$\underline{\int_0^1} f d\alpha = 0 \text{ e } \overline{\int_0^1} f d\alpha = 1.$$

Então $f \notin \mathcal{R}(\alpha)$.

Obs 9.13. Quando $\alpha(x) = x$, a Integral a Riemann é obtida como um caso particular da Integral a Riemann-Stieltjes. Portanto, os resultados aqui apresentados generalizam os resultados vistos no estudo da Integral a Riemann.

Exemplo 9.37. Sejam $\alpha, f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = c \text{ e } \alpha(x) = x, \forall\, x \in [1, 2].$$

Assim,

$$m_i^f = \inf\{f(x); x \in [x_i, x_{i-1}]\} = \inf\{c; x \in [x_i, x_{i-1}]\} = c$$

e

$$M_i^f = \sup\{f(x); x \in [x_i, x_{i-1}]\} = \sup\{c; x \in [x_i, x_{i-1}]\} = c.$$

Logo, as somas inferior e superior são, respectivamente,

$$s^f(\alpha, P) \;=\; \sum_{i=1}^{n} m_i^f[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} c[x_i - x_{i-1}]$$

$$= \quad c\sum_{i=1}^{n}[x_i - x_{i-1}] = c(x_n - x_0) = c(2-1) = c$$

e

$$\begin{aligned} S^f(\alpha, P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i^f[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} c[x_i - x_{i-1}] \\ &= c\sum_{i=1}^{n}[x_i - x_{i-1}] = c(x_n - x_0) = c(2-1) = c, \end{aligned}$$

ou seja, $s^f(\alpha, P) = s^f(P)$ e $S^f(\alpha, P) = S^f(P)$, somas estas que foram obtidas no Exemplo 4.13.

A seguir, mostraremos um resultado que caracteriza uma função integrável a Riemann-Stieltjes. Este será denominado Critério de Cauchy para integral.

Teorema 9.18 (Critério de Cauchy para Integral Riemann-Stieltjes)**.** *Sejam $\alpha, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções limitadas, com α monótona crescente. Então $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ sobre $[a, b]$ se, e somente se, para cada $\epsilon > 0$, existe uma partição $P^\epsilon : a = x_0 < ... < x_n = b$ de $[a, b]$ tal que*

$$S^f(\alpha, P^\epsilon) - s^f(\alpha, P^\epsilon) < \epsilon.$$

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponhamos que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$. Dado $\epsilon > 0$, pelas definições 1.12 e 1.11, existem partições P_1^ϵ e P_2^ϵ de $[a, b]$ tais que

$$S^f(\alpha, P_2^\epsilon) - \int_a^b f d\alpha < \frac{\epsilon}{2} \text{ e } \int_a^b f d\alpha - s^f(\alpha, P_1^\epsilon) < \frac{\epsilon}{2},$$

pois

$$\int_a^b f d\alpha = \underline{\int_a^b} f d\alpha = \overline{\int_a^b} f d\alpha,$$

onde

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha = \sup\{s^f(\alpha, P); P\}$$

e

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \inf\{S^f(\alpha, P); P\}.$$

Seja $P^\epsilon = P_1^\epsilon \cup P_2^\epsilon$ um refinamento comum a P_1^ϵ e P_2^ϵ (ver Exemplo 9.3). Pela Proposição

9.1 e através das relações acima, temos que

$$S^f(\alpha, P^\epsilon) \leq S^f(\alpha, P_2^\epsilon) \leq \int_a^b f d\alpha + \frac{\epsilon}{2} < s^f(\alpha, P_1^\epsilon) + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}.$$

Consequentemente,

$$S^f(\alpha, P^\epsilon) < s^f(\alpha, P_1^\epsilon) + \epsilon \leq s^f(\alpha, P^\epsilon) + \epsilon.$$

Daí, $S^f(\alpha, P^\epsilon) - s^f(\alpha, P^\epsilon) < \epsilon$.

$\Leftarrow$) Seja $P^\epsilon : a = x_0 < ... < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$ tal que $S^f(\alpha, P^\epsilon) - s^f(\alpha, P^\epsilon) < \epsilon$. Pela Proposição 9.2, temos

$$s^f(\alpha, P^\epsilon) \leq \sup\{s^f(\alpha, P)\} = \underline{\int_a^b} f d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f d\alpha = \inf\{S^f(\alpha, P)\} \leq S^f(\alpha, P^\epsilon).$$

Como $S^f(\alpha, P^\epsilon) - s^f(\alpha, P^\epsilon) < \epsilon$, então

$$\inf\{S^f(\alpha, P)\} - \sup\{s^f(\alpha, P)\} \leq S^f(\alpha, P^\epsilon) - s^f(\alpha, P^\epsilon) < \epsilon,$$

ou seja,

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f d\alpha - \underline{\int_a^b} f d\alpha < \epsilon.$$

Passando ao limite, quando $\epsilon \to 0$, encontramos $\overline{\int_a^b} f d\alpha = \underline{\int_a^b} f d\alpha$. Logo, $f \in \mathcal{R}(\alpha)$. $\square$

As principais propriedades da Integral a Riemann-Stieltjes serão apresentadas a seguir, mas antes precisamos provar o seguinte Lema.

Lema 9.3. Sejam $\alpha, f, : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções limitadas, com α monótona crescente. Seja Q uma partição fixa de $[a, b]$. Então,

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha = \sup\{s^f(\alpha, P); Q \subseteq P\} \text{ e } \overline{\int_a^b} f d\alpha = \inf\{S^f(\alpha, P); Q \subseteq P\}.$$

Demonstração. Vamos provar que

$$\sup\{s^f(\alpha, P) : Q \subseteq P\} = \sup\{s^f(\alpha, R) : R\} \text{ e } \inf\{S^f(\alpha, P) : Q \subseteq P\} = \inf\{S^f(\alpha, R) : R\}.$$

Pela Proposição 9.1, temos que

$$s^f(\alpha, Q) \leq s^f(\alpha, P) \text{ e } S^f(\alpha, P) \leq S^f(\alpha, Q).$$

Mas,

$$\{s^f(\alpha, P) : Q \subseteq P\} \subseteq \{s^f(\alpha, R) : R\} \text{ e } \{S^f(\alpha, P) : Q \subseteq P\} \subseteq \{S^f(\alpha, R) : R\},$$

onde tais conjuntos são limitados. Isto nos diz que

$$\sup\{s^f(\alpha, P) : Q \subseteq P\} \leq \sup\{s^f(\alpha, R) : R\} \text{ e } \inf\{S^f(\alpha, P) : Q \subseteq P\} \geq \inf\{S^f(\alpha, R) : R\}.$$

Além disso, dados $s^f(\alpha, R)$ e $S^f(\alpha, R)$, existe uma partição $P = R \cup Q$ (ver Exemplo 9.3), refinamento comum a R e Q, tal que

$$s^f(\alpha, R) \leq s^f(\alpha, P) \text{ e } S^f(\alpha, P) \leq S(^f\alpha, R),$$

onde

$$s^f(\alpha, P) \in \{s^f(\alpha, P) : Q \subseteq P\} \text{ e } S^f(\alpha, P) \in \{S^f(\alpha, P) : Q \subseteq P\},$$

pois $Q \subseteq R \cup Q = P$. Com isso,

$$s^f(\alpha, R) \leq \sup\{s^f(\alpha, P) : Q \subseteq P\} \text{ e } \inf\{S^f(\alpha, P) : Q \subseteq P\} \leq S^f(\alpha, R), \forall\ R.$$

Portanto,

$$\sup\{s^f(\alpha, R) : R\} \leq \sup\{s^f(\alpha, P) : Q \subseteq P\} \text{ e } \inf\{S^f(\alpha, P) : Q \subseteq P\} \leq \inf\{S^f(\alpha, R) : R\}.$$

Consequentemente,

$$\sup\{s^f(\alpha, P) : Q \subseteq P\} = \sup\{s^f(\alpha, R) : R\} \text{ e } \inf\{S^f(\alpha, P) : Q \subseteq P\} = \inf\{S^f(\alpha, R) : R\},$$

isto é,

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha = \sup\{s^f(\alpha, P) : Q \subseteq P\} \text{ e } \overline{\int_a^b} f d\alpha = \inf\{S^f(\alpha, P) : Q \subseteq P\}.$$

□

Proposição 9.3. *Sejam $\alpha, f, f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções limitadas, com α monótona cres-*

cente; e seja c uma constante. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:

i) Se $f_1, f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$ *em* $[a, b]$*, então* $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$*,* $cf \in \mathcal{R}(\alpha)$ *e*

$$\int_a^b (f_1 + f_2)d\alpha = \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha, \ \int_a^b cf d\alpha = c\int_a^b f d\alpha;$$

ii) Se $f_1 \leq f_2$ *em* $[a, b]$*, então*

$$\int_a^b f_1 d\alpha \leq \int_a^b f_2 d\alpha;$$

iii) Se $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *em* $[a, b]$ *e* $a < d < b$*, então* $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *em* $[a, d]$ *e em* $[d, b]$ *e*

$$\int_a^d f d\alpha + \int_d^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha;$$

iv) Se $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *e* $|f| \leq M$ *em* $[a, b]$*, então*

$$\left|\int_a^b f d\alpha\right| \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)];$$

v) Se $f \in \mathcal{R}(\alpha_1)$ *e* $f \in \mathcal{R}(\alpha_2)$*, então* $f \in \mathcal{R}(\alpha_1 + \alpha_2)$ *e*

$$\int_a^b f d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2;$$

vi) Se $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *e* $k > 0$*, então* $f \in \mathcal{R}(k\alpha)$ *e*

$$\int_a^b f d(k\alpha) = k\int_a^b f d\alpha.$$

Demonstração. **i)** Através dos resultados obtidos nos exercícios resolvidos sobre ínfimo, concluímos que

$$\begin{aligned} s^{f_1}(\alpha, P) + s^{f_2}(\alpha, P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i^{f_1}[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] + \sum_{i=1}^{n} m_i^{f_2}[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^{n}(m_i^{f_1} + m_i^{f_2})[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=1}^{n} m_i^{f_1+f_2}[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})] \\ &= s^{f_1+f_2}(\alpha,P). \end{aligned}$$

Semelhantemente,

$$\begin{aligned} S^{f_1}(\alpha,P)+S^{f_2}(\alpha,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i^{f_1}[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})]+\sum_{i=1}^{n} M_i^{f_2}[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^{n}(M_i^{f_1}+M_i^{f_2})[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})] \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} M_i^{f_1+f_2}[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})] \\ &= S^{f_1+f_2}(\alpha,P). \end{aligned}$$

Daí,

$$s^{f_1}(\alpha,P)+s^{f_2}(\alpha,P)\leq s^{f_1+f_2}(\alpha,P)\leq S^{f_1+f_2}(,\alpha,P)\leq S^{f_1}(\alpha,P)+S^{f_2}(\alpha,P)$$

Como $f_1,f_2\in\mathcal{R}(\alpha)$, temos, usando o Teorema 9.18, que dado $\epsilon>0$, existem partições P_1 e P_2 de $[a,b]$ tais que

$$S^{f_1}(\alpha,P_1)-s^{f_1}(\alpha,P_1)<\frac{\epsilon}{2} \text{ e } S^{f_2}(\alpha,P_2)-s^{f_2}(\alpha,P_2)<\frac{\epsilon}{2}.$$

Se considerarmos $P=P_1\cup P_2$ as desigualdades continuam válidas, ou seja,

$$S^{f_1}(\alpha,P)-s^{f_1}(\alpha,P)<\frac{\epsilon}{2} \text{ e } S^{f_2}(\alpha,P)-s^{f_2}(\alpha,P)<\frac{\epsilon}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} S^{f_1+f_2}(\alpha,P)-s^{f_1+f_2}(\alpha,P) &\leq S^{f_1}(\alpha,P)+S^{f_2}(\alpha,P)-[s^{f_1}(\alpha,P)+s^{f_2}(\alpha,P)] \\ &= S^{f_1}(\alpha,P)-s^{f_1}(\alpha,P)+S^{f_2}(\alpha,P)-s^{f_2}(\alpha,P) \\ &< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 9.18, temos que $f_1+f_2\in\mathcal{R}(\alpha)$, uma vez que $f_1,f_2\in\mathcal{R}(\alpha)$. Vimos na demonstração da Proposição 9.2 que

$$s^{f_1}(\alpha, P) \leq \int_a^b f_1 d\alpha \leq S^{f_1}(\alpha, P) \text{ e } s^{f_2}(\alpha, P) \leq \int_a^b f_2 d\alpha \leq S^{f_2}(\alpha, P).$$

Além disso,

$$s^{f_1+f_2}(\alpha, P) \leq \int_a^b (f_1 + f_2) d\alpha \leq S^{f_1+f_2}(\alpha, P).$$

Donde

$$S^{f_1}(\alpha, P) < s^{f_1}(\alpha, P) + \frac{\epsilon}{2} \leq \int_a^b f_1 d\alpha + \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$S^{f_2}(\alpha, P) < s^{f_2}(\alpha, P) + \frac{\epsilon}{2} \leq \int_a^b f_2 d\alpha + \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo,

$$\int_a^b (f_1 + f_2) d\alpha \leq S^{f_1+f_2}(\alpha, P) \leq S^{f_1}(\alpha, P) + S^{f_2}(\alpha, P) < \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha + \epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, fazendo $\epsilon \to 0$, obtemos

$$\int_a^b (f_1 + f_2) d\alpha \leq \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha.$$

Procedendo de maneira análoga, obtemos

$$\int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha \leq \int_a^b (f_1 + f_2) d\alpha.$$

Assim, a igualdade é verificada, isto é,

$$\int_a^b (f_1 + f_2) d\alpha = \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha.$$

Agora, vamos mostrar que $cf \in \mathcal{R}(\alpha)$. De fato,

$$S^{cf}(\alpha, P) - s^{cf}(\alpha, P) = \sum_{i=1}^{n} [M_i^{cf} - m_i^{cf}][\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})]$$

Mas, através do Lema 9.1, temos que

$$\begin{aligned} M_i^{cf} - m_i^{cf} &= \sup\{|(cf)(x) - (cf)(y)|; x, y \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ &= \sup\{|c||f(x) - f(y)|; x, y \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ &= |c| \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ &= |c|(M_i^f - m_i^f). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} S^{cf}(\alpha, P) - s^{cf}(\alpha, P) &= \sum_{i=1}^{n} |c|[M_i^f - m_i^f][\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \\ &= |c| \sum_{i=1}^{n} [M_i^f - m_i^f][\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \\ &= |c|[S(f, \alpha, P) - s(f, \alpha, P)]. \end{aligned}$$

Como $f \in \mathcal{R}(\alpha)$, existe uma partição P de $[a, b]$ tal que

$$S^f(\alpha, P) - s^f(\alpha, P) < \frac{\epsilon}{|c|}, \text{ se } c \neq 0.$$

Então,

$$S^{cf}(\alpha, P) - s^{cf}(\alpha, P) = |c|[S^f(\alpha, P) - s^f(\alpha, P)] < |c| \frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon.$$

Donde $cf \in \mathcal{R}(\alpha)$. O caso $c = 0$ é trivial. Vamos encontrar a Integral a Riemann-Stieltjes de cf. Se $c \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_a^b cf d\alpha &= \overline{\int_a^b} cf d\alpha = \inf\{S^{cf}(\alpha, P)\} \\ &= \inf\{cS^f(\alpha, P)\} = c \ \inf\{S^f(\alpha, P)\} \\ &= c \overline{\int_a^b} f d\alpha = c \int_a^b f d\alpha. \end{aligned}$$

Analogamente, se $c < 0$, encontramos

$$\begin{aligned} \int_a^b cf d\alpha &= \overline{\int_a^b} cf d\alpha = \inf\{S^{cf}(\alpha, P)\} \\ &= \inf\{cs^f(\alpha, P)\} = c \ \sup\{s^f(\alpha, P)\} \end{aligned}$$

$$= \quad c\underline{\int_a^b} f d\alpha = c\int_a^b f d\alpha,$$

ou seja, $\int_a^b cf\ d\alpha = c\int_a^b f d\alpha$.

ii) Como $f_1(x) \leq f_2(x)$, $\forall\ x \in [a,b]$, então

$$f_1(x) \leq f_2(x), \forall\ x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Sendo assim, $m_i^{f_1} \leq m_i^{f_2}$. Logo,

$$s^{f_1}(\alpha, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i^{f_1}[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \leq \sum_{i=1}^{n} m_i^{f_2}[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] = s^{f_2}(\alpha, P).$$

Uma vez que $f_1, f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$,

$$\int_a^b f_1 d\alpha = \underline{\int_a^b} f_1 d\alpha = \sup\{s^{f_1}(\alpha, P)\} \leq \sup\{s^{f_2}(\alpha, P)\} = \underline{\int_a^b} f_2 d\alpha = \int_a^b f_2 d\alpha$$

Portanto, $\int_a^b f_1 d\alpha \leq \int_a^b f_2 d\alpha$.

iii) Sejam $f_1(x) = f(x)$, se $x \in [a,d]$ e $f_2(x) = f(x)$ se $x \in [d,b]$. Sejam $P_1 : a = x_0 < ... < x_n = d$ e $P_2 : d = x_n < ... < x_m = b$ partições de $[a,d]$ e $[d,b]$, respectivamente. Assim,

$$S^{f_1}(\alpha, P_1) = \sum_{i=1}^{n} M_i^f[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \text{ e } S^{f_2}(\alpha, P_2) = \sum_{i=n}^{m} M_i^f[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})].$$

Logo,

$$S^{f_1}(\alpha, P_1) + S^{f_2}(\alpha, P_2) = \sum_{i=1}^{m} M_i^f[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})],$$

onde $P : a = x_0 < ... < x_n = d < ... < x_m = b$ é uma partição de $[a,b]$ que contém d. Como $P_1, P_2 \subseteq P$ temos, pelo Lema 9.3, que

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b} f d\alpha &= \inf\{S^f(\alpha, P) : \{a, d, b\} \subset P\} \\ &= \inf\left\{\sum_{i=1}^{m} M_i^f[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})]\right\} \end{aligned}$$

$$= \inf\{S^{f_1}(\alpha, P_1) + S^{f_2}(\alpha, P_2)\}$$

$$= \inf\{S^{f_1}(\alpha, P_1)\} + \inf\{S^{f_2}(\alpha, P_2)\}$$

$$= \overline{\int_a^d} f_1 d\alpha + \overline{\int_d^b} f_2 d\alpha.$$

Do mesmo modo, mostramos que

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha = \underline{\int_a^d} f_1 d\alpha + \underline{\int_d^b} f_2 d\alpha.$$

Subtraindo os resultados acima, obtemos

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha - \underline{\int_a^b} f d\alpha = \left(\overline{\int_a^d} f_1 d\alpha - \underline{\int_a^d} f_1 d\alpha\right) + \left(\overline{\int_d^b} f_2 d\alpha - \underline{\int_d^b} f_2 d\alpha\right).$$

Como $\underline{\int_a^b} f d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f d\alpha$, concluímos que $\overline{\int_a^b} f d\alpha - \underline{\int_a^b} f d\alpha \geq 0$. O mesmo é válido para as integrais de f_1 e f_2. Assim,

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha - \underline{\int_a^b} f d\alpha = 0 \Leftrightarrow \overline{\int_a^d} f_1 d\alpha - \underline{\int_a^d} f_1 d\alpha = \overline{\int_d^b} f_2 d\alpha - \underline{\int_d^b} f_2 d\alpha = 0.$$

isto é, $f \in \mathcal{R}(\alpha) \Leftrightarrow f_1, f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$. Neste caso,

$$\int_a^b f d\alpha = \overline{\int_a^b} f d\alpha = \overline{\int_a^d} f_1 d\alpha + \overline{\int_d^b} f_2 d\alpha = \int_a^d f_1 d\alpha + \int_d^b f_2 d\alpha = \int_a^d f d\alpha + \int_d^b f d\alpha.$$

iv) Como $|f| \leq M$, então $-M \leq f \leq M$. Usando o item **ii)**, chegamos a

$$-\int_a^b M d\alpha = \int_a^b (-M) d\alpha \leq \int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b M d\alpha.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f d\alpha\right| &\leq \int_a^b M d\alpha = \overline{\int_a^b} M d\alpha \\ &= \inf\{S^M(\alpha, P)\} = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} M[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})]\right\} \\ &= M[\alpha(b) - \alpha(a)]. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\left|\int_a^b f d\alpha\right| \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

v) Suponha que $f \in \mathcal{R}(\alpha_1) \cap \mathcal{R}(\alpha_2)$. Dado $\epsilon > 0$, temos, pelo Teorema 9.18, que existe partição P de $[a, b]$ tal que

$$S^f(\alpha_1, P) - s^f(\alpha_1, P) < \frac{\epsilon}{2} \text{ e } S^f(\alpha_2, P) - s^f(\alpha_2, P) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} S^f(\alpha_1 + \alpha_2, P) - s^f(\alpha_1 + \alpha_2, P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i^f[(\alpha_1 + \alpha_2)(x_i) - (\alpha_1 + \alpha_2)(x_{i-1})] \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n} m_i^f[(\alpha_1 + \alpha_2)(x_i) - (\alpha_1 + \alpha_2)(x_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^{n}[M_i^f - m_i^f][(\alpha_1(x_i) - \alpha_1(x_{i-1}))] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}[M_i^f - m_i^f][\alpha_2(x_i) - \alpha_2(x_{i-1})] \\ &= \left[S^f(\alpha_1, P) - s^f(\alpha_1, P)\right] \\ &\quad + \left[(S^f(\alpha_2, P) - s^f(\alpha_2, P)\right] \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \; = \; \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 9.18, $f \in \mathcal{R}(\alpha_1 + \alpha_2)$. Assim, encontramos,

$$\int_a^b f d(\alpha_1 + \alpha_2) \; = \; \overline{\int_a^b} f d(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$
\begin{aligned}
&= \inf\{S^f(\alpha_1+\alpha_2,P)\} \\
&= \inf\{S^f(\alpha_1,P)\}+\inf\{S^f(\alpha_2,P)\} \\
&= \overline{\int_a^b} f d\alpha_1 + \overline{\int_a^b} f d\alpha_2 \\
&= \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2 .
\end{aligned}
$$

vi) Por fim, para $k>0$ e $f \in \mathcal{R}(\alpha)$, temos que existe P partição de $[a,b]$ tal que

$$S^f(\alpha,P) - s^f(\alpha,P) < \frac{\epsilon}{k}.$$

E consequentemente,

$$
\begin{aligned}
S^f(k\alpha,P) - s^f(k\alpha,P) &= kS^f(\alpha,P) - ks^f(\alpha,P) \\
&= k[S^f(\alpha,P) - s^f(\alpha,P)] \\
&< k\frac{\epsilon}{k} = \epsilon.
\end{aligned}
$$

Logo, $f \in \mathcal{R}(k\alpha)$. Além disso, como $k>0$, inferimos

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f d(k\alpha) &= \underline{\int_a^b} f d(k\alpha) = \sup\{s^f(k\alpha,P)\} \\
&= \sup\{ks^f(\alpha,P)\} = k\sup\{s^f(\alpha,P)\} \\
&= k\underline{\int_a^b} f d\alpha = k\int_a^b f d\alpha.
\end{aligned}
$$

Isto nos diz que

$$\int_a^b f d(k\alpha) = k\int_a^b f d\alpha.$$

□

Lema 9.4. *Sejam* $\alpha, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funções limitadas, com* α *monótona crescente. Se* $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *em* $[a,b]$*, com* $m \leq f \leq M$*,* φ *é uma função contínua em* $[m, M]$ *e*

$$h(x) = \varphi \circ f(x), \forall\ x \in [a,b],$$

então $h \in \mathcal{R}(\alpha)$ *em* $[a,b]$*.*

Demonstração. Como φ é uma função contínua definida no compacto em $[m, M]$, temos que φ é uniformemente contínua (ver Teorema 6.14). Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{para todo }\ x, y \in [m, M],\ \text{com } |x - y| < \delta_1,\ \text{tem-se } |\varphi(x) - \varphi(y)| < \epsilon.$$

Seja $0 < \delta = \min\{\delta_1, \frac{\epsilon}{2}\} < \epsilon$. Uma vez que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$, então, pelo Teorema 9.18, existe uma partição $P : a = x_0 < ... < x_n = b$ de $[a,b]$ tal que

$$S^f(\alpha, P) - s^f(\alpha, P) < \delta^2.$$

Considere os conjuntos

$$A = \{i; M_i^f - m_i^f < \delta\} \text{ e } B = \{i; M_i^f - m_i^f \geq \delta\}.$$

Para $i \in A$, temos que

$$\delta_1 \geq \delta > M_i^f - m_i^f = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [x_{i-1}, x_i]\} \geq |f(x) - f(y)|,$$

para todo $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ (ver Lema 9.1). Portanto,

$$\begin{aligned} M_i^h - m_i^h &= \sup\{|h(x) - h(y)| : x, y \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ &= \sup\{|\varphi(f(x)) - \varphi(f(y))| : x, y \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ &\leq \epsilon, \end{aligned}$$

para todo $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$. Para $i \in B$, seja $K = \sup|\varphi(t)|, t \in [m, M]$, então

$$\begin{aligned} M_i^h - m_i^h &= \sup\{h(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\} - \inf\{h(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ &= \sup\{h(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\} + \sup\{-h(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup\{|h(x)|; x \in [x_{i-1}, x_i]\} + \sup\{|h(x)|; x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ &= 2\sup\{|h(x)|; x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 2\sup\{|\varphi(f(x))|; x \in [x_{i-1}, x_i]\}. \end{aligned}$$

Como $f(x) \in [m, M]$, então

$$M_i^h - m_i^h \leq 2\sup\{|\varphi(f(x))|\} \leq 2K.$$

Observe que se $i \in B$, $M_i^f - m_i^f \geq \delta$. Daí,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in B} \delta[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] &\leq \sum_{i \in B}(M_i^f - m_i^f)[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \\ &\leq S^f(\alpha, P) - s^f(\alpha, P) < \delta^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{i \in B}[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] < \delta.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} S^h(\alpha, P) - s^h(\alpha, P) &= \sum_{i \in A}(M_i^h - m_i^h)[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \\ &+ \sum_{i \in B}(M_i^h - m_i^h)[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \\ &\leq \sum_{i \in A} \epsilon[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] + \sum_{i \in B} 2K[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \\ &= \epsilon \sum_{i \in A}[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] + 2K \sum_{i \in B}[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \\ &< \epsilon \sum_{i \in A}[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] + 2K\delta \\ &\leq \epsilon[\alpha(b) - \alpha(a)] + 2K\delta. \end{aligned}$$

Como $\delta < \epsilon$, temos

$$S^h(\alpha, P) - s^h(\alpha, P) < \epsilon[\alpha(b) - \alpha(a)] + 2K\epsilon = \epsilon[\alpha(b) - \alpha(a) + 2K].$$

Como ϵ é arbitrário, segue do Teorema 9.18 que $h \in \mathcal{R}(\alpha)$ em $[a, b]$. □

O resultado seguinte nos fornece informações quanto à integrabilidade no sentido a Riemann-Stieltjes do produto de funções integráveis.

Proposição 9.4. *Sejam $\alpha, f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções limitadas, com α monótona crescente. Se $f, g \in \mathcal{R}(\alpha)$ em $[a,b]$, então*

i) $fg \in \mathcal{R}(\alpha)$;

ii) $|f| \in \mathcal{R}(\alpha)$ *e* $\left|\int_a^b f d\alpha\right| \leq \int_a^b |f| d\alpha.$

Demonstração. Sejam $f, g \in \mathcal{R}(\alpha)$ em $[a,b]$.

i) Utilizando a Proposição 9.3, temos que $f+g, f-g \in \mathcal{R}(\alpha)$. Considere a função $\varphi(t) = t^2$. Então, pelo Lema 9.4, temos que $(f+g)^2 \in \mathcal{R}(\alpha)$ e $(f-g)^2 \in \mathcal{R}(\alpha)$, pois φ é contínua,

$$(f+g)^2 = \varphi \circ (f+g) \text{ e } (f-g)^2 = \varphi \circ (f-g).$$

Sabemos que

$$fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2].$$

Logo, pela Proposição 9.3, $fg \in \mathcal{R}(\alpha)$.

ii) Seja $\varphi(t) = |t|$ a função contínua modular. Então,

$$\varphi \circ f(x) = |f(x)|, \forall\ x \in [a,b].$$

Do Lema 9.4, temos que $|f| \in \mathcal{R}(\alpha)$. Por outro lado,

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \forall\ x \in [a,b].$$

Logo, usando os itens **i)** e **ii)** da Proposição 9.3, temos que

$$-\int_a^b |f| d\alpha \leq \int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b |f| d\alpha,$$

isto é,

$$\left|\int_a^b f d\alpha\right| \leq \int_a^b |f| d\alpha.$$

□

Vamos demonstrar, agora, uma condição necessária para que uma função seja integrável a Riemann-Stieltjes.

Lema 9.5. *Sejam $\alpha, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções limitadas, com α monótona crescente. Se*

$$S^f(\alpha, P) - s^f(\alpha, P) < \epsilon,$$

para $\epsilon > 0$, $P : a = x_0 < ... < x_n = b$ uma partição de $[a,b]$ e $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, então

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)|[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] < \epsilon.$$

Demonstração. Suponhamos que

$$S^f(\alpha, P) - s^f(\alpha, P) < \epsilon,$$

para $\epsilon > 0$ e $P : a = x_0 < ... < x_n = b$ uma partição de $[a,b]$. Tomemos $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Assim, $m_i^f \leq f(s_i), f(t_i) \leq M_i^f$. Logo,

$$|f(s_i) - f(t_i)| \leq M_i^f - m_i^f.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)|[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] &\leq \sum_{i=1}^{n} (M_i^f - m_i^f)[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \\
&= \sum_{i=1}^{n} M_i^f[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] - \sum_{i=1}^{n} m_i^f[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \\
&= S^f(\alpha, P) - s^f(\alpha, P) < \epsilon.
\end{aligned}$$

□

O teorema a seguir mostra que se α tem derivada integrável, a Integral a Riemann-Stieltjes se reduz à Integral a Riemann.

Teorema 9.19. *Sejam $\alpha, \alpha', f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções limitadas, com α monótona crescente e α' integrável a Riemann em $[a,b]$. Então $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ se, e somente se, $f\alpha'$ é integrável a Riemann. Neste caso,*

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f\alpha' dx.$$

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja $\epsilon > 0$. Como α' é integrável a Riemann, temos, do Teorema 9.4, que existe P partição de $[a, b]$ tal que

$$S(\alpha', P) - s(\alpha', P) < \epsilon.$$

Pelo Teorema 7.13, existem pontos $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tais que

$$\alpha'(t_i) = \frac{\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}},\ i = 1, ..., n,$$

ou seja,

$$\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) = \alpha'(t_i)[x_i - x_{i-1}],\ i = 1, ..., n.$$

Se $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$, então pelo Lema 9.5, temos que

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i)|[x_i - x_{i-1}] < \epsilon.$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} f(s_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\alpha'(t_i)[x_i - x_{i-1}]$$

implica que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(s_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] &= \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\alpha'(t_i)[x_i - x_{i-1}] \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(s_i)[\alpha'(t_i) - \alpha'(s_i)][x_i - x_{i-1}] + \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\alpha'(s_i)[x_i - x_{i-1}] \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |f(s_i)|\, |\alpha'(t_i) - \alpha'(s_i)|\, [x_i - x_{i-1}] + \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\alpha'(s_i)[x_i - x_{i-1}] \\
&\leq K\sum_{i=1}^{n} |\alpha'(t_i) - \alpha'(s_i)|\, [x_i - x_{i-1}] + \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\alpha'(s_i)[x_i - x_{i-1}] \\
&\leq K\epsilon + \sum_{i=1}^{n} M_i^{f\alpha'}[x_i - x_{i-1}] \\
&= K\epsilon + S(f\alpha', P),
\end{aligned}$$

onde $K = \sup\{|f(x)|; x \in [a,b]\}$ (f é limitada). Com isso,

$$\sum_{i=1}^{n} f(s_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \leq K\epsilon + S(f\alpha', P), \forall\ s_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Logo, pela Definição 1.11, obtemos

$$S^f(\alpha, P) \leq S(f\alpha', P) + K\epsilon.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\alpha'(s_i)[x_i - x_{i-1}] &= \sum_{i=1}^{n} f(s_i)[\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i)][x_i - x_{i-1}] + \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\alpha'(t_i)[x_i - x_{i-1}] \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |f(s_i)|\,|\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i)|\,[x_i - x_{i-1}] + \sum_{i=1}^{n} f(s_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \\
&\leq K\sum_{i=1}^{n} |\alpha'(t_i) - \alpha'(s_i)|\,[x_i - x_{i-1}] + \sum_{i=1}^{n} M_i^f[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \\
&\leq K\epsilon + S^f(\alpha, P).
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\alpha'(s_i)[x_i - x_{i-1}] \leq K\epsilon + S(f, \alpha, P), \forall\ s_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Portanto, usando novamente a Definição 1.11, encontramos

$$S(f\alpha', P) \leq S^f(\alpha, P) + K\epsilon.$$

Deste modo, concluímos que

$$|S^f(\alpha, P) - S(f\alpha', P)| \leq K\epsilon.$$

Seja Q uma partição de $[a,b]$, com $P \subseteq Q$, então pelo Teorema 9.1, temos que

$$S(\alpha', Q) - s(\alpha', Q) < \epsilon,$$

pois $S(\alpha', P) - s(\alpha', P) < \epsilon$. Usando o que foi feito acima, obtemos

$$|S^f(\alpha, Q) - S(f\alpha', Q)| \leq K\epsilon.$$

Logo, pelo Lema 9.3

$$\left|\overline{\int_a^b} f d\alpha - \overline{\int_a^b} f\alpha' dx\right| = \left|\inf\{S^f(\alpha, Q)\} - \inf\{S(f\alpha', Q)\}\right| \leq K\epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, então passando ao limite quando $\epsilon \to 0$, encontramos

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \overline{\int_a^b} f\alpha' dx.$$

Procedendo da mesma forma obtemos,

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha = \underline{\int_a^b} f\alpha' dx.$$

Com isso, $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ se, e somente se, $f\alpha'$ é integrável a Riemann. Neste caso,

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f\alpha' dx.$$

$\square$

9.6 Conclusão

Caro leitor, ao final desta aula, é relavante concluir que em muitos casos não é possível, manualmente, calcular uma integral. Porém, alguns resultados como, por exemplo, os que nos dão condições suficientes para integrabilidade, nos garantem a existência de certas integrais, mesmo que não informe o valor desta. Em Matemática este fato é, muitas vezes, a informação mais importante que podemos inferir. Portanto, avaliar a existência da integral não deve ser menosprezada. Mesmo por que não faz sentido calcular a integral de uma função não-integrável.

9.7 Resumo

Nesta aula, apresentamos o conceito de integração de funções reais limitadas. Mostramos resultados de grande utilidade não só na Matemática, como também em diversas áreas do conhecimento. Por exemplo, estudamos os Teoremas Fundamental do Cálculo e da Mudança de Variável. Além disso, verificamos de que maneira estes podem ser aplicados e encontramos condições suficientes para que uma determinada função seja integrável.

9.8 Exercícios Propostos

Exercícios:

1. Defina $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, pondo $f(0) = 0$ e $f(x) = 1/2^n$ se $1/2^{n+1} < x \leq 1/2^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Prove que f é integrável e calcule $\displaystyle\int_0^1 f$.

2. Seja $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ integrável. Se f é uma função ímpar, prove que $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 0$. Se porém, f é par, prove que $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$.

3. Prove que se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são integráveis então são também integráveis as funções $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$, definidas por $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Conclua que as funções $f_+, f_- : [a,b] \to \mathbb{R}$ dadas por $f_+(x) = 0$ se $f(x) \leq 0$, $f_+(x) = f(x)$ se $f(x) > 0$; $f_-(x) = 0$ se $f(x) \geq 0$ e $f_-(x) = -f(x)$ se $f(x) < 0$ são integráveis.

4. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável com f' integrável. Prove que para quaisquer $x, c \in [a,b]$, tem-se $f(x) = f(c) + \displaystyle\int_c^x f'$.

5. Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ com derivada integrável, seja $m = (a+b)/2$. Prove que $f(a) + f(b) = [2/(b-a)] \displaystyle\int_a^b [f(x) + (x-m)f'(x)]$.

9.9 Exercícios Resolvidos

Questões Resolvidas:

Ex1. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, com $f(x) \geq 0$, $\forall\ x \in [a,b]$. Se f é contínua em $c \in [a,b]$ e $f(c) > 0$, prove que $\displaystyle\int_a^b f > 0$.

Demonstração. Como $f(c) > 0$, então, pela demonstração do Teorema 6.4, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (c-\delta, c+\delta)$, tem-se $f(x) > f(c)/2 > 0$. Consequentemente, para todo $x \in [c-\delta/2, c+\delta/2]$, tem-se $f(x) > f(c)/2 > 0$. Com isso, pelos Teoremas 9.6 e 9.5,

$$\int_a^b f = \int_a^{c-\delta/2} f + \int_{c-\delta/2}^{c+\delta/2} f + \int_{c+\delta/2}^{b} f \geq \int_a^{c-\delta/2} f + \int_{c-\delta/2}^{c+\delta/2} f(c)/2 + \int_{c+\delta/2}^{b} f$$

$$= \int_a^{c-\delta/2} f + [c+\delta/2 - (c-\delta/2)]f(c)/2 + \int_{c+\delta/2}^{b} f$$

$$= \int_a^{c-\delta/2} f + \delta f(c)/2 + \int_{c+\delta/2}^{b} f > \int_a^{c-\delta/2} f + \int_{c+\delta/2}^{b} f \geq 0,$$

pois $f(x) \geq 0$, $\forall\ x \in [a,b]$.

□

Ex2. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável. Prove que a função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por $F(x) = \displaystyle\int_a^x f$, é Lipschitziana. Conclua que F é uniformemente contínua.

Demonstração. Como f é integrável, então existe $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M, \forall\ x \in [a,b]$$

Utilizando os Teoremas 9.6 e 9.5, obtemos

$$|F(x) - F(y)| = \left|\int_a^x f + \int_y^a f\right| = \left|\int_y^x f\right| \leq \int_y^x |f| \leq \int_y^x M = M|x-y|,$$

para todos $x, y \in [a,b]$. Portanto, F é uma função Lipschitziana. Pela Proposição 6.2, F é uniformemente contínua. □

Ex3. Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e $\alpha, \beta : I \to [a, b]$ deriváveis. Defina $\varphi : I \to \mathbb{R}$ pondo

$$\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f, \forall\, x \in I.$$

Prove que

$$\varphi'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x), \forall\, x \in [a, b].$$

Demonstração. Seja $c \in (a, b)$. Defina as funções

$$F(x) = \int_c^x f \text{ e } G(y) = \int_y^c f, \forall\, x, y \in [a, b].$$

Vimos no Teorema 9.9 que

$$F'(x) = f(x) \text{ e } G'(y) = -f(y), \forall\, x, y \in [a, b],$$

note que $G(y) = -\displaystyle\int_c^y f$. Veja que

$$\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f = \int_c^{\beta(x)} f + \int_{\alpha(x)}^c f = F(\beta(x)) + G(\alpha(x)),$$

para todo $x \in [a, b]$. Com isso, pelo Teorema 7.3, obtemos

$$\varphi'(x) = F'(\beta(x))\beta'(x) + G'(\alpha(x))\alpha'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x), \forall\, x \in [a, b].$$

$\square$

Auto-Avaliação

Sou capaz de identificar funções integráveis e aplicar corretamente os Teoremas Fundamental do Cálculo, Mudança de Variáveis e Integração por Partes?

Proxima Aula

Caro leitor, na próxima aula, estudaremos com mais precisão, através de Integral a Riemann, as propriedades já conhecidas do ensino básico para o logaritmo Neperiano. Além disso, aproveitaremos os conceitos que aprendemos até este momento para definir integração imprópria.

Referências Bibliográficas

[1] Alonso, M.; Finn, E. J., *Física: Um Curso Universitário.* Segunda Edição, São Paulo, Edgard Blücher Ltda, 2009. 481p.

[2] Bartle, R. G.; Sherbert, D. R., *Introdution to Real Analysis*, Third Edition, New York, JohnWiley and Sons,Inc., 2000. 399p.

[3] Boyce, W. E.; DiPrima, R. C., *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.* Seventh Edition, New York, JohnWiley and Sons,Inc, 2001. 745p.

[4] Brasil, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

[5] Brauer, F.; Nohel, J. A., *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations.* University of Wisconsin, 1989.

[6] Dragomir, S. S., *Some Gronwall Type Inequalities and Applications.* Monograph. Victoria University of Technology, 2002.

[7] Ferreira, J., *A Construção dos Números.* Primeira Edição, Rio de Janeiro, SBM, 2010. 133p.

[8] Figueiredo, D., *Análise I.* Segunda Edição, Rio de Janeiro, LTC, 2008. 266p.

[9] Guillemin, V.; Pollack, A., *Differential Topology.* First Edition, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1974. 227p.

[10] King, A.C.; Billingham, J.; OTTO, S.R., *Differential Equations.* Linear, Nonlinear, Ordinary, Partial. Cambridge University Press. New York, 2003.

[11] Lima, E. L., *Análise Real.* Funções de uma variável, vol.1. 8^o. ed. Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[12] Lima, E. L., *Análise Real,* vol.2. Rio de Janeiro, 2004.

[13] Lima, E. L., *Curso de Análise*, vol. 1, Décima Segunda Edição, Rio de Janeiro, IMPA, 2008. 431p.

[14] Melo, W., *Existência de soluções clássicas para as Equações de Burgers e Navier-Stokes.* Dissertação de Mestrado. UFPE, 2007.

[15] Munkres, J. R., *Topology.* Second Edition, New Jersey, Prentice Hall, Inc., 2000. 552p.

[16] Nolt, J.; Rohatys, D.; Varzi, A., *Theory and problems or logic.* Second edition, New York, McGraw-Hill, 2009. 279p.

[17] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis.* Third Edition, New York, McGraw-Hill, Inc., 1976. 351p.

[18] Smoller, J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations.* 2nd ed., Springer-Verlag, 1994.

[19] Tveito, A.; Winther, R., *Introduction to Partial Differential Equations.* A Computational Approach. New York, 1961.

Professor Revisor

Professor Paulo de Souza Rabelo