Capítulo 10

Décima Aula: Logaritmo e Integração Imprópria

Meta

Apresentar as principais propriedades da função logaritmo Neperiano, utilizando uma definição alternativa e de grande intuição geométrica, e das integrais impróprias.

Objetivos

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de utilizar corretamente as propriedades das funções logaritmo e exponencial, como também saber aplicar o Teste da Integral.

Pré-requisitos

Aula 9, Fundamentos da Matemática e Cálculo II.

10.1 Introdução

Nesta aula, apresentaremos uma definição da função logaritmo que envolve o conceito de Integral a Riemann. Com esta, é possível provarmos as principais propriedades já conhecidas do ensino básico para tal aplicação, como, por exemplo, o resultado que afirma que o logaritmo do produto é a soma dos logaritmos. Em particular, verificaremos a bijetividade desta função, ou seja, mostraremos a existência da inversa para a aplicação logarítmica, a qual chamamos função exponencial. A partir daí, reexaminaremos as operações elementares, vistas no cáculo elementar, para tal. Por fim, apresentaremos como integrar impropriamente funções que posuem singularidades no intervalo contruído pelos limites de integração. Com este novo conceito, acrescentaremos um novo teste para séries numéricas, este é chamado Teste da Integral. Por fim, mostraremos uma outra maneira de definir Integral a Riemann, através do conceito de conjunto de medida nula.

10.2 Logaritmo Neperiano e Exponencial

Nesta seção, apresentaremos as operações mais elementares, vistas no ensino básico, e que conclusões podemos inferir, como consequência dos resultados obtidos neste material, das funções logaritmo e exponencial. Iniciaremos nossos estudos com a definição da função logaritmo Neperiano.

Definição 10.1 (Logaritmo Neperiano)**.** A função $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definida por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{y}, \forall\ x \in (0, \infty),$$

transforma um número positivo x em um valor real $\ln x$ chamado logaritmo Neperiano de x ou logaritmo de x na base e.

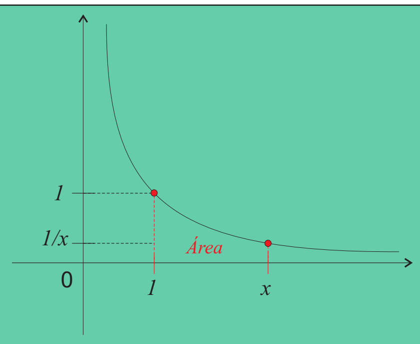

Figura 10.1: Logaritmo Neperiano

Enunciamos abaixo algumas propriedades satisfeitas pelo logaritmo Neperiano.

Teorema 10.1 (Operações Elementares do Logaritmo Neperiano)**.** *As seguintes afirmações a respeito do logaritmo Neperiano são verdadeiras:*

i) $\ln 1 = 0$, $\ln x > 0$ *para* $x > 1$ *e* $\ln x < 0$ *para* $x \in (0,1)$*;*

ii) $\ln$ *é uma função crescente;*

iii) $\ln' x = \dfrac{1}{x}$, $\forall\ x \in (0,\infty)$*;*

iv) $\ln(xz) = \ln x + \ln z$, $\ln x^q = q \ln x$, $\ln(x/z) = \ln x - \ln z$, *para todo* $q \in \mathbb{Q}$ *e* $x, z \in (0,\infty)$*;*

v) $\ln$ *é uma função sobrejetiva.*

Demonstração. **i)** Note que

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{y} = 0,$$

ver observações do Teorema 9.6. Seja $x \in (0,1)$, então

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{y} = -\int_x^1 \frac{1}{y} < 0,$$

pois $0 < x < y < 1$ (ver observações do Teorema 9.6 e Teorema 9.5). Além disso, se $x > 1$, temos que

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{y} > 0,$$

porque $0 < 1 < y$ (ver Teorema 9.5).

ii) Vamos provar que ln é crescente. Seja $0 < x < z$, então, pelo Teorema 9.6, concluímos que

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{y} < \int_1^x \frac{1}{y} + \int_x^z \frac{1}{y} = \int_1^z \frac{1}{y} = \ln z,$$

já que $\int_x^z 1/y > 0$, ou seja, ln é crescente (ver Definição 5.5).

iii) Como a função $y \mapsto 1/y$ é contínua para $y \in (0, \infty)$, e com o Teorema 9.9, obtemos

$$\ln' x = \left(\int_1^x \frac{1}{y} \right)' = \frac{1}{x}.$$

iv) Usando os Teoremas 9.6 e 9.10, temos que

$$\ln xz = \int_1^{xz} \frac{1}{y} = \int_1^x \frac{1}{y} + \int_x^{xz} \frac{1}{y} = \int_1^x \frac{1}{y} + \int_1^z \frac{1}{u} = \ln x + \ln z,$$

isto é,

$$\ln xz = \ln x + \ln z, \forall\ x, z \in (0, \infty).$$

Além disso, usando o item anterior juntamente com indução matemática, concluímos

$$\ln x^n = n \ln x, \forall\ x \in (0, \infty), n \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$0 = \ln 1 = \ln x^n x^{-n} = \ln x^n + \ln x^{-n} = n \ln x + \ln x^{-n},$$

ou seja,

$$\ln x^{-n} = -n \ln x, \forall\ n \in \mathbb{N}, x \in (0, \infty).$$

Dessa forma,

$$\ln x^p = p \ln x, \forall\ p \in \mathbb{Z}, x \in (0, \infty).$$

Por fim, se $q = p/r \in \mathbb{Q}$, inferimos

$$p \ln x = \ln x^p = \ln x^{(p/r)r} = r \ln x^{p/r} = r \ln x^q.$$

Consequentemente,

$$\ln x^q = p/r \ln x = q \ln x, \forall\ x \in (0, \infty).$$

Deste modo,

$$\ln(x/z) = \ln(xz^{-1}) = \ln x + \ln z^{-1} = \ln x - \ln z,$$

isto é,

$$\ln(x/z) = \ln x - \ln z, \forall\ x, z \in (0, \infty).$$

v) Como ln é derivável, então ln é contínua (ver Teorema 7.1). Dessa forma, usando o Teorema 6.8, temos que $\ln(0,\infty)$ é um intervalo de $\mathbb{R}$. Afirmamos que este intervalo é $\mathbb{R}$. Com efeito,

$$\ln 2^n = n \ln 2 \text{ e } \ln 2^{-n} = -n \ln 2, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Como $\ln 2 > 0$, então

$$\lim \ln 2^n = \lim n \ln 2 = \infty \text{ e } \lim \ln 2^{-n} = \lim -n \ln 2 = -\infty.$$

Com isso, dado $A > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\ln 2^N > A$ (pois $\lim \ln 2^n = \infty$). Mas, $\ln 1 = 0$. Como $\ln(0,\infty)$ é um intervalo, então existe $a \in (0,\infty)$ tal que $\ln a = A$, ou seja, $A \in \ln(0,\infty)$. Analogamente, se $B < 0$, então $B \in \ln(0,\infty)$ (use $\lim \ln 2^{-n} = -\infty$). Consequentemente, $\ln(0,\infty) = (-\infty,\infty) = \mathbb{R}$. Isto nos diz que ln é uma função sobrejetiva. $\square$

Obs 10.1. É fácil ver que, através de indução finita, podemos inferir

$$\ln(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) = \ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n.$$

Obs 10.2. Como $\lim \ln 2^n = \infty$ e ln é crescente, então $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$. Com efeito, dado $A > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\ln 2^N > A$. Assim sendo, para $B = 2^N > 0$, tem-se que

$$\text{para todo } x > B, \text{infere-se} \ln x > \ln B = \ln 2^N > A,$$

ou seja, $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$. Analogamente, prova-se que $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, desde que $\lim \ln 2^{-n} = -\infty$ e ln é crescente.

Obs 10.3. No Teorema 10.1, vimos que ln é crescente e sobrejetiva. Seja $x \neq z$ em $(0,\infty)$. Suponha que $x < z$, então $\ln x < \ln z$, pois ln é crescente. isto é, $\ln x \neq \ln z$. Isto nos garante que ln é injetiva. Por conseguinte, ln é uma função bijetiva.

Com isto podemos definir a função inversa de ln. Esta está estabelelcida na seguinte definição.

Definição 10.2 (Exponencial)**.** A função e: $\mathbb{R} \to (0, \infty)$ que associa um número real x a um valor positivo e^x denotará a função inversa de ln, isto é,

$$\ln \mathrm{e}^x = x \text{ e } \mathrm{e}^{\ln z} = z, \forall\, x \in \mathbb{R}, z \in (0, \infty).$$

Tal aplicação é chamada função exponencial.

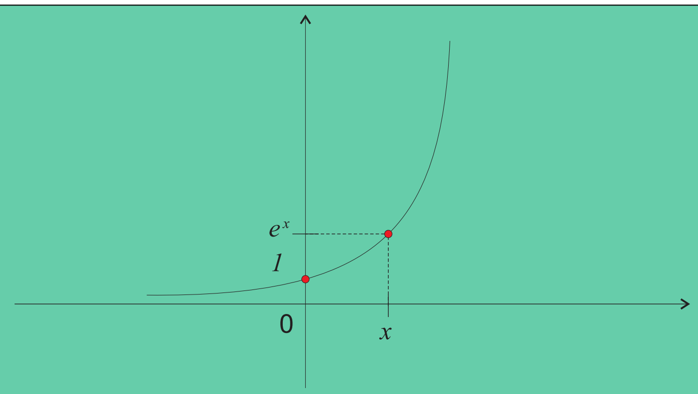

Figura 10.2: Exponencial

Vamos imediatamente listar algumas propriedades básicas satifeitas pela função exponencial.

Teorema 10.2 (Operações Elementares da Exponencial)**.** *Os seguintes itens sobre a função exponencial são válidos:*

i) $e^0 = 1$ *e* $e^1 = e$*;*

ii) *e é uma bijeção crescente;*

iii) $e'(x) = e^x, \forall\, x \in \mathbb{R}$*;*

iv) $e^{x+y} = e^x e^y$*,* $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$*;*

v) $e^{qx} = [e^x]^q$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$ *e* $q \in \mathbb{Q}$*.*

Demonstração. **i)** Vimos no Teorema 9.5 que $\ln 1 = 0$. Assim sendo,

$$\mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{\ln 1} = 1.$$

Além disso,

$$1 = \ln \mathrm{e}^1 = 1 \cdot \ln \mathrm{e} = \ln \mathrm{e},$$

ou seja, $\ln \mathrm{e} = 1$. Assim, $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}^{\ln e} = \mathrm{e}$.

ii) Como e é a inversa de ln, então e é uma bijeção. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Como ln é sobrejetiva, então existem $x, y \in (0, \infty)$ tais que

$$\ln x = a \text{ e } \ln y = b.$$

Como ln é crescente, então $x < y$. Caso contrário, $x \geq y$, teríamos $a = \ln x \geq \ln y = b$. Absurdo! Dessa forma,

$$\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^{\ln x} = x < y = \mathrm{e}^{\ln y} = \mathrm{e}^b,$$

isto é, $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$. Com isso, e é crescente.

iii) Vimos no Teorema 7.4 que

$$\mathrm{e}'(x) = \frac{1}{\ln'(\ln^{-1} x)} = \frac{1}{\ln'(\mathrm{e}^x)} = \mathrm{e}^x, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

iv) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Como ln é sobrejetiva, então existem $a, b \in (0, \infty)$ tais que

$$\ln a = x \text{ e } \ln b = y.$$

Portanto,

$$\mathrm{e}^x \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{\ln a} \mathrm{e}^{\ln b} = ab = \mathrm{e}^{\ln(ab)} = \mathrm{e}^{\ln a + \ln b} = \mathrm{e}^{x+y},$$

ou seja, $\mathrm{e}^x \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y}$. Note que

$$1 = \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{y+(-y)} = \mathrm{e}^y \mathrm{e}^{-y}.$$

Consequentemente,

$$\mathrm{e}^{-y} \quad = \quad \frac{1}{\mathrm{e}^y} \quad = \quad [\mathrm{e}^y]^{-1}. \tag{10.1}$$

Além disso,

$$\mathrm{e}^{x-y} = \mathrm{e}^{x+(-y)} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{-y} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}.$$

v) Por indução, obtemos

$$\mathrm{e}^{nx} = \mathrm{e}^{x+x+...+x} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^x \cdot ... \cdot \mathrm{e}^x = [\mathrm{e}^x]^n, \forall\ x \in \mathbb{R},$$

onde as somas e os produtos envolvidos possuem n parcelas e fatores, respectivamente. Por conseguinte,

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{n}+\frac{x}{n}+...+\frac{x}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{x}{n}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{x}{n}} \cdot ... \cdot \mathrm{e}^{\frac{x}{n}} = \left[\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\right]^n, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado,

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{n}+\frac{x}{n}+...+\frac{x}{n}} = \mathrm{e}^{n\frac{x}{n}} = \mathrm{e}^x, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Assim, $\mathrm{e}^x = \left[\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\right]^n$. Extraindo a raiz n-ésima em ambos os lados da equação, obtemos

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{\mathrm{e}^x} = [\mathrm{e}^x]^{\frac{1}{n}}.$$

Considere $q = m/n$, onde $m, n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\mathrm{e}^{qx} = \mathrm{e}^{\frac{m}{n}x} = \left[\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\right]^m = \{[\mathrm{e}^x]^{\frac{1}{n}}\}^m = [\mathrm{e}^x]^{\frac{m}{n}} = [\mathrm{e}^x]^q.$$

Considere, agora, que $q = -m/n$, onde m e $n \in \mathbb{N}$. Assim sendo, usando as igualdades em (10.1), podemos dizer que

$$\mathrm{e}^{qx} = \mathrm{e}^{-\frac{m}{n}x} = \mathrm{e}^{\left[\frac{m}{n}(-x)\right]} = [\mathrm{e}^{-x}]^{\frac{m}{n}} = [\mathrm{e}^x]^{-\frac{m}{n}} = [\mathrm{e}^x]^q.$$

O item **i)** conclui a prova do item **v)**. □

Obs 10.4. Podemos provar por indução que

$$\mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{x_2} \cdot ... \cdot \mathrm{e}^{x_n} = \mathrm{e}^{x_1+x_2+...+x_n}.$$

Obs 10.5. Note que $\lim \mathrm{e}^n = \infty$, pois

$$\mathrm{e}^n > n, \forall\ n \in \mathbb{N} \text{ e } \lim n = \infty,$$

onde a desigualdade acima segue facilmente por um argumento de indução finita. Como e é crescente, então $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty$. De fato, dado $A > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $e^N > A$. Portanto,

$$\text{para todo } x > N, \text{ conclui-se } \mathrm{e}^x > \mathrm{e}^N > A.$$

Por conseguinte,

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = \lim_{y\to\infty} \mathrm{e}^{-y} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^y} = 0.$$

Obs 10.6. Vimos que $\mathrm{e}'(x) = \mathrm{e}^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Dessa forma,

$$\mathrm{e}^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x, \forall\ x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 10.1. Utilizando o Teorema 9.9, temos que

$$\int_a^b \mathrm{e} = \mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a, \forall\ a, b \in \mathbb{R},$$

pois a primitiva de e é a própria função e (ver Teorema 10.2).

Exemplo 10.2. Veja que

$$1 = \ln'(1) = \lim_{y\to1} \frac{\ln y - \ln 1}{y-1} = \lim_{y\to1} \frac{\ln y}{y-1} = \lim_{x\to0} \frac{1}{x} \ln(x+1) = \lim_{x\to0} \ln(x+1)^{1/x}.$$

Consequentemente, como e é contínua (ver Teorema 7.1), então,

$$\mathrm{e} = \mathrm{e}^1 = \lim_{x\to0} \mathrm{e}^{\ln(x+1)^{1/x}} = \lim_{x\to0} (x+1)^{1/x}.$$

Portanto, $\mathrm{e} = \lim\limits_{x\to0} (1+x)^{1/x}$. Ou equivalentemente, fazendo $z = 1/x$, encontramos

$$\mathrm{e} = \lim_{z\to\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z.$$

Em particular,

$$\mathrm{e} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Exercícios de Fixação

1. $\ln(\mathrm{e}/2) = 1 - \ln 2$.

2. Se $x \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, mostre que

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - ... + (-x)^{n-1} + \frac{(-x)^n}{1+x}.$$

Use isto para mostrar que

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}.$$

10.3 Integrais Impróprias de Funções Reais

Nesta seção, estabeleceremos definições para alguns tipos de integrais impróprias. Nosso intuito é exemplificar tais conceitos e aplicá-los em outro teste para séries numéricas, o denominado Teste da Integral. Como exemplo, verificaremos quando uma série, dita p-harmônica, é convergente.

Definição 10.3 (Integral Imprópria)**.** Seja $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ integrável em $[a+\varepsilon, b]$, para todo $0 < \varepsilon < b - a$. A integral imprópria é definida como sendo o seguinte limite

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f.$$

Se o limite acima existir dizemos que $\displaystyle\int_a^b f$ é convergente. Caso contrário, dizemos que esta integral diverge.

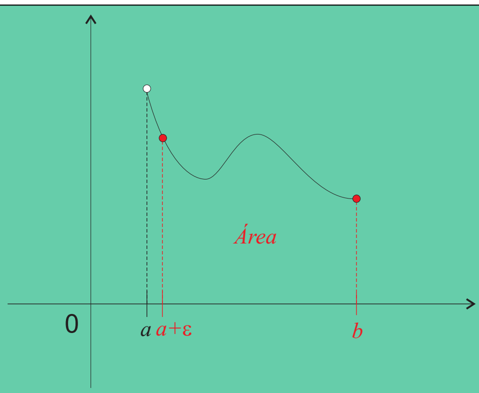

Figura 10.3: Integração imprópria

Exemplo 10.3. Vimos que

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x} = -\ln \varepsilon \text{ e } \lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln \varepsilon = -\infty.$$

Seja $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{x^p}, \forall\, x \in (0, 1].$$

Observe que

$$\int_0^1 f = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{0+\varepsilon}^{1} \frac{1}{x^p} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} x^{-p} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} x^{-1}, & \text{se } p = 1; \\ \displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} x^{-p}, & \text{se } p \neq 1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0^+} -\ln \varepsilon, & \text{se } p = 1; \\ \displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_{\varepsilon}^{1}, & \text{se } p \neq 1. \end{cases} = \begin{cases} \infty, & \text{se } p \geq 1; \\ \dfrac{1}{1-p}, & \text{se } p < 1. \end{cases}$$

Dessa forma, se $p \geq 1$, então $\int_0^1 f$ diverge, e se $p < 1$, então $\int_0^1 f$ converge.

Exemplo 10.4. Usando o Teorema 9.10, concluímos que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{0+\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{0+\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}' x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\operatorname{sen}\varepsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt{u}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\operatorname{sen}\varepsilon}^{1} u^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} [2\sqrt{1} - 2\sqrt{\operatorname{sen}\varepsilon}] = 2 - 2\sqrt{\operatorname{sen} 0} = 2.$$

Dessa forma, a integral imprópria $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$ é convergente.

Podemos encontrar na literatura outro modo de integrar impropriamente. Veja a definição a seguir.

Definição 10.4 (Integral Imprópria)**.** Seja $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a, b-\lambda]$, para todo $0 < \lambda < b - a$, definimos a integral imprópria de f no intervalo $[a, b)$ como sendo o limite abaixo:

$$\int_a^b f = \lim_{\lambda\to 0^+} \int_a^{b-\lambda} f.$$

Se este limite existe, dizemos que a integral $\displaystyle\int_a^b f$ é convergente, caso contrário esta é chamada divergente.

Exemplo 10.5. Sabemos que

$$\int_1^{\lambda} \frac{1}{u} = \ln\lambda \text{ e } \lim_{\lambda\to 0} \ln\lambda = -\infty.$$

Usando o Teorema 9.10, obtemos

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1} = \lim_{\lambda\to 0^+} \int_0^{1-\lambda} \frac{1}{x-1} = \lim_{\lambda\to 0^+} \int_1^{\lambda} \frac{1}{u} = \lim_{\lambda\to 0^+} \ln\lambda = -\infty.$$

Dessa forma, a integral imprópria $\int_0^1 \frac{1}{x-1}$ é divergente.

Abaixo exibiremos mais uma forma de integração imprópria.

Definição 10.5 (Integral Imprópria)**.** Seja $f : [a, c) \cup (c, b] \to \mathbb{R}$ integrável em $[a, c - \lambda]$ e $[c + \varepsilon, b]$, onde $c \in (a, b)$, $0 < \lambda < c - a$ e $0 < \varepsilon < b - c$. Definimos a integral imprópria por

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Dizemos que a integral $\int_a^b f$ converge se $\int_a^c f$ e $\int_c^b f$ são convergentes. Caso contrário, dizemos que $\int_a^b f$ é divergente.

Exemplo 10.6. A integral imprópria $\int_1^6 \frac{1}{(x-3)^{\frac{2}{3}}}$ é convergente? Usando o Teorema 9.10, concluímos que

$$\int_1^3 \frac{1}{(x-3)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\lambda\to 0^+} \int_1^{3-\lambda} \frac{1}{(x-3)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\lambda\to 0^+} \int_\lambda^2 u^{-\frac{2}{3}} = \lim_{\lambda\to 0^+} [3\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{\lambda}] = 3\sqrt[3]{2}.$$

Além disso,

$$\int_3^6 \frac{1}{(x-3)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{3+\varepsilon}^6 \frac{1}{(x-3)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^3 u^{-\frac{2}{3}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} [3\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{\varepsilon}] = 3\sqrt[3]{3}.$$

Dessa forma, a integral imprópria $\int_1^6 \frac{1}{(x-3)^{\frac{2}{3}}} = 3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{3}$ é convergente.

Vejamos outro tipo de integração imprópria.

Definição 10.6 (Integral Imprópria)**.** Seja $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ contínua. Definimos a integral imprópria de f pondo

$$\int_a^\infty f = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f.$$

Se este limite existe dizemos que $\int_a^\infty f$ é convergente, caso contrário dizemos que $\int_a^\infty f$ diverge.

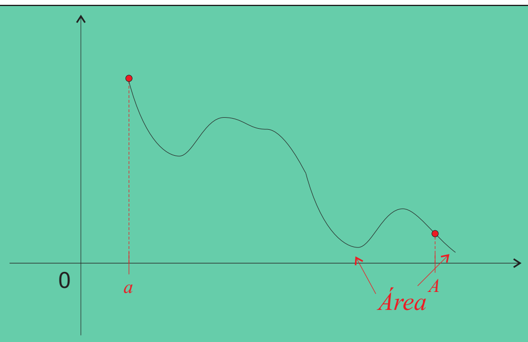

Figura 10.4: Integração imprópria

Exemplo 10.7. É sabido que

$$\int_1^A \frac{1}{x} = \ln A \text{ e } \lim_{A\to\infty} \ln A = \infty.$$

Seja $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{x^p}, \forall\, x \in (1, \infty).$$

Observe que

$$\int_1^\infty f = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{1}{x^p} = \lim_{A\to\infty} \int_1^A x^{-p} = \begin{cases} \lim\limits_{A\to\infty} \displaystyle\int_1^A x^{-1}, & \text{se } p = 1; \\ \\ \lim\limits_{A\to\infty} \displaystyle\int_1^A x^{-p}, & \text{se } p \neq 1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{A\to\infty} \ln A, & \text{se } p = 1; \\ \\ \lim\limits_{A\to\infty} \left[\dfrac{A^{1-p}}{1-p} - \dfrac{1}{1-p}\right], & \text{se } p \neq 1. \end{cases} = \begin{cases} \infty, & \text{se } p \leq 1; \\ \dfrac{1}{p-1}, & \text{se } p > 1. \end{cases}$$

Dessa forma, se $p \leq 1$, então $\displaystyle\int_1^\infty f$ diverge, se $p > 1$, então $\displaystyle\int_1^\infty f$ converge.

Estudemos com cuidado a seguinte definição.

Definição 10.7 (Integral Imprópria)**.** Seja $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[A, b]$, para todo $A < 0$. Definimos a integral imprópria

$$\int_{-\infty}^b f = \lim_{A\to-\infty} \int_A^b f.$$

Se este limite existe dizemos que a integral $\displaystyle\int_{-\infty}^b f$ é convergente. Caso contrário, dizemos que $\displaystyle\int_{-\infty}^b f$ é divergente.

Exemplo 10.8. Vimos que

$$\int_{-A}^0 \mathrm{e}^u = 1 - \mathrm{e}^{-A}.$$

Assim sendo, pelo Teorema 9.10, obtemos

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x} = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{0} e^{-x} = \lim_{A\to-\infty} -\int_{-A}^{0} e^{u} = \lim_{A\to-\infty} -[1-e^{-A}] = \infty,$$

ou seja, $\int_{-\infty}^{0} e^{-x}$ é divergente.

Com um pouco de paciência, podemos estudar mais um método de integrar impropriamente.

Definição 10.8 (Integral Imprópria)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Considere que $\displaystyle\int_0^\infty f$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f$ sejam convergentes. Definimos a integral imprópria de f por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{0} f + \int_{0}^{\infty} f.$$

Se $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f$ ou $\displaystyle\int_{0}^{\infty} f$ é divergente, dizemos que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f$ é divergente.

Exemplo 10.9. Veja que

$$\int_{0}^{\infty} x = \lim_{A\to\infty} \int_{0}^{A} x = \lim_{A\to\infty} \frac{A^2}{2} = \infty.$$

Dessa forma, $\int_{-\infty}^{\infty} x$ é divergente.

Exemplo 10.10. Olhe que, pelo Teorema 9.10, encontramos

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2} = \lim_{A\to\infty} \int_{0}^{A} \frac{x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \lim_{A\to\infty} \int_{1}^{A^2+1} \frac{1}{u^2} = \lim_{A\to\infty} -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{A^2+1} - 1\right] = \frac{1}{2}.$$

Por outro lado,

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{(x^2+1)^2} = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{0} \frac{x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \lim_{A\to-\infty} \int_{A^2+1}^{1} \frac{1}{u^2} = \lim_{A\to-\infty} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{A^2+1} - 1\right] = -\frac{1}{2}.$$

Com isso, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}$ é convergente e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Por fim, mostraremos um teste para verificar, sob algumas hipóteses, se uma série de números reais é convergente.

Teorema 10.3 (Teste da Integral). *Seja $f : X \to \mathbb{R}$, tal que $[1,\infty) \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$, $f(x) > 0$, para todo $x \in [1,\infty)$, e f é decrescente em $[1,\infty)$. Então,*

$$\int_1^\infty f \text{ é convergente } \Leftrightarrow \sum f(n) \text{ é convergente }.$$

Demonstração. Seja $k \in \mathbb{N}$. Como f é decrescente em $[1,\infty)$, então f também é decrescente em $[k.k+1] \subseteq [1,\infty)$. Com isso,

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k), \forall\ x \in [k, k+1].$$

Portanto, usando os Teoremas 9.5 e 9.8, concluímos que

$$\int_k^{k+1} f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f \leq \int_k^{k+1} f(k),$$

ou seja,

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f \leq f(k).$$

Somando todas estas desigualdades, quando k varia no conjunto $\{1, 2, ..., n\}$, chegamos ao seguinte resultado

$$\sum_{k=1}^n f(k+1) \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f = \int_1^2 f + \int_2^3 f + ... + \int_n^{n+1} f \leq \sum_{k=1}^n f(k).$$

Lembre que a n-ésima soma parcial da série $\sum f(n)$ é dada por $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n f(k)$ (ver Definição 3.2). Dessa forma, pelo Teorema 9.6, obtemos

$$s_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f \leq s_n,$$

ver Teorema 9.6.

$\Rightarrow$) Suponha que $\displaystyle\int_1^\infty f$ é convergente. Assim, $\lim \int_1^{n+1} f = \int_1^\infty f$. Como $f(x) > 0$, para

todo $x \in [1, \infty)$, então
$$\int_1^{n+1} f \leq \int_1^{\infty} f, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$
Consequentemente,
$$s_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f \leq \int_1^{\infty} f,$$
isto é,
$$s_{n+1} \leq f(1) + \int_1^{\infty} f, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$
Isto nos diz que (s_n) é limitada. Além disso,
$$s_{n+1} = f(1) + f(2) + ... + f(n) + f(n+1) = s_n + f(n+1) > s_n, \forall\, n \in \mathbb{N},$$
pois $f > 0$. Portanto, (s_n) é monótona e limitada. Pelo Teorema 2.4, (s_n) é convergente. Com a Definição 3.3, concluímos que $\sum f(n)$ é convergente.

$\Leftarrow$) Considere que $\displaystyle\int_1^{\infty} f$ é divergente. Vamos provar que $\sum f(n)$ é divergente. Assim sendo, com um abuso de notação,
$$\infty = \lim \int_1^{n+1} f \leq \lim s_n.$$
Com isso, $\lim s_n = \infty$, ou seja $\sum f(n)$ é divergente. Portanto, se $\sum f(n)$ é convergente, então $\displaystyle\int_1^{\infty} f$ é convergente. $\square$

Obs 10.7. O Teorema 10.3 não diz que $\displaystyle\int_1^{\infty} f = \sum f(n)$, se $\displaystyle\int_1^{\infty} f$ ou $\sum f(n)$ é convergente. Esta afirmação é falsa.

Obs 10.8. A função f descrita no Teste da integral não precisa ser decrescente em $[1, \infty)$, basta ser decrescente e positiva em $[x, \infty)$, onde $x \geq 1$ é uma constante real. Este fato é devido a Proposição 2.1.

Exemplo 10.11 (Série p-harmônica)**.** A série $\sum \frac{1}{n^p}$, onde $p > 0$, é chamada série p-harmônica. No caso em que $p = 1$ denominamos a série $\sum \frac{1}{n}$ de série harmônica. Vamos mostrar que esta série é convergente quando $p > 1$ e é divergente se $p \leq 1$. Usaremos o Teorema 10.3 para isto. Seja $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = \frac{1}{x^p}, \forall\, x \in [1, \infty).$$

Olhe que

$$f(x) = \frac{1}{x^p} > 0, \forall\, x \in [1, \infty).$$

Além disso, se $1 \leq x < y$ então $x^p < y^p$. Com isso, $f(x) = \dfrac{1}{x^p} > \dfrac{1}{y^p} = f(y)$, isto é, f é decrescente em $[1, \infty)$. Note que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}, & \text{se } p = 1; \\ \\ \displaystyle\lim_{b\to\infty} \frac{1}{-p+1}[b^{-p+1} - 1], & \text{se } p \neq 1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\lim_{b\to\infty}[\ln b - \ln 1], & \text{se } p = 1; \\ \infty, & \text{se } p < 1. \\ \dfrac{-1}{-p+1}, & \text{se } p > 1. \end{cases} = \begin{cases} \infty, & \text{se } p \leq 1. \\ \\ \dfrac{1}{p-1}, & \text{se } p > 1, \end{cases}$$

ou seja, $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}$ converge para $1/(p-1)$ quando $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$. Pelo Teorema 10.3, $\sum \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e é divergente se $p \leq 1$.

Exemplo 10.12. Considere a série $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln n}$. Vamos utilizar o Teorema 10.3 para mostrar que tal série é divergente. Com efeito, defina $f : [2, \infty) \to \mathbb{R}$, pondo

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}, \forall\, x \in [2, \infty).$$

Verifique que $f(x)$ é decrescente. Assim sendo, pelo Teorema 9.10, concluímos que

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x} = \int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{u} = \lim_{b\to\infty}[\ln b - \ln(\ln 2)] = \infty.$$

Portanto, pelo Teorema 10.3, $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln n}$ é divergente.

Exercícios de Fixação

1. Determine se cada integral é convergente ou divergente. Calcule aquelas que são divergentes.

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{(3x+1)^2}$;

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-\omega}}$;

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}$;

d) $\displaystyle\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^4}$.

2. Determine, usando o Teste da Integral, se as séries são convergentes ou divergentes:

a) $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2+4}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{\mathrm{e}^n}$;

c) $\displaystyle\sum \frac{3n+2}{n(n+1)}$.

10.4 Leitura Complementar

Neste tópico, acrescentaremos a este material dois estudos. No primeiro, definiremos quando um conjunto é caracterizado por ter medida nula, com o objetivo de definir Integral a Riemann através dos pontos de descontinuidades da aplicação a ser integrada. No segundo, conceituaremos exponencial e logaritmo em qualquer base, com o intuito de verificarmos as principais propriedades satisfeitas por estas funções.

10.4.1 Medida Nula e Teorema de Lebesgue

Nesta seção, apresentaremos o conceito de conjunto de medida nula com a finalidade de enunciar, demonstrar e exemplificar um resultado que estabelece uma outra maneira de definir integração a Riemann. Esta caracterização está exposta no chamado Teorema de Lebesgue.

Definição 10.9 (Medida Nula)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. O conjunto X é dito ter medida nula, e escrevemos $m(X) = 0$, se para todo $\varepsilon > 0$ existe uma coleção enumerável de intervalos limitados $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$X \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n \text{ e } \sum |X_n| < \varepsilon.$$

Aqui $|X_n|$ representa o comprimento do intervalo X_n.

Exemplo 10.13 ($\mathbb{Q}$ tem Medida Nula)**.** Seja X um conjunto enumerável. Assim, existe uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e X. Logo, $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Dado $\varepsilon > 0$, seja

$$X_n = \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right), \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$|X_n| = x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} - \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right) = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \text{ e } X \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

Além disso,

$$\sum |X_n| = \sum \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon \sum \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Portanto, $m(X) = 0$, isto é, todo conjunto enumerável tem medida nula. Como $\mathbb{Q}$ é enumerável, então $m(\mathbb{Q}) = 0$.

Exemplo 10.14. Todo subconjunto de um conjunto de medida nula tem medida nula. Com efeito, seja X um conjunto de medida nula e $Y \subseteq X$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe uma coleção enumerável de intervalos limitados $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$X \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n \text{ e } \sum |X_n| < \varepsilon.$$

Mas, $Y \subseteq X$. Dessa forma,

$$Y \subseteq X \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n \text{ e } \sum |X_n| < \varepsilon.$$

Por fim, $m(Y) = 0$.

Exemplo 10.15. Seja $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de conjuntos de medida nula. Vamos mostrar que $m(Y) = 0$, onde $Y = \cup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $(X_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ coleção enumerável de intervalos limitados tal que

$$Y_n \subseteq \cup_{j\in\mathbb{N}} X_{n_j} \text{ e } \sum_{j\in\mathbb{N}} |X_{n_j}| < \varepsilon/2^{n+1}.$$

Deste modo,

$$Y = \cup_{n\in\mathbb{N}} Y_n \subseteq \cup_{n,j\in\mathbb{N}} X_{n_j} \text{ e } \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} |X_{n_j}| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon/2^{n+1} = \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

ou seja, $m(Y) = 0$.

O teorema a seguir nos dá uma maneira equivalente de definirmos Integral a Riemann.

Teorema 10.4 (Teorema de Lebesgue)**.** *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e*

$$D_f = \{x \in [a,b] : f \text{ é descontínua em } x\}$$

o conjunto dos pontos de descontinuidades de f. Então, f é integrável se, e somente se, $m(D_f) = 0$.

Demonstração. $\Leftarrow$) Suponhamos que $m(D_f) = 0$. Usando a Definição 10.9, temos que dado $\varepsilon > 0$, existe uma coleção enumerável de intervalos abertos limitados $(X'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$D_f \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} X'_n \text{ e } \sum |X'_n| < \varepsilon/2(M_f - m_f),$$

ver Definição 9.4. Para cada ponto $x \in [a,b]\backslash D_f$ (note que f é contínua neste x) seja X''_x um intervalo limitado aberto contendo x, tal que

$$\omega(f; \overline{X''_x}) := \sup\{|f(c) - f(d)| : c, d \in \overline{X''_x}\} < \varepsilon/2(b-a),$$

ver Definição 6.2. Como $[a,b]$ é compacto, então a cobertura aberta

$$[a,b] = D_f \cup ([a,b]\backslash D_f) \subseteq (\cup_{n\in\mathbb{N}} X'_n) \cup (\cup_{x\in[a,b]\backslash D_f} X''_x)$$

admite uma subcobertura finita, i.e,

$$[a,b] \subseteq X'_1 \cup ... \cup X'_r \cup X''_1 \cup ... \cup X''_s,$$

ver Teorema 4.12. Seja $P : a = t_0 < ... < t_n = b$ uma partição de $[a,b]$ tal que cada intervalo $(t_{i-1}, t_i) \subseteq X'_n$, para algum $n = 1, 2..., r$ ou $(t_{i-1}, t_i) \subseteq X''_j$, para algum $j = 1, 2, ..., s$. Podemos tomar P formada pelos pontos a, b mais os extremos dos intervalos X'_n ou X''_j que pertençam ao intervalo $[a,b]$. Denotaremos os intervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de P contidos em algum X'_n por I'_n e os demais intervalos de P (que estão contidos em algum X''_j) por I''_j. Assim,

$$\sum |I'_n| \leq \sum |X'_n| < \varepsilon/2(M_f - m_f) \text{ e } \omega(f; I''_j) \leq \omega(f; \overline{X''_j}) \leq \varepsilon/2(b-a).$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i (t_i - t_{i-1}) = \sum \omega(f; I'_n)|I'_n| + \sum \omega(f; I''_j)|I''_j|$$

$$\leq (M_f - m_f)\sum |I'_n| + \varepsilon/2(b-a)\sum |I''_j| < \frac{(M_f - m_f)\varepsilon}{2(M_f - m_f)} + \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} = \varepsilon.$$

Segue que f é integrável (ver Teorema 9.4).

$\Rightarrow$) Agora, suponhamos que f integrável. Seja

$$D_m = \{x \in [a,b] : \omega_x(f) \geq 1/m\}, \forall\ m \in \mathbb{N},$$

onde

$$\omega_x(f) = \lim_{\delta \to 0^+} \omega(f; (x-\delta, x+\delta) \cap [a,b]).$$

Logo $D_f = \cup_{m\in\mathbb{N}} D_m$. Com efeito, considere que $x \notin \cup_{m\in\mathbb{N}} D_m$, então

$$\omega_x(f) < 1/m, \forall\ m \in \mathbb{N}.$$

Passando ao limite, quando $m \to \infty$, encontramos $\omega_x(f) = 0$. Dessa forma, dado $\varepsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que

$$\text{para todo } 0 < \delta < 2\eta, \text{ tem-se } \omega(f; (x-\delta, x+\delta) \cap [a,b]) < \varepsilon.$$

Consequentemente,

$$\sup\{|f(c) - f(d)|; c, d \in (x-\eta, x+\eta) \cap [a,b]\} = \omega(f; (x-\eta, x+\eta) \cap [a,b]) < \varepsilon.$$

Em particular, se $c \in (x-\eta, x+\eta) \cap [a,b]$, infere-se que $|f(c) - f(x)| < \varepsilon$, isto é, f é contínua em x. Com isso, $x \notin D_f$. Isto mostra a inclusão $D_f \subseteq \cup_{m\in\mathbb{N}} D_m$. Reciprocamente, se $x \notin D_f$, temos que f é contínua em x. Deste modo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que

$$\text{para todo } y \in (x-\eta, x+\eta) \cap [a,b], \text{ tem-se } |f(y) - f(x)| < \varepsilon/2.$$

Consequentemente, para quaisquer $y, z \in (x-\delta, x+\delta) \cap [a,b]$, com $0 < \delta < \eta$, encontramos as seguintes desigualdades:

$$|f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f(x)| + |f(z) - f(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \leq \varepsilon.$$

Por isso,

$$\omega_x(f) = \lim_{\delta \to 0^+} \omega(f; (x-\delta, x+\delta) \cap [a,b]) = 0.$$

Assim, $\omega_x(f) < 1/m$, para todo $m \in \mathbb{N}$, ou seja, $x \notin \cup_{m \in \mathbb{N}} D_m$. Isto finaliza a verificação que $D_f = \cup_{m \in \mathbb{N}} D_m$. Vamos, agora, mostrar que

$$m(D_m) = 0, \forall\ m \in \mathbb{N}.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Como f é integrável, usando o Teorema 9.4, temos que existe uma partição $P : a = t_0 < ... < t_n = b$ de $[a,b]$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon/m.$$

Denote por I' os intervalos de P tais que $\text{int}I' \cap D_m \neq \emptyset$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Com isso, $\omega(f; I') \geq \omega_x(f) \geq 1/m$, onde $x \in \text{int}I' \cap D_m$. Portanto

$$1/m \sum |I'| \leq \sum \omega(f; I')|I'| \leq \sum_{i=1}^{n} \omega_i (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon/m.$$

Logo, $\sum |I'| < \varepsilon$. Como $D_m \subseteq (\cup I') \cup X$, onde X é o conjunto dos extremos dos intervalos $[t_{i-1}, t_i]$, inferimos que $m(D_m) = 0$, já que $m(X) = 0$ (ver Exemplo 10.13). Usando o Exemplo 10.15, chegamos a $m(D_f) = 0$. □

Exemplo 10.16. Seja $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ uma função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{se } x \in (0,1) \cup (1,2); \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ 1, & \text{se } x = 1; \\ 2, & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

Logo, pelo Exemplo 10.13, $m(D_f) = m(\{0,1,2\}) = 0$. Através do Teorema 10.4, concluímos que f é integrável.

10.4.2 Exponencial e Logaritmo em Qualquer Base

Nesta última seção, através dos conceitos de logaritmo e exponencial expostos anteriormente, pretendemos apresentar e provar, de maneira clara, as propriedades das funções logarítmica e exponencial em uma base qualquer.

Definição 10.10 (Exponencial na Base a)**.** Sejam $a > 0$, com $a \neq 1$, e $x \in \mathbb{R}$. Definimos a^x como sendo o número real cujo logaritmo Neperiano é igual a $x \ln a$. Em outras palavras,

$$a^x = e^{x \ln a}, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

A função que estabelece a transformação $x \mapsto a^x$ é chamada função exponencial na base a.

Obs 10.9. Note que

$$a^0 = \mathrm{e}^{0 \ln a} = \mathrm{e}^0 = 1 \text{ e } a^1 = \mathrm{e}^{1 \cdot \ln a} = \mathrm{e}^{\ln a} = a.$$

A seguir, exibiremos uma lista de resultados nos quais as propriedades da exponencial em qualquer base estão descritas uma a uma.

Teorema 10.5. *A função exponencial na base a é crescente, para $a > 1$ e é decrescente, para $0 < a < 1$.*

Demonstração. Com efeito, considere que $a > 1$, então, $\ln a > 0$ ($\ln$ é crescente). Assim, dados $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x > y$, devemos provar que $a^x > a^y$.

Suponha, por absurdo, que $a^x \leq a^y$. Pela Definição 10.10, podemos afirmar que $e^{x \ln a} \leq e^{y \ln a}$. Como e é uma função crescente (ver Teorema 10.2), concluímos que $x \ln a \leq y \ln a$. Assim, $x \leq y$ (pois, $\ln a > 0$), o que é uma contradição. Logo, a função exponencial na base a é crescente para $a > 1$.

Agora assuma que $0 < a < 1$. Deste modo $\ln a < 0$ (ver Teorema 10.1). Assim, $\ln a = -A$, com $A > 0$. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x > y$. Se $a^x \geq a^y$, então, $e^{x \ln a} \geq e^{y \ln a}$. Por conseguinte, $e^{-Ax} \geq e^{-Ay}$, ou seja, $1/e^{Ax} \geq 1/e^{Ay}$, ou equivalentemente, $e^{Ay} \geq e^{Ax}$. Usando o Teorema 10.2, chegamos a $Ay \geq Ax$. Como $A > 0$, daí, $y \geq x$, o que é um absurdo. Por fim, $a^x < a^y$. Isto no diz que a^x é decrescente se $0 < a < 1$. $\square$

Corolário 10.6. *A função exponencial na base $a > 0$, com $a \neq 1$, é bijetiva.*

Demonstração. A injetividade segue diretamente do fato que esta função é monótona crescente ou decrescente. Vamos, agora, verificar a sobrejetividade. Dessa forma, dado $y > 0$, tome $x = \ln y / \ln a$, com $a \neq 1$. Assim, $a^x = a^{\frac{\ln y}{\ln a}}$. Pela Definição 10.10, temos

$$a^x = a^{\frac{\ln y}{\ln a}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln y}{\ln a}\ln a} = \mathrm{e}^{\ln y} = y.$$

Logo, para todo $y > 0$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = y$. Provando assim, a sobrejetividade da função exponencial na base a. □

Pela definição da função exponencial na base a temos que $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$. Assim, a função a^x é uma composição da função exponencial com a função polinomial de primeiro grau, ambas contínuas. Logo, a função exponencial na base a também é contínua.

Teorema 10.7. *A função exponencial na base a é derivável e sua derivada é dada por* $a^x \ln a$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Utilizando a Regra da Cadeia, encontramos

$$[a^x]' = e^{x \ln a}(\ln a) = a^x \ln a, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Assim, a função a^x é derivável e sua derivada é dada por

$$[a^x]' = a^x \ln a,\ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

□

Obs 10.10. Diante desse resultado, vamos achar uma igualdade que descreva a n-ésima derivada da função a^x. Considere então, a derivada de segunda ordem

$$(a^x)'' = (a^x \ln a)' = \ln a (a^x)' = a^x (\ln a)^2.$$

Para a derivada de terceira ordem temos

$$(a^x)''' = (a^x (\ln a)^2)' = (\ln a)^2 (a^x)' = a^x (\ln a)^3.$$

É possível, indutivamente, notar que a derivada n-ésima da função a^x obedece a igualdade

$$(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Assim, a função exponencial na base a tem derivadas de todas as ordens.

Teorema 10.8. *Sejam x e $y \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, com $a \neq 1$. Então, $a^{x+y} = a^x a^y$.*

Demonstração. A Definição 10.10 e o Teorema 10.2, nos garantem que

$$a^{x+y} = \mathrm{e}^{(x+y)\ln a} = \mathrm{e}^{(x\ln a + y\ln a)} = \mathrm{e}^{x\ln a}\mathrm{e}^{y\ln a} = a^x a^y.$$

Assim, $a^{x+y} = a^x a^y$. □

Teorema 10.9. *Sejam x e $y \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, com $a \neq 1$. Então, $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$.*

Demonstração. Utilizando, novamente, a Definição 10.10 e o Teorema 10.2, concluímos

$$a^{x-y} = \mathrm{e}^{(x-y)\cdot\ln a} = \mathrm{e}^{(x\ln a - y\ln a)} = \frac{\mathrm{e}^{x\ln a}}{\mathrm{e}^{y\ln a}} = \frac{a^x}{a^y}.$$

Com isso, $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$. □

Obs 10.11. Observe que $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$, pois

$$a^{0-x} = \frac{a^0}{a^x} = \frac{1}{a^x},$$

com $a > 0$.

Teorema 10.10. *Sejam x e $y \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, com $a \neq 1$, então $[a^x]^y = a^{xy}$.*

Demonstração. Temos por Definição que

$$a^{xy} = \mathrm{e}^{(xy)\ln a} = \mathrm{e}^{y(x\ln a)} = \mathrm{e}^{y\ln a^x} = [a^x]^y.$$

□

Teorema 10.11. *Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $a, b > 0$, com $a, b \neq 1$, então $[ab]^x = a^x b^x$.*

Demonstração. Usando a Definição 10.10 e os Teoremas 10.1 e 10.2, obtemos

$$a^x b^x = \mathrm{e}^{x\ln a}\mathrm{e}^{x\ln b} = \mathrm{e}^{x\ln a + x\ln b} = \mathrm{e}^{x(\ln a + \ln b)} = \mathrm{e}^{x\ln(ab)} = [ab]^x.$$

□

Teorema 10.12. *Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $a, b > 0$, com $a, b \neq 1$, então* $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

Demonstração. Novamente através da Definição 10.10 e dos Teoremas 10.1 e 10.2, chegamos a

$$\frac{a^x}{b^x} = \frac{\mathrm{e}^{x \ln a}}{\mathrm{e}^{x \ln b}} = \mathrm{e}^{x \ln a - x \ln b} = \mathrm{e}^{x(\ln a - \ln b)} = \mathrm{e}^{x \ln\left(\frac{a}{b}\right)} = \left(\frac{a}{b}\right)^x.$$

□

Provaremos alguns limites envolvendo a função exponencial na base a para saber como se caracteriza o gráfico dessa função.

Teorema 10.13. *Os seguintes itens são verdadeiros:*

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ *e* $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$, *para* $a > 1$;

ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ *e* $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$, *para* $0 < a < 1$.

Demonstração. **i)** Note que, se $a > 1$, então $\ln a > 0$. Daí, quando $x \to +\infty$, temos que $y \to +\infty$, se $y = x \ln a$. Consequentemente,

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x \ln a} = \lim_{y \to +\infty} \mathrm{e}^y = +\infty.$$

Analogamente, se $x \to -\infty$, temos que $y \to -\infty$, quando $y = x \ln a$. Assim,

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x \ln a} = \lim_{y \to -\infty} \mathrm{e}^y = 0.$$

ii) Agora, se $0 < a < 1$, então $\ln a < 0$. Portanto, quando $x \to +\infty$, temos que $y \to -\infty$, se $y = x \ln a$. Assim,

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x \ln a} = \lim_{y \to -\infty} \mathrm{e}^y = 0,$$

Por outro lado, quando $x \to -\infty$, temos que $y \to +\infty$, se $y = x \ln a$. Por conseguinte,

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x \ln a} = \lim_{y \to +\infty} \mathrm{e}^y = +\infty.$$

□

Com esses limites podemos traçar o gráfico da função exponencial na base a.

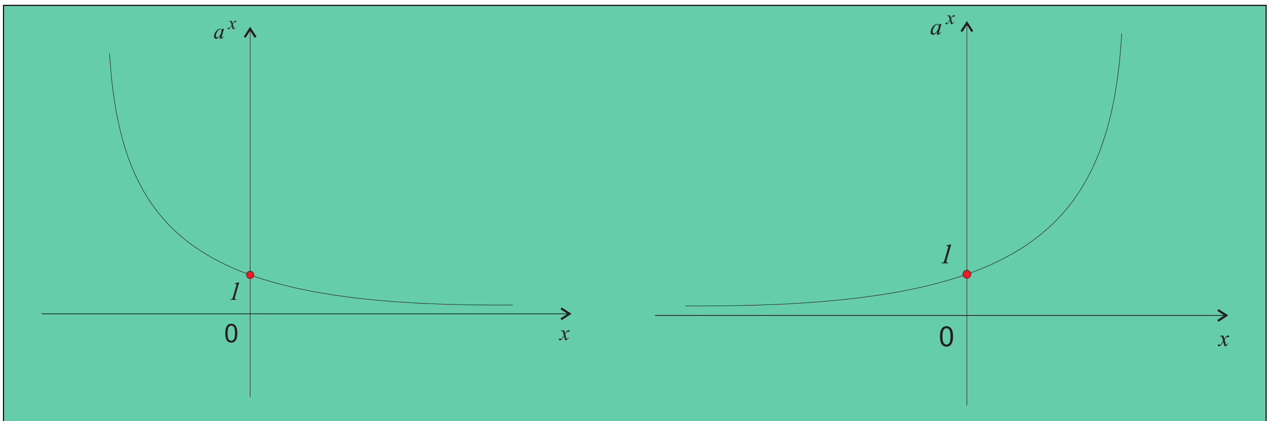

Figura 10.5: Gráfico da exponencial nas bases $0 < a < 1$ e $a > 1$, respectivamente

Vimos que a função exponencial na base a é bijetiva. Isto nos permite definir uma função inversa a função exponencial. A essa função inversa denominamos função logarítmica na base a. Ela será o objeto de estudo a partir deste momento.

Definição 10.11 (Logaritmo na Base a)**.** *Seja* $1 \neq a > 0$. *A função* $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, *que associa um númeoro positivo* x *a um valor real denotado por* $\log_a x$, *é chamada logaritmo de* x *na base* a *e é definida pela seguinte equivalência:*

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y.$$

Obs 10.12. Note que $\log_a 1 = 0$ e $\log_a a = 1$, pois $a^0 = 1$ e $a^1 = a$.

Abaixo, enunciaremos alguns resultados que listarão algumas propriedades da função logaritmo em uma base qualquer.

Teorema 10.14. *Seja* $1 \neq a > 0$. *Então,* $\log_a a^x = x$ *e* $a^{\log_a z} = z$, *para quaisquer* $x \in \mathbb{R}$ *e* $z > 0$.

Demonstração. De fato, sabemos da Definição 10.11 que

$$\log_a a^x = y \Leftrightarrow a^x = a^y.$$

Pela injetividade da função exponencial na base a, concluímos que

$$a^x = a^y \Leftrightarrow y = x.$$

Logo, $\log_a a^x = x$. Além disso, segue diretamente da Definição 10.11 que $z = a^{\log_a z}$. $\square$

É fácil ver que a função ln é uma função logarítmica com base $a = \mathrm{e}$. Mas, qual a relação existente entre $\ln x$ e $\log_a x$?

Teorema 10.15. *Seja $1 \neq a > 0$. Então, vale a segunite relação:* $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

Demonstração. Para todo $x > 0$, temos que

$$e^{\ln x} = x = a^{\log_a x}.$$

Por outro lado, pela Definição 10.10,

$$a^{\log_a x} = e^{\log_a x \cdot \ln a}.$$

Assim, podemos afirmar que

$$e^{\ln x} = e^{\log_a x \cdot \ln a}.$$

Como a função e é injetiva, tem-se $\ln x = \log_a x \cdot \ln a$. Daí, $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$. Logo, esta é a relação entre um logaritmo em qualquer base e o logaritmo Neperiano. $\square$

Teorema 10.16. *Seja $1 \neq a > 0$. A função $\log_a$ é crescente, para $a > 1$ e é decrescente, para $0 < a < 1$.*

Demonstração. Primeiramente considere que $a > 1$. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x > y$, devemos mostrar que $\log_a x > \log_a y$. Pela Definição 10.11, podemos concluir que

$$\log_a x = b_1 \Leftrightarrow a^{b_1} = x \text{ e } \log_a y = b_2 \Leftrightarrow a^{b_2} = y.$$

Assim, para $x > y$, obtemos $a^{b_1} > a^{b_2}$. Como a função exponencial na base a é crescente, para $a > 1$ (ver Teorema 10.5), podemos afirmar que $b_1 > b_2$. Logo, $\log_a x > \log_a y$. Daí, a função logaritmo na base a é crescente, para $a > 1$.

Agora assuma que $0 < a < 1$. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x > y$, devemos provar que $\log_a x < \log_a y$. Novamente, pela Definição 10.11, inferimos

$$\log_a x = b_1 \Leftrightarrow a^{b_1} = x \text{ e } \log_a y = b_2 \Leftrightarrow a^{b_2} = y.$$

Assim, com $x > y$, chegamos a $a^{b_1} > a^{b_2}$. Como a função exponencial na base a é decrescente, para $0 < a < 1$ (ver Teorema 10.5), podemos afirmar que $b_1 < b_2$. Deste modo, $\log_a x < \log_a y$. Portanto, a função logaritmo na base a é decrescente, para $0 < a < 1$. $\square$

Obs 10.13. Como a função $\log_a$ foi definida como a inversa da função a^x chegamos a conclusão que a função logarítmica na base a é bijetiva. Assim, para $1 \neq a > 0$ e $x, y \in \mathbb{R}$, temos que

$$x = y \Leftrightarrow \log_a x = \log_a y.$$

Além disso, para qualquer $b \in \mathbb{R}$, existe um único $x > 0$ tal que $\log_a x = b$.

A relação $\log_a x = \ln x / \ln a$ nos garante que a função logarítmica na base a é contínua, pois ln o é (ver Teorema 6.6).

Teorema 10.17. *Seja $1 \neq a > 0$. A função logarítmica na base a é derivável e sua derivada, em cada $x > 0$, é dada por* $\log_a' x = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$.

Demonstração. Para provar que a função $\log_a$ é derivável vamos utilizar a relação existente entre o logaritmo na base a e o logaritmo Neperiano. Assim sendo,

$$\log_a' x = \frac{1}{\ln a} \ln' x = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

Logo, a função $\log_a$ é derivável e sua derivada em $x > 0$ é dada por $\log_a' x = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$. $\square$

Agora, sabendo que a função $\log_a$ é derivável com sua derivada dada por $\log_a' x = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$. Vamos calcular a n-ésima derivada da função $\log_a$. Por indução finita, temos que

$$\log_a^{(n)} x = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)^{(n)} = \frac{1}{\ln a} \ln^{(n)} x = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n \cdot \ln a}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Assim a função logarítmica na base a é de classe C^∞, ou seja, infinitamente derivável.

Exibiremos, agora, algumas operações elementares da função $\log_a$. Entre elas estão a transformação do produto em soma, e da divisão em subtração.

Teorema 10.18. *Seja $1 \neq a > 0$. Considere também os números reais positivos x e y, então*

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Demonstração. Considerando a relação existente entre $\log_a$ e ln, podemos afirmar que

$$\log_a(xy) = \frac{\ln(xy)}{\ln a}$$

As propriedades da função ln, nos garantem que $\ln(xy) = \ln x + \ln y$. Daí,

$$\log_a(xy) = \frac{\ln(xy)}{\ln a} = \frac{\ln x + \ln y}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln y}{\ln a} = \log_a x + \log_a y.$$

Logo, $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$. □

Teorema 10.19. *Seja $1 \neq a > 0$. Considere também os números reais positivos x e y, então*

$$\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y.$$

Demonstração. Considerando a relação existente entre $\log_a$ e ln, podemos afirmar que

$$\log_a(x/y) = \frac{\ln(x/y)}{\ln a}$$

Sabemos que $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$. Daí,

$$\log_a(x/y) = \frac{\ln(x/y)}{\ln a} = \frac{\ln x - \ln y}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln a} - \frac{\ln y}{\ln a} = \log_a x - \log_a y.$$

Com isso, $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$. □

Teorema 10.20. *Seja $1 \neq a > 0$. Considere também o número real positivo x, então $\log_a x^q = q \log_a x$, para todo $q \in \mathbb{Q}$.*

Demonstração. Para qualquer número racional q, inferimos

$$\log_a(x^q) = \frac{\ln(x^q)}{\ln a} = \frac{q \ln x}{\ln a} = q\frac{\ln x}{\ln a} = q \log_a x,$$

basta utilizar as propriedades da função ln. □

Teorema 10.21 (Teorema da Mudança de Base)**.** *Sejam a, b e $x >$, com $a, b \neq 1$. Afirmamos que*

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Demonstração. É fácil ver que

$$\frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\frac{\ln x}{\ln b}}{\frac{\ln a}{\ln b}} = \frac{\ln x \ln b}{\ln b \ln a} = \frac{\ln x}{\ln a} = \log_a x.$$

Assim, $\log_a x = (\log_b x)/(\log_b a)$. □

Obs 10.14. Podemos concluir, através do Teorema 10.21, que

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a},$$

ou seja, $\log_a b = (\log_b a)^{-1}$, para $a, b \neq 1$ e $a, b > 0$.

Teorema 10.22 (Cologaritmo)**.** *Sejam $a, x > 0$, com $a \neq 1$, então*

$$\log_a(1/x) = -\log_a x.$$

Ao valor $\log_a(1/x)$ damos o nome de cologaritmo e o denotamos $colog_a x$.

Demonstração. Observe que

$$\log_a(1/x) = \frac{\ln(1/x)}{\ln a} = \frac{\ln x^{-1}}{\ln a} = \frac{(-1)\ln x}{\ln a} = (-1)\frac{\ln x}{\ln a} = (-1)\log_a x.$$

□

Vejamos, agora, alguns limites que nos auxiliarão na construção do gráfico da função logarítmica na base a.

Teorema 10.23. *Os seguintes itens são verdadeiros:*

i) $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ *e* $\lim_{x\to 0} \log_a x = -\infty$, *para* $a > 1$

ii) $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$ *e* $\lim_{x\to 0} \log_a x = +\infty$, *para* $0 < a < 1$.

Demonstração. A relação existente entre o logaritmo na base a e o logaritmo Neperiano, nos permitem concluir que

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln a} \text{ e } \lim_{x\to 0} \log_a x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\ln a}.$$

i) Dessa forma, se $a > 1$, obtemos $\ln a > 0$. Consequentemente,

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty \text{ e } \lim_{x\to 0} \log_a x = -\infty.$$

ii) Analogamente, se $0 < a < 1$, obtemos $\ln a < 0$. Por conseguinte,

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty \text{ e } \lim_{x\to 0} \log_a x = +\infty.$$

□

Por fim, o gráfico da função $\log_a$ é dado por

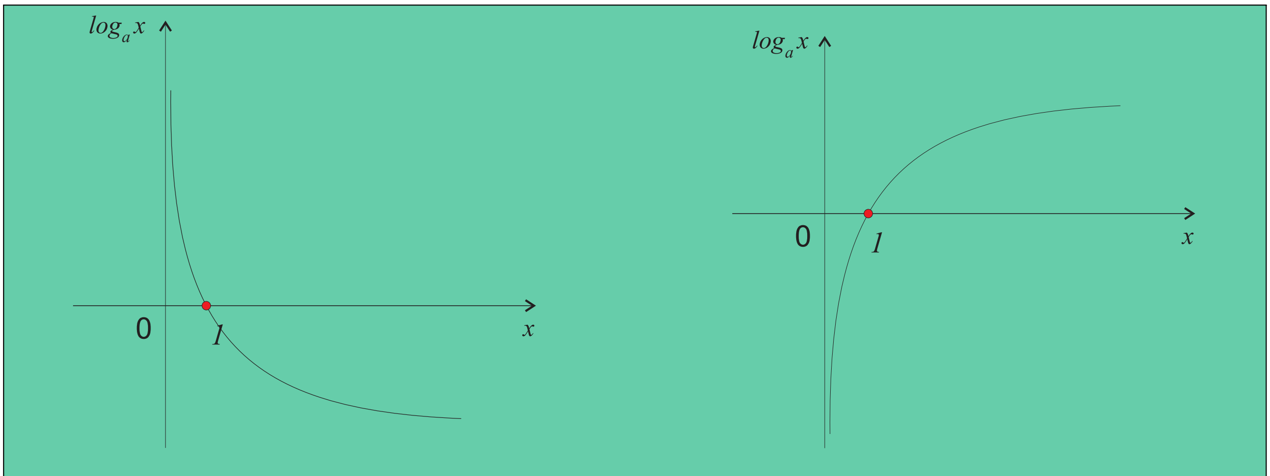

Figura 10.6: Gráfico do Logaritmo nas bases $0 < a < 1$ e $a > 1$, respectivamente

10.5 Conclusão

Caro leitor, ao final desta última aula, é importante ressaltar a aplicabilidade da integração a Riemann. Como, por exemplo, vimos, através da definição da função logaritmo, que é possível, de uma maneira mais elegante, provar afirmações estudadas no ensino básico.

10.6 Resumo

Nesta aula, mostramos como trabalhar, utilizando integração a Riemann, com o logaritmo. Além disso, estendemos nossos conceitos de integrais, criando uma nova categoria de integrabilidade, as integrais impróprias. Por fim, através destas, mostramos como utilizar um novo teste de convergência para séries de números reais, o Teste da Integral.

10.7 Exercícios Propostos

Exercícios:

1. Defina a seguinte função: $f(x) = a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$, onde $a > 0$. Encontre a derivada de f e estude-a. Defina o logaritmo na base a e encontre sua derivada.

2. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita convexa se $f(x) \leq f(b) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b)$, para $x \in (a, b)$ e $a, b \in I$. Uma função $g : I \to \mathbb{R}$ diz-se côncava se $-g$ é uma função convexa. Encontre exemplos de funções convexas e côncavas.

3. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ funções contínuas, não identicamente nulas, tais que $f(x + y) = f(x)f(y)$ e $g(uv) = g(u) + g(v)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $u, v \in \mathbb{R}+$. Prove que existem $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$ e $g(x) = b \ln x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^+$.

4. Prove que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Conclua que $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \ln x = 0$ e $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

5. Verifique a convergência ou divergência das integrais $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1-\mathrm{e}^x}$, $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{1}{x^2}$.

6. Mostre que se $r > 1$ a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} 1/n(\ln n)^r$ converge.

10.8 Exercícios Resolvidos

Questões Resolvidas:

Ex1. Prove que, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Faça

$$y_n = x/n, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Assim, se $n \to \infty$, tem-se $y_n \to 0$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}(1+y_n)^{(1/y_n)x} = \left[\lim_{n\to\infty}(1+y_n)^{1/y_n}\right]^x = \mathrm{e}^x,$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. □

Ex2. Verifique a convergência ou divergência da integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-\cos x}$.

Demonstração. Pelo Teorema 7.13, existe $a \in (0, x)$ tal que

$$\cos x - \cos 0 = \operatorname{sen} a(x-0), \forall\ x \in [0,1].$$

Consequentemente,

$$1-\cos x = |\cos x - 1| = |\operatorname{sen} a||x| \leq |x| = x, \forall\ x \in [0,1].$$

Com isso,

$$\frac{1}{1-\cos x} \geq \frac{1}{x}, \forall\ x \in (0,1].$$

Dessa forma, dado $\varepsilon > 0$, temos que

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{1-\cos x} \geq \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} = -\ln\varepsilon,$$

ver Definição 10.1. Por fim, com um abuso de notação,

$$\int_0^1 \frac{1}{1-\cos x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{1-\cos x} \geq \lim_{\varepsilon\to 0^+}(-\ln\varepsilon) = \infty,$$

pois $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\ln\varepsilon = -\infty$. Por fim, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-\cos x}$ é divergente. □

Auto-Avaliação

Sou capaz de aplicar corretamente o Teste da Integral e as propriedades das funções logaritmo e exponencial?

Proxima Aula

Caro leitor, espero que você tenha encontrado estímulo e divertimento no nosso material. Além disso, recomendo aos alunos mais curiosos sobre o prosseguimento deste texto, o estudo do curso Cálculo Avançado. Neste, são vistas generalizações de vários conteúdos abordados aqui.

Referências Bibliográficas

[1] Alonso, M.; Finn, E. J., *Física: Um Curso Universitário.* Segunda Edição, São Paulo, Edgard Blücher Ltda, 2009. 481p.

[2] Bartle, R. G.; Sherbert, D. R., *Introdution to Real Analysis*, Third Edition, New York, JohnWiley and Sons,Inc., 2000. 399p.

[3] Boyce, W. E.; DiPrima, R. C., *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.* Seventh Edition, New York, JohnWiley and Sons,Inc, 2001. 745p.

[4] Brasil, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

[5] Brauer, F.; Nohel, J. A., *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations.* University of Wisconsin, 1989.

[6] Dragomir, S. S., *Some Gronwall Type Inequalities and Applications.* Monograph. Victoria University of Technology, 2002.

[7] Ferreira, J., *A Construção dos Números.* Primeira Edição, Rio de Janeiro, SBM, 2010. 133p.

[8] Figueiredo, D., *Análise I.* Segunda Edição, Rio de Janeiro, LTC, 2008. 266p.

[9] Guillemin, V.; Pollack, A., *Differential Topology.* First Edition, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1974. 227p.

[10] King, A.C.; Billingham, J.; OTTO, S.R., *Differential Equations.* Linear, Nonlinear, Ordinary, Partial. Cambridge University Press. New York, 2003.

[11] Lima, E. L., *Análise Real.* Funções de uma variável, vol.1. 8°. ed. Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[12] Lima, E. L., *Análise Real,* vol.2. Rio de Janeiro, 2004.

[13] Lima, E. L., *Curso de Análise*, vol. 1, Décima Segunda Edição, Rio de Janeiro, IMPA, 2008. 431p.

[14] Melo, W., *Existência de soluções clássicas para as Equações de Burgers e Navier-Stokes.* Dissertação de Mestrado. UFPE, 2007.

[15] Munkres, J. R., *Topology.* Second Edition, New Jersey, Prentice Hall, Inc., 2000. 552p.

[16] Nolt, J.; Rohatys, D.; Varzi, A., *Theory and problems or logic.* Second edition, New York, McGraw-Hill, 2009. 279p.

[17] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis.* Third Edition, New York, McGraw-Hill, Inc., 1976. 351p.

[18] Smoller, J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations.* 2nd ed., Springer-Verlag, 1994.

[19] Tveito, A.; Winther, R., *Introduction to Partial Differential Equations.* A Computational Approach. New York, 1961.

Professor Revisor

Professor Paulo de Souza Rabelo