Geometria Euclidiana Plana

Almir Rogério Silva Santos
Humberto Henrique de Barros Viglioni

CESAD
CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA - UFS

São Cristóvão/SE
2011

Geometria Euclidiana Plana

Elaboração de Conteúdo
Almir Rogério Silva Santos
Humberto Henrique de Barros Viglioni

Projeto Gráfico e Capa
Hermeson Alves de Menezes

Diagramação
Almir Rogério Silva Santos
Humberto Henrique de Barros Viglioni

FICHA CATALOGRÁFICA PRODUZIDA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

S237g Santos, Almir Rogério Silva.
Geometria euclidiana plana / Almir Rogério Silva Santos, Humberto Henrique de Barros Viglioni -- São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2011.

1. Geometria euclidiana. I. Viglioni, Humberto Henrique de Barros. II.Título.

CDU 514.12

Presidente da República
Dilma Vana Rousseff

Ministro da Educação
Fernando Haddad

Secretário de Educação a Distância
Carlos Eduardo Bielschowsky

Reitor
Josué Modesto dos Passos Subrinho

Vice-Reitor
Angelo Roberto Antoniolli

Chefe de Gabinete
Ednalva Freire Caetano

Coordenador Geral da UAB/UFS
Diretor do CESAD
Antônio Ponciano Bezerra

Vice-coordenador da UAB/UFS
Vice-diretor do CESAD
Fábio Alves dos Santos

Diretoria Pedagógica
Clotildes Farias de Sousa (Diretora)

Diretoria Administrativa e Financeira
Edélzio Alves Costa Júnior (Diretor)
Sylvia Helena de Almeida Soares
Valter Siqueira Alves

Coordenação de Cursos
Djalma Andrade (Coordenadora)

Núcleo de Formação Continuada
Rosemeire Marcedo Costa (Coordenadora)

Núcleo de Avaliação
Hérica dos Santos Matos (Coordenadora)

Núcleo de Serviços Gráficos e Audiovisuais
Giselda Barros

Núcleo de Tecnologia da Informação
João Eduardo Batista de Deus Anselmo
Marcel da Conceição Souza
Raimundo Araujo de Almeida Júnior

Assessoria de Comunicação
Guilherme Borba Gouy

Coordenadores de Curso
Denis Menezes (Letras Português)
Eduardo Farias (Administração)
Haroldo Dorea (Química)
Hassan Sherafat (Matemática)
Hélio Mario Araújo (Geografia)
Lourival Santana (História)
Marcelo Macedo (Física)
Silmara Pantaleão (Ciências Biológicas)

Coordenadores de Tutoria
Edvan dos Santos Sousa (Física)
Raquel Rosário Matos (Matemática)
Ayslan Jorge Santos da Araujo (Administração)
Carolina Nunes Goe (História)
Rafael de Jesus Santana (Química)
Gleise Campos Pinto (Geografia)
Trícia C. P. de Sant'ana (Ciências Biológicas)
Vanessa Santos Góes (Letras Português)
Lívia Carvalho Santos (Presencial)

NÚCLEO DE MATERIAL DIDÁTICO

Fábio Alves dos Santos (Coordenador)
Marcio Roberto de Oliveira Mendonça
Neverton Correia da Silva
Nycolas Menezes Melo

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
Cidade Universitária Prof. "José Aloísio de Campos"
Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze
CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE
Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474

Sumário

Capítulo 1: Geometria Euclidiana **13**

1.1 Introdução 14

1.2 Um Pouco de História 14

1.2.1 O Quinto Postulado de Euclides 17

1.3 Geometria de Incidência 19

1.3.1 Axiomas de Incidência 20

1.3.2 Modelos para a geometria de incidência . . . 22

1.4 Axiomas de ordem 23

RESUMO 29

PRÓXIMA AULA 29

ATIVIDADES 29

LEITURA COMPLEMENTAR 31

Capítulo 2: Axiomas de Medição **33**

2.1 Introdução 34

2.2 Axiomas de Medição de Segmentos 34

2.3 Axiomas de Medição de Ângulos 38

RESUMO 43

PRÓXIMA AULA 43

ATIVIDADES 43

LEITURA COMPLEMENTAR 46

Capítulo 3: Congruência **47**

3.1 Introdução 48

3.2 Congruência de Segmentos 48

3.3 Congruência de Triângulos 49
RESUMO 57
PRÓXIMA AULA 57
ATIVIDADES 57
LEITURA COMPLEMENTAR 58

Capítulo 4: Geometria sem o Postulado das Paralelas 59
4.1 Introdução 60
4.2 Teorema do Ângulo Interior Alternado 60
4.3 Teorema do Ângulo Exterior 64
4.4 Congruência de Triângulos Retângulos 67
4.5 Desigualdades no triângulo 67
4.6 Teorema de Saccheri-Legendre 72
4.7 Soma dos Ângulos de um Triângulo 75
RESUMO 80
PRÓXIMA AULA 80
ATIVIDADES 80
LEITURA COMPLEMENTAR 82

Capítulo 5: O Axioma das Paralelas 85
5.1 Introdução 86
5.2 Axioma das Paralelas 86
5.3 Triângulos e Paralelogramos 88
5.4 Semelhança de Triângulos 95
RESUMO 102
PRÓXIMA AULA 102
ATIVIDADES 102
LEITURA COMPLEMENTAR 105

Capítulo 6: O Círculo 107
6.1 Introdução 108
6.2 O Círculo 108
6.3 Ângulos Inscritos em um Círculo 112

6.4 Polígonos Inscritos em um Círculo 117
6.5 Como calcular o comprimento de um círculo? 124
RESUMO 126
PRÓXIMA AULA 126
ATIVIDADES 126
LEITURA COMPLEMENTAR 131

Capítulo 7: Funções Trigonométricas **133**
7.1 Introdução 134
7.2 Funções Trigonométricas 134
7.3 Fórmulas de Redução 136
7.4 Lei dos Cossenos 140
7.5 Lei dos Senos 143
RESUMO 148
PRÓXIMA AULA 148
ATIVIDADES 148
LEITURA COMPLEMENTAR 150

Capítulo 8: Área **151**
8.1 Introdução 152
8.2 Área 152
8.3 Área do Círculo 156
RESUMO 159
PRÓXIMA AULA 159
ATIVIDADES 159
LEITURA COMPLEMENTAR 163

Capítulo 9: Teorema de Ceva **165**
9.1 Introdução 166
9.2 O Teorema de Ceva 166
9.3 Pontos Notáveis de um Triângulo 170
RESUMO 174
PRÓXIMA AULA 174
ATIVIDADES 174

LEITURA COMPLEMENTAR 175

Capítulo 10: Construções Elementares **177**

10.1 Introdução 178

10.2 Construções Elementares 179

10.2.1 Perpendiculares 179

10.2.2 Paralelas 181

10.2.3 Mediatriz 182

10.2.4 Bissetriz 183

10.2.5 O arco capaz 184

10.2.6 Divisão de um segmento em partes iguais . . 187

10.2.7 Tangentes a um círculo 188

10.3 Problemas Resolvidos 189

RESUMO 200

PRÓXIMA AULA 200

ATIVIDADES 200

LEITURA COMPLEMENTAR 201

Capítulo 11: Expressões Algébricas **203**

11.1 Introdução 204

11.2 A 4^a proporcional 204

11.3 Expressões com raízes quadradas 207

11.4 O segmento áureo 215

11.5 Expressões construtíveis 216

RESUMO 218

PRÓXIMA AULA 219

ATIVIDADES 219

LEITURA COMPLEMENTAR 220

Capítulo 12: Construções Possíveis **221**

12.1 Introdução 222

12.2 Divisão do círculo em n parte iguais 222

12.3 Construções Possíveis Utilizando Régua e Compasso 225

12.3.1 O Princípio da Solução 229

12.3.2 Um critério de não-construtibilidade 231
12.3.3 O critério geral de não-construtibilidade . . . 232
12.3.4 Polígonos regulares construtíveis 234
RESUMO 236
ATIVIDADES 236
LEITURA COMPLEMENTAR 237

AULA 1

Geometria Euclidiana

META

Introduzir o método axiomático na geometria.

OBJETIVOS

Identificar e entender os axiomas de Euclides para a Geometria Plana.

Entender do porquê modificar os Axiomas de Euclides para o estudo axiomatizado da Geometria Euclidiana Plana.

Introduzir os Axiomas de Incidência e de ordem.

PRÉ-REQUISITOS

Fundamentos de Matemática

1.1 Introdução

Seja bem vindo caro aluno, daremos início aqui ao estudo axiomatizado daquela geometria estudada no ensino fundamental e médio, a Geometria Euclideana Plana, porém com um enfoque diferente. Faremos uso do método utilizado por Euclides em seu livro *Os Elementos*, o método axiomático.
A palavra "geometria" vem do grego *geometrein* (*geo*, "terra", e *metrein*, "medida"); originalmente geometria era a ciência de medição da terra. O historiador Herodotus (século 5 a.C.), credita ao povo egípcio pelo início do estudo da geometria, porém outras civilizações antigas (babilônios, hindu e chineses) também possuiam muito conhecimento da geometria.
Os Elementos de Euclides é um tratado matemático e geométrico consistindo de 13 livros escrito pelo matemático grego Euclides em Alexandria por volta de 300 a.C. Os 4 primeiros livros, que hoje pode ser pensando como capítulos, tratam da Geometria Plana conhecida da época, enquanto os demais tratam da teoria dos números, dos incomensuráveis e da geometria espacial.
Esta aula está segmentada em duas partes. Na primeira parte vamos apresentar para você, caro aluno, os postulados de Euclides e veremos porquê se faz necessário introduzir outros postulados a fim de que se obtenha uma geometria sólida, sem "lacunas" nos resultados.

1.2 Um Pouco de História

No livro 1 dos Elementos de Euclides, inicia-se o estudo da geometria plana, hoje conhecida como Geometria Euclidiana Plana em sua homenagem. Inicialmente ele define os objetos geométricos cujas propriedades deseja-se estudar. São 23 definições, entre as quais encontramos as definições de ponto, reta, círculo, triângulo, retas paralelas, etc. Em seguida ele enuncia 5 noções comuns, que são afirmações admitidas como verdades óbvias. São elas:

1 - Coisas iguais a uma mesma coisa são também iguais.

2 - Se iguais são adicionados a iguais, os totais obtidos são iguais

3 - Se iguais são subtraídos de iguais, os totais obtidos são iguais

4 - Coisas que coincidem uma com a outra são iguais

5 - O todo é maior do que qualquer uma de suas partes

O que Euclides faz é construir axiomaticamente a geometria plana, através do método axiomático. Mas o que é o método axiomático? Se eu desejo convencê-lo que uma afirmação A_1 é verdadeira, eu posso mostrar como esta afirmação segue logicamente de alguma outra afirmação A_2, a qual você acredita ser verdadeira. No entanto, se você não acredita em A_2, eu terei que repetir o processo utilizando uma outra afirmação A_3. Eu devo repetir este processo várias vezes até atingir alguma afirmação que você acredite ser verdadeira, um que eu não precise justificar. Esta afirmação tem o papel de um axioma (ou postulado). Caso essa afirmação não exista, o processo não terá fim, resultando numa sequência sucessiva de demonstrações.
Assim, existem dois requisitos que devem ser cumpridos para que uma prova esteja correta:

Requisito 1: Aceitar como verdadeiras certas afirmações chamadas "axiomas" ou "postulados", sem a necessidade de prova.

Requisito 2: Saber como e quando uma afirmação segue logicamente de outra.

O trabalho de Euclides destaca-se pelo fato de que com apenas 5 postulados ele foi capaz de deduzir 465 proposições, muitas complicadas e não intuitivas.
A seguir apresentamos os 5 postulados de Euclides.

Postulado 1. *Pode-se traçar uma (única) reta ligando quaisquer dois pontos.*

Postulado 2. *Pode-se continuar (de uma única maneira) qualquer reta finita continuamente em uma reta.*

Postulado 3. *Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.*

Postulado 4. *Todos os ângulos retos são iguais.*

Algumas observações antes do Postulado 5 merecem atenção.

- Com apenas estes 4 postulados Euclides provou 28 proposições

- Nos Postulados 1 e 2 os termos entre parênteses não foram empregados por Euclides; porém, pela forma como ele os aplicam, deduz-se que estes termos foram implicitamente assumidos.

- Euclides define ângulos sem falar em medida e ângulo reto como um ângulo que é igual ao seu suplementar. Daí, a necessidade do Postulado 4.

A primeira proposição do Livro I segue abaixo:

Proposição 1. *Existe um triângulo equilátero com um lado igual a um segmento de reta dado.*

Demonstração

- Passo 1: Pelo Postulado 3, podemos traçar um círculo com centro em uma extremidade do segmento de reta e raio igual a este segmento.

- Passo 2: Como no passo 1, podemos traçar um outro círculo com centro na outra extremidade e mesmo raio.

- Passo 3: Tome um dos pontos de interseção dos dois círculos como o terceiro vértice do triângulo procurado.

□

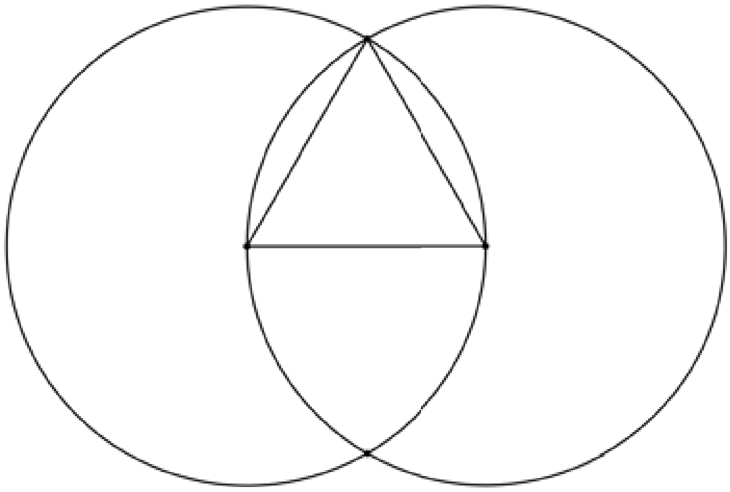

Figura 1.1: Um triângulo equilátero.

Existe uma falha nesta demonstração. Se queremos construir a geometria a partir dos axiomas, precisamos justificar toda afirmação a partir deles. Note que justificamos os passos 1 e 2 utilizando o Postulado 3. Porém, não existe nenhum postulado para sustentar a veracidade do passo 3, ou seja, nenhum dos postulados garante que o ponto de interseção entre os dois círculos existe.
De fato, em muitas passagens dos Elementos Euclides faz uso de afirmações que não estão explícitas. Apesar disso, Euclides foi audacioso em escrever os Elementos, um belíssimo trabalho que de tão pouco deduziu-se centenas de afirmações.

1.2.1 O Quinto Postulado de Euclides

Analisemos a proposição 28 do Livro I.
Proposição 28. *Sejam duas retas m e n cortadas por uma terceira reta r. Se a soma dos ângulos formados (ver figura 1.2) é 180 graus, então m e n são retas paralelas.*
Na simbologia atual podemos representar a Proposição 28 da seguinte forma

$$\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow m \cap n = \emptyset.$$

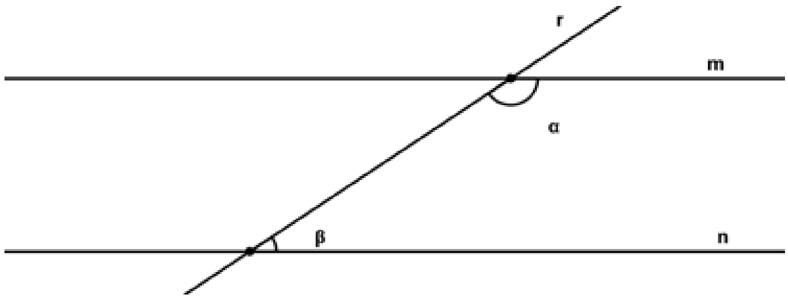

Figura 1.2: $\alpha + \beta = 180°$.

E a recíproca, é verdadeira? Ou seja, é verdade que

$$m \cap n = \emptyset \Rightarrow \alpha + \beta = 180°?$$

A resposta a essa pergunta é complexa e levou mais de dois mil anos para ser entendida completamente. De fato, esta recíproca é exatamente o conteúdo do Postulado 5.

Postulado 5. *Sejam duas retas m e n cortadas por uma terceira reta r. Se a soma dos ângulos formados (ver figura) é menor do que* 180 *graus, então m e n não são paralelas. Além disso, elas se intersectam do lado dos ângulos cuja soma é menor do que* 180 *graus.*

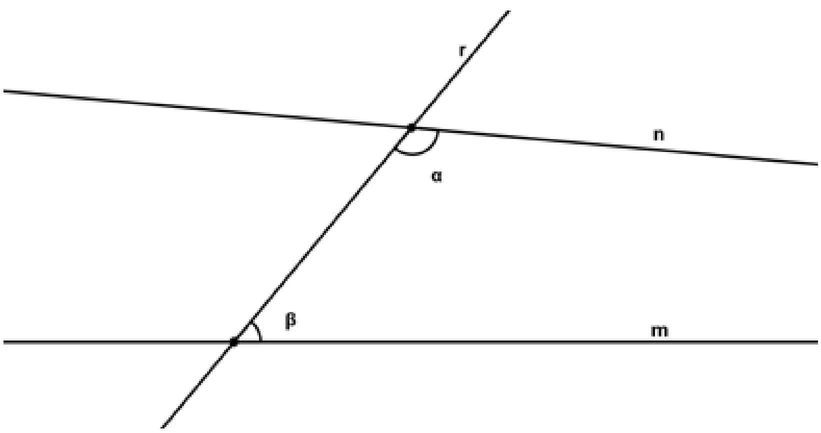

Figura 1.3: $\alpha + \beta < 180°$.

Esta foi a forma como Euclides enunciou o Postulado 5. Na simbologia atual podemos representar a Proposição 28 da seguinte forma

$$\alpha + \beta < 180^\circ \Rightarrow m \cap n \neq \emptyset \tag{1.1}$$

Note que a afirmação 1.1 é equivalente a

$$m \cap n = \emptyset \Rightarrow \alpha + \beta \geq 180^\circ.$$

Porém, se $\alpha + \beta > 180^\circ$ teríamos que a soma dos suplementares de α e β seria $< 180^\circ$, implicando, pelo Postulado 5, que $m \cap n \neq \emptyset$; contradição!

Logo, o Postulado 5 é equivalente a afirmação

$$m \cap n = \emptyset \Rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ,$$

que é exatamente a recíproca da Proposição 28.

Muitos acreditavam que quando Euclides chegou no Postulado 5 não soube como demonstrá-lo e então resolveu deixá-lo como postulado. Com certeza Euclides deve ter pensado muito até aceitar que teria que acrescentar este postulado, visto que diferentemente dos demais, este parece muito mais com um teorema que com uma simples afirmação que podemos aceitá-la sem demonstração.

1.3 Geometria de Incidência

A partir desta seção, caro aluno, iremos iniciar nosso estudo axiomático da Geometria Euclidiana Plana. Nas seções anteriores, vimos que os postulados de Euclides não são suficientes para demonstrar todos os resultados da geometria plana. De fato, vimos que nos Elementos de Euclides existem lacunas que não são possíveis preenchê-las somente com o conteúdo dos Elementos.

O que iremos fazer neste curso é axiomatizar a geometria de tal forma que não deixemos lacunas. Iremos usar um conjunto de axiomas que serão suficientes para demonstrar todos os resultados conhecidos desde o ensino fundamental.

Não podemos definir todos os termos que iremos usar. De fato, para definir um termo devemos usar um outro termo, e para definir esses termos devemos usar outros termos, e assim por diante. Se não fosse permitido deixar alguns termos indefinidos, estaríamos envolvidos em um processo infinito.

Euclides definiu linha como aquilo que tem comprimento sem largura e ponto como aquilo que não tem parte. Duas definições não muito úteis. Para entendê-las é necessário ter em mente uma linha e um ponto. Consideraremos alguns termos, chamados de primitivos ou elementares, sem precisar defini-los. São eles:

1. ponto;
2. reta;
3. pertencer a (dois pontos pertencem a uma única reta);
4. está entre (o ponto C está entre A e B);

O principal objeto de estudo da Geometria Euclidiana Plana é o plano.

$\boxed{\text{O } \textbf{plano} \text{ é constituído de pontos e retas.}}$

1.3.1 Axiomas de Incidência

Pontos e retas do plano satisfazem a cinco grupos de axiomas. O primeiro grupo é constituído pelos *axiomas de incidência.*

Axioma de Incidência 1: *Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.*

Axioma de Incidência 2: *Em toda reta existem pelo menos dois pontos distintos.*

Axioma de Incidência 3: *Existem três pontos distintos com a propriedade que nenhuma reta passa pelos três pontos.*

Figura 1.4:

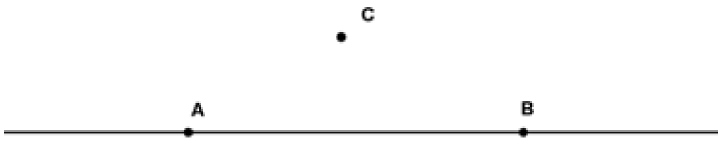

Figura 1.5:

Observação Destes três axiomas deduzimos alguns fatos simples, porém importantes:

- Toda reta possui pelo menos dois pontos.
- Não existe uma reta contendo todos os pontos.
- Existem pelo menos três pontos no plano.

Definição 1.1. Duas retas intersectam-se quando elas possuem um ponto em comum. Se elas não possuem nenhum ponto em comum, elas são ditas *paralelas*.

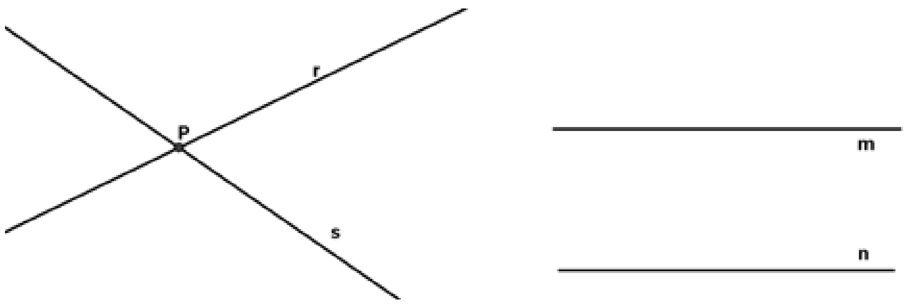

Figura 1.6: r e s se intersectam no ponto P e m e n são paralelas.

Proposição 1.1. *Duas retas distintas ou não intersectam-se ou intersectam-se em um único ponto.*

Demonstração Sejam m e n duas retas distintas. Se m e n possuem pelo menos dois pontos distintos em comum então, pelo Axioma de Incidência 1, m e n coincidem, que é uma contradição com o fato que m e n são retas distintas.
Logo, m e n ou possuem um ponto em comum ou nenhum. □

Portanto a Proposição 1.1 diz que se duas retas não são paralelas, então elas têm um ponto em comum.

Proposição 1.2. *Para todo ponto P, existem pelo menos duas retas distintas passando por P.*

Demonstração Pelo Axioma de Incidência 3, existe um ponto Q distinto de P. Pelo Axioma de Incidência 1 existe uma única reta l que passa por P e Q. Pelo Axioma de Incidência 3 existe um ponto R que não pertence a l. Novamente pelo Axioma de Incidência 1, existe uma reta r distinta de l que contém os pontos P e R. □

Proposição 1.3. *Para todo ponto P existe pelo menos uma reta l que não passa por P.*

Exercício 1.1. Prove a Proposição 1.3.

1.3.2 Modelos para a geometria de incidência

Um plano de incidência é um par $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ onde $\mathcal{P}$ é um conjunto de pontos e $\mathcal{R}$ é uma coleção de subconjuntos de $\mathcal{P}$, chamados de retas, satisfazendo os três axiomas de incidência.

Exemplo 1.1. Sejam $\mathcal{P} = \{A, B, C\}$ e $\mathcal{R} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}\}$. O par $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ é plano de incidência, já que satisfaz os três axiomas de incidência (Verifique!). Observe que dois subconjuntos quaisquer de $\mathcal{R}$ têm interseção vazia. Portanto, não existem retas paralelas.

Exemplo 1.2. Sejam $\mathcal{P} = \mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e $\mathcal{R}$ = conjunto de todos os grandes círculos em $\mathbb{S}^2$. Não é plano de incidência. Já que a interseção de dois grandes círculos em $\mathbb{S}^2$ são dois pontos. (ver figura 1.7.)

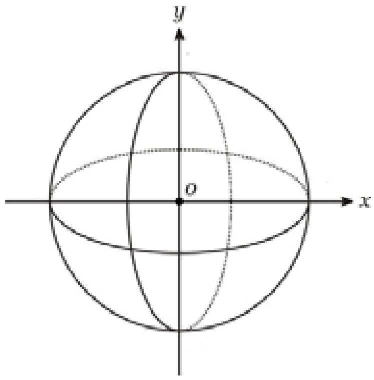

Figura 1.7: Esfera unitária no espaço euclidiano.

Exemplo 1.3. Sejam $\mathcal{P} = \{A, B, C, D, E\}$ e $\mathcal{R} = \{$todos os subconjuntos de $\mathcal{P}$ com dois elementos$\}$. É plano de incidência (Verifique!). Dada uma reta l e um ponto fora dela, existem pelo menos duas retas paralelas a l.

Exemplo 1.4. Sejam $\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}$ e $\mathcal{R} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}$. É plano de incidência (Verifique!). Dada uma reta l e um ponto P fora dela, existe uma única reta r paralela a l passando por P.

Nos exemplos acima, as retas são subconjuntos de $\mathcal{P}$ e não uma reta como nós a conhecemos.

1.4 Axiomas de ordem

Dissemos anteriormente que a noção de "está entre" é uma noção primitiva. Nesta seção iremos apresentar o segundo grupo de axiomas que rege as leis para esta noção, os *axiomas de ordem*.

Escreveremos $A * B * C$ para dizer que o ponto B está entre os pontos A e C.

Axioma de ordem 1: *Se $A * B * C$, então A, B e C são pontos distintos de uma mesma reta e $C * B * A$.*

Axioma de ordem 2: *Dados três pontos distintos de uma reta, um e apenas um deles está entre os outros dois.*

Figura 1.8:

Este axioma assegura que uma reta não é um círculo, onde não temos a noção bem clara de um ponto está entre outros dois. (Ver figura 1.9.)

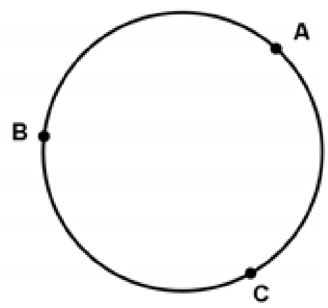

Figura 1.9:

Axioma de ordem 3: *Dados dois pontos distintos B e D, existem pontos A, C e E pertencentes à reta contendo B e D, tais que $A * B * D, B * C * D$ e $B * D * E$.*
Este axioma assegura que uma reta possui infinitos pontos.

Definição 1.2. Sejam dois pontos distintos A e B, o segmento AB é o conjunto de todos os pontos entre A e B mais os pontos

Figura 1.10:

extremos A e B.

Definição 1.3. A semi-reta com origem em A e contendo B é o conjunto dos pontos C tais que $A * B * C$ mais o segmento AB, sendo representada por S_{AB}.

Figura 1.11: À esquerda o segmento AB e à direita a semi-reta S_{AB}.

Proposição 1.4. *Para quaisquer dois pontos A e B tem-se:*

a) $S_{AB} \cup S_{BA} =$ *reta determinada por A e B.*

b) $S_{AB} \cap S_{BA} = AB$.

Demonstração

a) Seja m a reta determinada por A e B. Da definição de semi-reta, segue imediatamente que $S_{AB} \cup S_{BA} \subset m$. Se C pertence à reta m, então o Axioma de Ordem 2 implica somente uma das três alternativas:

1) $A * C * B$
2) $C * A * B$
3) $A * B * C$

No caso 1, C pertence ao segmento AB; no caso 2 C pertence à semi-reta S_{BA} e no caso 3, C pertence a $S_{AB.}$ Em qualquer caso, C pertence a $S_{AB} \cup S_{BA}$. Daí, $m \subset S_{AB} \cup S_{BA}$.

b) Deixamos a prova deste ítem como exercício.

□

Definição 1.4. Seja uma reta m. Dois pontos distintos fora de m, A e B, estão em um mesmo lado da reta m se o segmento AB não a intersecta, caso contrário dizemos que A e B estão em lados opostos de m. O conjunto dos pontos de m e dos pontos C tais que A e C estão em um mesmo lado da reta m é chamado de semi-plano determinado por m contendo A e será representado por $P_{m,A}$.

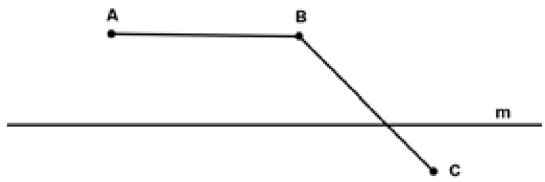

Figura 1.12: A e B estão no mesmo lado de m. B e C estão em lado opostos de m.

Axioma de ordem 4: *Para toda reta l e para qualquer três pontos A, B e C fora de l, tem-se:*

i) Se A e B estão no mesmo lado de l e B e C estão no mesmo lado de l, então A e C estão no mesmo lado de l.

ii) Se A e B estão em lados opostos de l e B e C estão em lados opostos de l, então A e C estão no mesmo lado de l.

Corolário 1.1. *Se A e B estão no mesmo lado de l e B e C estão em lados opostos de l, então A e C estão em lados opostos de l.*

Ver figura 1.12.

Exercício 1.2. Prove o Corolário 1.1.

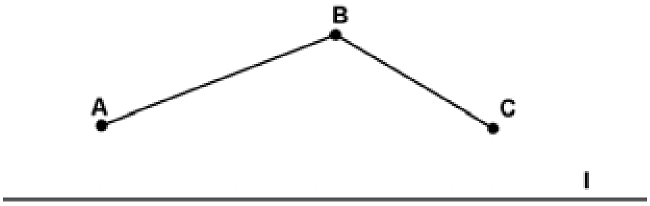

Figura 1.13:

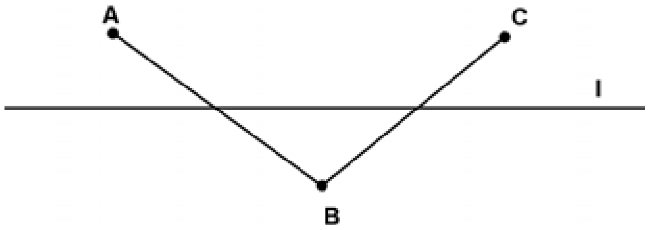

Figura 1.14:

Proposição 1.5. *Toda reta m determina exatamente dois semi-planos distintos cuja interseção é a reta m.*

Demonstração

Passo 1: Existe um ponto A fora de l (Proposição 1.3).

Passo 2: Existe um ponto O pertencente a l (Axioma de incidência 2).

Passo 3: Existe um ponto B tal que $B * O * A$ (Axioma de ordem 3).

Passo 4: Então A e B estão em lados opostos de l, e l possui pelo menos dois lados.

Passo 5: Seja C um ponto fora de l diferente de A e B. Se C e B não estão no mesmo lado de l, então A e C estão no mesmo lado de l (Axioma de ordem 4). Logo, o conjunto dos pontos fora de l é a união dos semi-planos S_{mA} e S_{mB}

Passo 6: Se $C \in S_{mA} \cap S_{mB}$ com $C \notin m$, então A e B estão do mesmo lado (Axioma de ordem 4); contradição com o passo 4. Assim, se $C \in S_{mA} \cap S_{mB}$, então $C \in m$. Portanto, $S_{mA} \cap S_{mB} = m$.

□

Teorema 1.1 (Pasch). *Se A, B, C sã pontos distintos não colineares e m é qualquer reta intersectando AB em um ponto entre A e B, então l também intersecta AC ou BC. Se C não está em m então m não intersecta ambos AC e BC.*

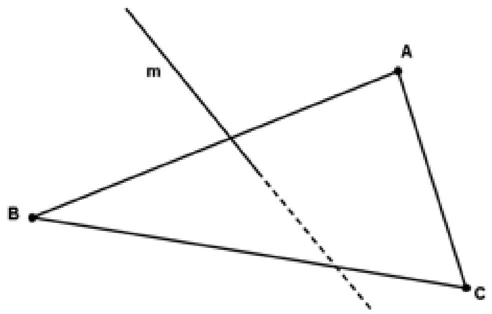

Figura 1.15: Teorema de Pasch

Euclides utilizou este teorema sem prová-lo.

Exercício 1.3. Prove o Teorema de Pasch.

RESUMO

Nesta aula você conheceu os 5 postulados de Euclides. Você viu que na prova da Proposição 1 dos Elementos de Euclides, ele fez uso de afirmações que não estavam explícitas em seus 5 postulados. Você viu também que o Postulado 5 dos Elementos nada mais é do que a recíproca da Proposição 28, o que gerou dúvida entre muitos matemáticos da época se o Postulado 5 era mesmo um postulado ou uma proposição que Euclides não sabia prová-la. Além disso, você viu os dois primeiros grupos de axiomas, de incidência e ordem, que permitirá tapar os "buracos" deixados por Euclides nos Elementos. Finalmente, você também viu o Teorema de Pasch que é uma consequência dos axiomas de ordem.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula daremos continuidade a construção da geometria plana axiomatizada. Introduziremos mais dois grupos de axiomas, os axiomas de medição de segmentos e de ângulos.

ATIVIDADES

1. Quais das afirmações abaixo são verdadeiras?

   ( ) Por definição, uma reta m é "paralela"a uma reta l se para quaisquer dois pontos P e Q em m, a distância perpendicular de P a l é a mesma distância perpendicular de Q a l.

   ( ) Foi desnecessário para Euclides assumir o postulado das paralelas porque o Francês Legendre o provou.

( ) “Axioma” ou “postulados” são afirmações que são assumidas, sem justificativas, enquanto que “teoremas” ou “proposições” são provadas usando os axiomas.

( ) $A * B * C$ é logicamente equivalente a $C * B * A$.

( ) Se A, B e C são pontos colineares distintos, é possível que ambos $A * B * C$ e $A * C * B$ ocorram.

2. Sejam dois pontos A e B e um terceiro ponto C entre eles. É possível provar que C pertecente a reta que passa por A e B utilizando somente os 5 postulados de Euclides?

3. É possível provar a partir dos 5 postulados de Euclides que para toda reta l existe um ponto pertencente a l e um ponto que não pertence a l?

4. É possível provar a partir dos 5 postulados de Euclides que pontos e retas existem?

5. Para cada par de axiomas de incidência construa um modelo no qual estes dois axiomas são satisfeitos mas o terceiro axioma não. (Isto mostra que os três axiomas são *independentes*, no sentido qeu é impossível provar qualquer um deles dos outros dois.)

6. Verifique se são planos de incidência os pares $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ seguintes:

   (a) $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; ax + by + c = 0,\ \text{com } ab \neq 0\}$.

   (b) $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{R} =$ conjunto dos círculos em $\mathbb{R}^2$.

   (c) $\mathcal{P} =$ conjunto das retas em $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{R} =$ conjunto dos planos em $\mathbb{R}^3$.

7. Construa exemplos distintos de plano de incidência com o mesmo número de pontos, ou seja, o conjunto $\mathcal{P}$ será o mesmo porém $\mathcal{R}$ será diferente.

8. Mostre que não existe um exemplo de um plano de incidência com 6 pontos, em que todas as retas tenham exatamente 3 pontos.

9. Quantos pontos comuns a pelo menos duas retas pode ter um conjunto de 3 retas no plano? E um conjunto de 4 retas do plano? E um conjunto de n retas do plano?

10. Dizemos quem três ou mais pontos são *colineares* quando todos pertencem a uma mesma reta. Do contrário, dizemos que eles são *não colineares*. Mostre que três pontos não colineares determinam três retas. Quantas retas são determinadas por quatro pontos sendo que quaisquer três deles são não colineares? E se forem 6 pontos? E se forem n pontos?

11. Prove que a união de todas as retas que passam por um ponto A é o plano.

12. Dados $A * B * C$ e $A * C * D$, prove que A, B, C e D são quatro pontos colineares distintos.

13. Dado $A * B * C$. Prove que $S_{AB} = S_{AC}$.

LEITURA COMPLEMENTAR

1. BARBOSA, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana.* SBM.

2. EUCLIDES, *Os Elementos.* Unesp. Tradução: Irineu Bicudo.

3. GREENBERG, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History.* Third Edition. W. H. Freeman.

4. POGORELOV, A. V., *Geometria Elemental.* MIR.

5. MOISE, E. E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint.* Third edition. Addison-Wesley.

AULA

Axiomas de Medição

2

META

Introduzir os axiomas de medição de segmentos e ângulos.

OBJETIVOS

Determinar o comprimento de um segmento e a distância entre dois pontos.

Determinar a medida de um ângulo

Determinar propriedades de pontos de uma reta utilizando as coordenadas do ponto.

PRÉ-REQUISITOS

Para seguir adiante, é necessário que o aluno tenha compreendido os axiomas de incidência e de ordem apresentados na aula anterior.