AULA 2

Axiomas de Medição

META

Introduzir os axiomas de medição de segmentos e ângulos.

OBJETIVOS

Determinar o comprimento de um segmento e a distância entre dois pontos.

Determinar a medida de um ângulo

Determinar propriedades de pontos de uma reta utilizando as coordenadas do ponto.

PRÉ-REQUISITOS

Para seguir adiante, é necessário que o aluno tenha compreendido os axiomas de incidência e de ordem apresentados na aula anterior.

2.1 Introdução

Olá, caro aluno. Espero que tenha gostado da nossa primeira aula. Nela apresentamos os cinco postulados de Euclides, bem como a primeira proposição dos Elementos para ilustrar a necessidade de modificação de seus axiomas para obter uma geometria sólida e consistente, com toda afirmação devidamente justificada. Vimos também os axiomas de incidência e ordem.

Note que, com apenas o conjunto de axiomas apresentados na primeira aula, ainda não temos a geometria euclidiana plana que conhecemos. O que estamos fazendo é introduzindo as regras (axiomas) a serem seguidas pelos objetos de estudo da geometria plana: plano, reta e ponto.

O próximo passo é aprender a medir o comprimento de um segmento. Para este fim emprega-se diversos instrumentos de medição, dos quais a régua graduada é um dos mais conhecidos. Aprendemos com a experiência que para medir o comprimento de um segmento AB com uma régua graduada, basta colocar a régua graduada sobre o segmento AB, verificar a quais números correspondem o ponto A e o ponto B e então o módulo da diferença será o comprimento do segmento AB. Aprendemos também que se um ponto C está entre A e B, então o comprimento de AB é a soma dos comprimentos dos segmentos AC e CB.

Veremos nesta aula como introduzir estas noções axiomaticamente.

2.2 Axiomas de Medição de Segmentos

A maneira como procedemos para medir segmentos é regida pelos seguintes axiomas:

Axioma de medição 1: *A todo segmento corresponde um número maior ou igual a zero. Este número é zero se e somente se as extremidades coincidem.*

Está implícito no enunciado do axioma, a escolha de uma unidade de medida que será fixada ao longo de nosso curso. O número a que se refere o axioma é denominado de comprimento do segmento ou distância entre os pontos que define o segmento.

Axioma de medição 2: *Os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que o módulo da diferença entre estes números meça a distância entre os pontos correspondentes.*

Fixada uma correspondência, o número que corresponde a um ponto da reta é denominado *coordenada* daquele ponto. Portanto, se a e b são as coordenadas dos pontos A e B, respectivamente, então o comprimento do segmento AB, denotado por $\overline{AB}$, é igual a $\overline{AB} = |a - b|$.

Axioma de medição 3: *Se* $A * C * B$, *então*

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}.$$

É importante observar aqui que o axioma não diz que se $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$ então $A * C * B$. O que você acha? É verdadeira essa afirmação?
O Axioma de Medição 2 diz apenas que existe uma bijeção entre os pontos de uma reta e os números reais, porém não fixa nenhuma restrição para a bijeção. O Axioma de Medição 3, garante que a bijeção não será arbitrária, ela tem que satisfazer a uma certa ordem. É isto que diz a próxima proposição.

Proposição 2.6. *Se em uma semi-reta* S_{AB} *considerarmos um segmento* AC *com* $\overline{AC} < \overline{AB}$, *então* $A * C * B$.

Demonstração Sabemos que, pelo Axioma de Ordem 2, só pode ocorrer uma das seguintes possibilidades: $B * A * C$, $A * B * C$ ou $A * C * B$.

Vamos mostrar que não pode ocorrer a primeira nem a segunda possibilidade.
Como A é a origem da semi-reta S_{AB}, então não é verdade que $B * A * C$, caso contrário teríamos C não pertenceria a esta semi-reta. Se $A * B * C$, então, pelo Axioma de Medição 3 teríamos $\overline{AB}+\overline{BC} = \overline{AC}$, implicando que $\overline{AB} < \overline{AC}$, que é uma contradição com a hipótese $\overline{AC} < \overline{AB}$.
Logo, só pode ocorrer $A * C * B$. $\square$

Teorema 2.1. *Sejam A, B e C pontos distintos de uma reta cujas coordenadas são, respectivamente, a, b e c. Então $A * C * B$ se e somente se o número c está entre a e b.*

Demonstração Suponha $A * C * B$. Pelo Axioma de Medição 3 e pela definição de comprimento, tem-se que

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB},$$

implicando que

$$|c - a| + |b - c| = |a - b|.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $a < b$. Assim, obtemos que

$$|c - a| < b - a \ \text{ e } \ |b - c| < b - a.$$

Isto implica que

$$c - a < b - a \ \text{ e } \ b - c < b - a.$$

Logo, $a < c < b$.
Suponha agora que $a < c < b$. Então

$$b - a = b - c + c - a,$$

ou seja,

$$|b - a| = |b - c| + |c - a|.$$

Segue daí que $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$ e então $\overline{AC} < \overline{AB}$ e $\overline{CB} < \overline{AB}$. Se A, B e C pertencem à mesma semi-reta determinada por A, segue da Proposição 2.6 que $A * C * B$. Caso B e C pertençam a semi-retas distintas, então $B * A * C$. Neste caso,

$$\overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BC} \Rightarrow \overline{BA} < \overline{AC},$$

o que está em contradição com a igualdade obtida anteriormente.

□

Definição 2.1. O *ponto médio* C de um segmento AB é um ponto deste segmento tal que $\overline{AC} = \overline{CB}$.

Teorema 2.2. *Um segmento tem exatamente um ponto médio.*

Demonstração Sejam a e b as coordenadas dos extremos de um segmento AB. Pelo Axioma de Medição 2, existe um ponto C, na reta que contém A e B, com coordenada $c = \frac{a+b}{2}$.
Afirmação 1: O ponto C é o ponto médio de AB.
De fato, verifica-se que

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= |a - c| = \left|\tfrac{a}{2} - \tfrac{b}{2}\right| \\ \overline{CB} &= |c - b| = \left|\tfrac{a}{2} - \tfrac{b}{2}\right|, \end{aligned}$$

e como c está entre a e b, usando o Teorema 2.1, obtemos que C é o ponto médio de AB.
Afirmação 2: O ponto C é o único ponto médio de AB.
Se D é ponto médio de AB, então $\overline{AD} = \overline{DB}$. Se a, b e d são coordenadas dos pontos A, B e D, respectivamente, então

$$|a - d| = |d - b|.$$

Daí, obtemos $d = \frac{a+b}{2}$. (Por quê?) Assim, $c = d$ e pelo Axioma de Medição 2, segue que $D = C$. □

Definição 2.2. Seja A um ponto e r um número real positivo. O círculo de centro A e raio r é o conjunto constituído por todos os pontos B do plano tais que $\overline{AB} = r$.

Segue do Axioma de Medição 2 o Terceiro Postulado de Euclides: Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.

O conjunto dos pontos C que satisfazem a desigualdade $\overline{AC} < r$ é chamada de *disco* de raio r e centro A. Um ponto C está fora do circulo se $\overline{AC} > r$ e dentro se $\overline{AC} < r$.

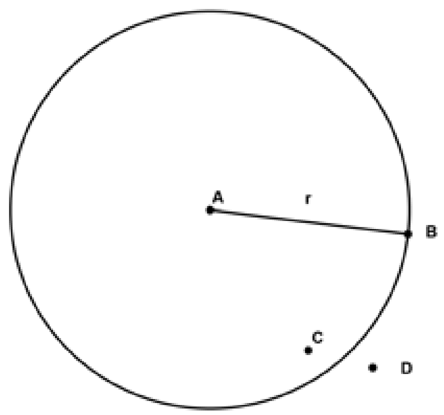

Figura 2.1: Círculo de centro A e raio $\overline{AB} = r$. C está dentro do disco e D está fora do disco.

2.3 Axiomas de Medição de Ângulos

Definição 2.3. Um *ângulo* com vértice A é um ponto A com duas semi-retas S_{AB} e S_{AC}, chamadas os *lados* do ângulo.

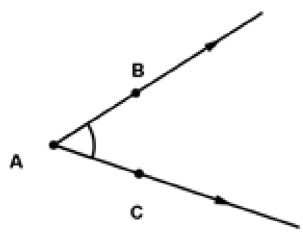

Figura 2.2: Ângulo com vértice A.

Notação: $\hat{A}, B\hat{A}C$ ou $C\hat{A}B$.

Usaremos a notação $\hat{A}$ quando não houver dúvida a que ângulo estaremos nos referindo.
Se dois ângulos $B\hat{A}D$ e $C\hat{A}D$ possuem um lado S_{AD} em comum e os outros dois lados S_{AB} e S_{AC} são semi-retas distintas de uma mesma reta, os ângulos são ditos *suplementares*.

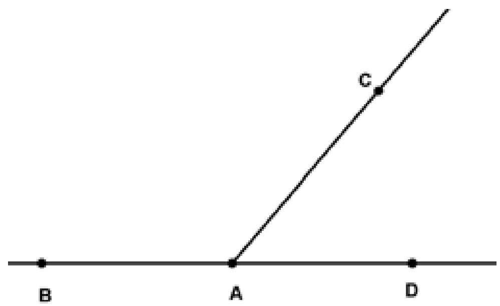

Figura 2.3: Os ângulos $B\hat{A}C$ e $C\hat{A}D$ são suplementares.

Um ângulo é dito *raso* se os lados são semi-retas distintas de uma mesma reta. Dois ângulos sumplementares formam um ângulo raso.

Figura 2.4: O ângulos $B\hat{A}C$ é raso.

Introduzimos o conceito de ângulo sem a necessidade de falar em medida de ângulo, "graus", por exemplo. A maneira de introduzir medidas aos ângulos é através dos próximos axiomas.

Axioma de Medição 4: *A todo ângulo corresponde um único número real maior ou igual a zero. Este número é zero se e somente se os lados do ângulo coincidem.*

Uma semi-reta divide um semi-plano se ela pertence ao semi-plano e sua origem pertence à reta que o determina.

Axioma de Medição 5: *Existe uma bijeção entre as semi-retas de mesma origem que dividem um dado semi-plano e os números entre zero e* 180, *de modo que a diferença entre os números é a medida do ângulo formado pelas semi-retas correspondentes.*

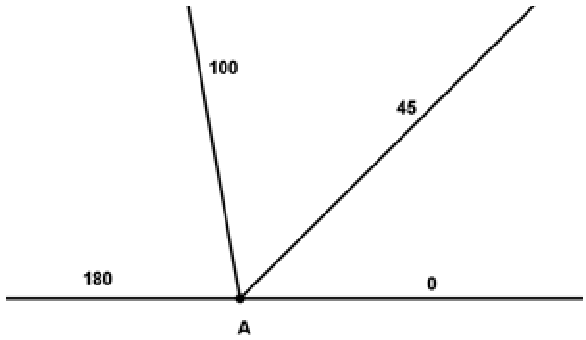

Figura 2.5:

A medida de um ângulo $A\hat{O}B$ será denotada pelo próprio ângulo. Assim, $A\hat{O}B$ poderá indicar o ângulo ou a medida deste ângulo, mas sempre estará claro no contexto se estaremos nos referindo ao ângulo ou a sua medida.
Observe que o ângulo raso mede 180° graus.

Definição 2.4. Uma semi-reta S_{OC} divide o ângulo $A\hat{O}B$ se o segmento AB intercecta S_{OC}. Se uma semi-reta S_{OC} divide o ângulo $A\hat{O}B$ de tal modo que $A\hat{O}C = C\hat{O}B$, dizemos que S_{OC} é a *bissetriz* do ângulo $A\hat{O}B$.

Axioma de Medição 6: *Se uma semi-reta S_{OC} divide um ângulo $A\hat{O}B$, então*

$$A\hat{O}B = A\hat{O}C + C\hat{O}B.$$

Definição 2.5. Dois ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são ditos opostos pelo vértice se os pares de lados (S_{OA}, S_{OD}) e (S_{OB}, S_{OC}) são semi-retas distintas de uma mesma reta. Note que ângulos opostos pelo

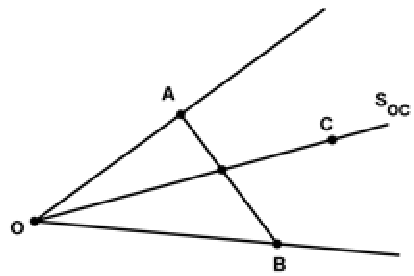

Figura 2.6: S_{OC} divide o ângulo $A\hat{O}B$.

vértice têm o mesmo suplemento. Portanto, ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida.

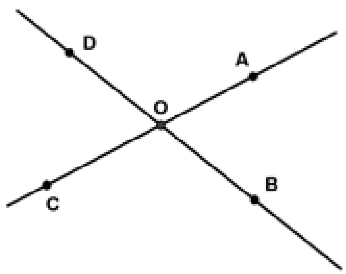

Figura 2.7: $C\hat{O}D$ e $A\hat{O}B$ são opostos pelo vértice.

Definição 2.6. Um ângulo cuja medida é 90° é chamado *ângulo reto*. Se duas retas se intersectam formando um ângulo reto, dizemos que as retas são *perpendiculares*. Se a soma das medidas de dois ângulos é 90°, dizemos que os ângulos são *complementares*.

Teorema 2.3. *Por qualquer ponto de uma reta passa uma única perpendicular a esta reta.*

Demonstração A existência é garantida pelo Axioma de Medição 5. (Por quê?)
Suponha então que existam duas perpendiculares r e r' a uma reta m passando pelo ponto A. Assim, r e r' formam um ângulo α em

um dos semi-planos determinados por m. Mas como r e r' formam ângulos retos com m, segue que $\alpha = 0$. (ver figura) Logo, r e r' coincidem. $\square$

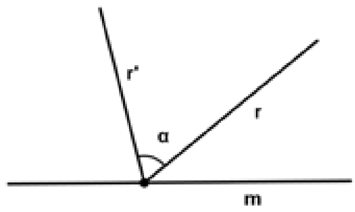

Figura 2.8:

Definição 2.7. Um ângulo é *agudo* se mede menos de $90°$ e é *obtuso* se mede mais de $90°$.
A medida de ângulos que usaremos neste curso será o grau, uma invenção dos babilônios que data da época antes de Cristo e que entraram para a história da ciência matemática como uma contribuição importante que utilizamos até hoje.

RESUMO

Nesta aula aprendemos a medir segmentos e ângulos. Além disso, vimos a utilidade do uso de coordenadas dos pontos de uma reta para resolver problemas. Vimos também que os axiomas de medição nos permite ordenar os pontos de uma reta de acordo com a ordenação dos números reais, bastando para isso colocar os pontos da reta em correspondência biunívoca com os números reais de forma que esta correspondência obedeça aos axiomas de medição. Mostramos também que todo segmento de reta possui um único ponto médio. Introduzimos para cada ângulo uma medida entre zero e 180.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula iremos começar nosso estudo de congruência de triângulos. Definiremos congruência de segmentos e de triângulos. Em seguida, daremos as condições para que dois triângulos sejam congruentes.

ATIVIDADES

1. São dados três pontos A, B e C com B entre A e C. Sejam M e N os pontos médios de AB e BC respectivamente. Mostre que $\overline{MN} = (\overline{AB} + \overline{BC})/2$.

2. São dados três pontos A, B e C com C entre A e B. Sejam M e N os pontos médios de AB e BC respectivamente. Mostre que $\overline{MN} = (\overline{AB} - \overline{BC})/2$.

3. São dados pontos A, B, C e D colineares com coordenadas x, y, z e w tais que $x < y < z < w$. Prove que $AC = BD$ se e só se $AB = CD$.

4. Existem pontos A, B e C tais que $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 3$ e $\overline{AC} = 1$?

5. Sejam M, A e B pontos distintos situados sobre uma mesma reta. Se $a = \overline{MA}/\overline{MB}$ diz-se que M divide AB na razão a.

   (a) Dado qualquer número real positivo a mostre que existe um único ponto $M \in AB$ tal que M divide AB na razão a.

   (b) Dado qualquer número real positivo $a \neq 1$, mostre que existe um único ponto M na reta determinada por A e B, que não pertence a AB e que divide AB na razão a. Porque o caso $a = 1$ teve que ser excluído?

6. Sejam M, N, A e B pontos distintos sobre uma mesma reta, sendo que $M \in AB$ e que $N \notin AB$. Suponha que

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = a.$$

   Neste caso, dizemos que M e N dividem harmonicamente o seguimento AB.

   (a) Quando $a > 1$, determine as posições relativas dos quatro pontos.

   (b) Faça o mesmo para o caso em que $0 < a < 1$.

   (c) Mostre que
$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AM}} \pm \frac{1}{\overline{AN}}.$$

   (d) Se O é o ponto médio de AB. Mostre que

$$\overline{OA}^2 = \overline{OM} \cdot \overline{ON}.$$

7. Qual a medida da diferença entre o suplemento de um ângulo e seu complemento.

8. (a) Qual o ângulo formado entre o ponteiro dos minutos e das horas quando são 12 horas e 30 minutos?

(b) Exatamente às 12 horas um ponteiro estará sobre o outro. A que horas voltará a ocorrer que os dois ponteiros formem um ângulo de 0^o.

9. Um polígono é uma figura formada por uma sequência de pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e pelos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ e satisfazendo as condições

   (a) $A_n = A_1$;

   (b) os lados da poligonal se intercectam somente em suas extremidades;

   (c) cada vértice é extremidade de dois lados;

   (d) dois lados com mesma extremidade não pertecem a uma mesma reta.

   O segmento ligando vértices não consecutivos de um polígono é chamado uma diagonal do polígono. Faça o desenho de um polígono de seis lados. Em seguida desenhe todas as suas diagonais. Quantas diagonais terá um polígono de 20 lados? E de n lados?

10. São dados quatro pontos A, B, C e D. É também sabido que $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$ e $2\overline{AC}$ são iguais. O que você pode afirmar sobre a posição relativa dos quatro pontos?

11. Mostre que as bissetrizes de um ângulo e do seu suplemento são perpendiculares.

12. Sejam m e n duas retas. Mostre que se m está contida em um dos semi-planos determinados por n então ou $m = n$ ou m e n não se intersectam.

13. Ao longo de meia hora o ponteiro dos minutos de um relógio descreve um ângulo raso (ou seja, o ângulo entre sua posição inicial e sua posição final é um ângulo raso). Quanto tempo ele leva para descrever um ângulo de $60°$ graus?

14. De quantos graus move-se o ponteiro dos minutos enquanto o ponteiro das horas percorre um ângulo raso?

LEITURA COMPLEMENTAR

1. BARBOSA, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana.* SBM.
2. EUCLIDES, *Os Elementos.* Unesp. Tradução: Irineu Bicudo.
3. GREENBERG, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History.* Third Edition. W. H. Freeman.
4. POGORELOV, A. V., *Geometria Elemental.* MIR.
5. MOISE, E. E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint.* Third edition. Addison-Wesley.