AULA
Congruência
3

META

Introduzir e explorar o conceito de congruência de segmentos e de triângulos.

OBJETIVOS

Identificar segmentos e ângulos congruentes.
Identificar os casos de congruência de triângulos.
Usar os casos de congruência de triângulos para resolver problemas.

PRÉ-REQUISITOS

O aluno deve ter compreendido os axiomas de medição de segmentos e de ângulo.

3.1 Introdução

A idéia intuitiva de congruência é que duas figuras são congruentes se elas podem ser movidas sem alterar o tamanho e a forma, de tal maneira que coincidam. Assim, dois triângulos equiláteros de mesmo tamanho são congruentes, dois círculos de mesmo raio também são congruentes, e assim por diante. Da mesma forma, dois segmentos de mesmo comprimento são congruentes.
Nesta aula daremos a definição formal de congruência, começando com segmentos e depois triângulos.

3.2 Congruência de Segmentos

Definição 3.1. Sejam AB e CD segmentos. Se $\overline{AB} = \overline{CD}$, então os segmentos são chamados *congruentes*, e escrevemos $AB = CD$.

Uma relação $\sim$, definida em um conjunto A, é chamada uma relação de *equivalência* se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $a \sim a, \forall a \in A$ (reflexiva).

2. $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ (simetria).

3. $a \sim b$ e $b \sim c \Rightarrow a \sim c$ (trasitiva).

Teorema 3.1. *São válidas as seguintes propriedades:*

a) $AB = AB$ *(reflexiva).*

b) $AB = CD \Rightarrow CD = AB$ *(simétrica).*

c) $AB = CD$ *e* $CD = EF$ *então* $AB = EF$ *(transitiva).*

Devido a este teorema, a relação de congruência é uma relação de *equivalência.*

3.3 Congruência de Triângulos

Exatamente como definimos congruência para segmentos em termos de comprimento, definimos congruência entre ângulos em termos de medida. Isto é, se dois ângulos $A\hat{B}C$ e $D\hat{E}F$ possuem a mesma medida, então diremos que os ângulos são congruentes, e indicaremos por

$$A\hat{B}C = D\hat{E}F.$$

Da mesma forma que a relação de congruência para segmentos é uma relação de equivalância, a relação de congruência para ângulos também é uma relação de equivalência.

Note que se dois ângulos suplementares são congruentes, então cada um deles é um ângulo reto. Além disso, temos também que dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes, já que possuem o mesmo suplemento.

Definição 3.2. Dois triângulos ABC e DEF são congruentes se existir uma correspondência biunívoca entre seus vértices tal que os lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

Indicaremos por $ABC = DEF$ para dizer que os dois triângulos são congruentes e a correspondência é dada por

$$\begin{aligned} A &\leftrightarrow D, \\ B &\leftrightarrow E, \\ C &\leftrightarrow F. \end{aligned}$$

Neste caso, teremos seis congruências induzidas sobre os lados e os ângulos.

$$\begin{aligned} AB &= DE, \\ BC &= EF, \\ CA &= FD, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \hat{D}, \\ \hat{B} &= \hat{E}, \\ \hat{C} &= \hat{F}. \end{aligned}$$

De fato, para que dois triângulos sejam congruentes é necessário que as seis congruências acima sejam satisfeitas. Porém, se queremos verificar se dois triângulos são congruentes será necessário verificar somente algumas delas.
Isto é o que diz o próximo axioma, conhecido também como o *primeiro caso de congruência de triângulos.*

Axioma de Congruência 1 *Sejam ABC e DEF dois triângulos. Se $AB = DE, AC = DF$ e $\hat{A} = \hat{D}$, então $ABC = DEF$.*

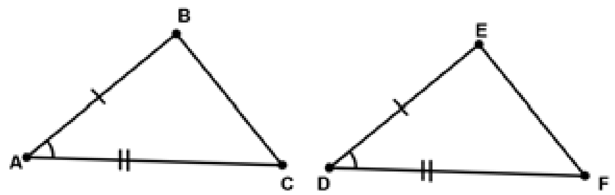

Figura 3.1:

Este axioma é também conhecido como o caso LAL (lado, ângulo, lado) de congruência de triângulos.

Definição 3.3. Um triângulo é dito *isósceles* se possui dois lados conguentes. Estes lados são chamados de *laterais* e o terceiro de *base.* Os ângulos opostos as laterais são chamados de *ângulos da base.*

Proposição 3.7. *Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.*

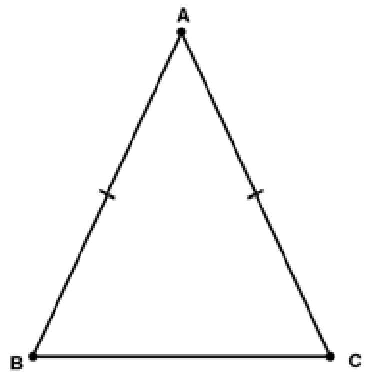

Figura 3.2: ABC é um triângulo isósceles com base $AB = AC$.

Demonstração Considere a correspondência entre os vértices de um triângulo isósceles ABC :

$$\begin{array}{ccc} A & \leftrightarrow & A \\ B & \leftrightarrow & C \\ D & \leftrightarrow & B \end{array}$$

Por hipótese, segue que $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{AC} = \overline{AB}$ e $\hat{A} = \hat{A}$. Pelo Axioma de Congruência 1, segue que $ABC = ACB$. Isto implica que $\hat{B} = \hat{C}$. □

Observe que a prova anterior mostra que o triângulo ABC é congruente ao triângulo ACB. Caso você tenha dificuldades em acompanhar a prova, você pode desenhar duas cópias do triângulo e repetir a prova para estes dois triângulos. A prova de Euclides para este resultado aparece no início dos Elementos e é longa. A prova acima é devida, essencialmente, ao grande geômetra grego Pappus de Alexandria (350 d.C.), embora ele não tenha usado a formulação do Axioma de Congruência 1 que utilizamos aqui.

Corolário 3.1. *Todo triângulo equilátero possui os três ângulos congruentes.*

Exercício 3.1. Prove o Corolário 3.1.

Teorema 3.2 (Caso ALA). *Dados dois triângulos ABC e DEF com $AB = DE, \hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$, então $ABC = DEF$.*

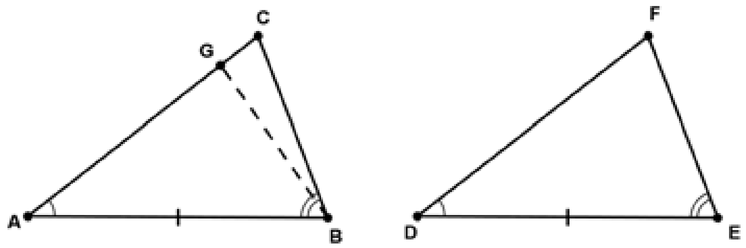

Figura 3.3: ABC é um triângulo isósceles com base $AB = AC$.

Demonstração Sabemos que existe um ponto G na semi-reta S_{AC} tal que $AG = DF$. (ver figura 3.3) Por construção, temos que os triângulos ABG e DEF satisfazem $AG = DF, AB = DE$ e $\hat{A} = \hat{D}$. Pelo Axioma de Congruência 1, obtemos que $ABG = DEF$. Pela definição de congruência de triângulos, segue que $A\hat{B}G = \hat{E} = A\hat{B}C$. Logo, as semi-retas S_{BG} e S_{BC} coincidem. Isto implica que G coincide com o ponto C. Então $ABC = ABG = DEF$. $\square$

Observe que o ponto G na figura acima poderia ser tal que $A*C*G$ e mesmo assim obteríamos o mesmo resultado.
Este teorema é também conhecido como o 2° Caso de Congruência de Triângulos ou o caso ALA (ângulo, lado, ângulo) de congruência de triângulos.

Corolário 3.2. *Se dois ângulos de um triângulo são congruentes, então o triângulo é isósceles.*

Este corolário é a recíproca da Proposição 3.7. Tente demonstrá-lo de forma análoga, porém será necessário usar o caso ALA de congruência de triângulos. De fato, os lados congruentes serão opostos aos ângulos congruentes.

Corolário 3.3. *Todo triângulo que possui todos os ângulos congruentes é equilátero.*

Definição 3.4. Seja ABC um triângulo e D um ponto da reta que contém B e C.

i) O segmento AD é a *mediana* do triângulo ABC relativamente ao lado BC, se D for o ponto médio de BC.

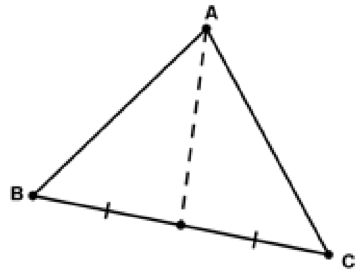

Figura 3.4: Mediana

ii) O segmento AD é a *bissetriz* do ângulo $\hat{A}$ se a semi-reta S_{AD} divide o ângulo $C\hat{A}B$ em dois ângulos congruentes.

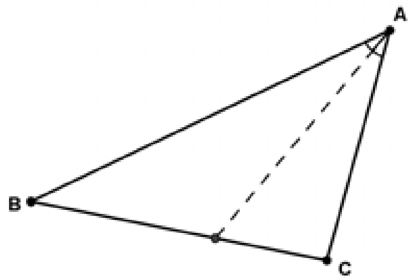

Figura 3.5: Bissetriz

iii) O segmento AD é a *altura* do triângulo ABC relativamente ao lado BC, se AD é perpendicular à reta que contém B e C.

Proposição 3.8. *Em um triângulo isósceles a mediana relativamente à base é também a bissetriz e altura.*

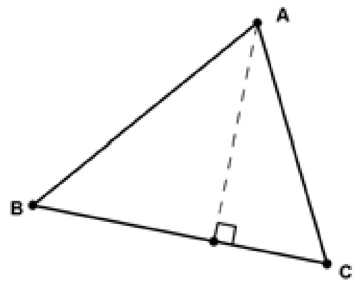

Figura 3.6: Altura

Demonstração Seja ABC um triângulo com $AB = AC$. Seja AD a mediana relativamente à base BC. Considere os triângulos ABD e ACD. Como D é o ponto médio de BC, então $BD = CD$. Além disso, ABC é um triângulo isósceles, o que implica que $AB = AC$ e $\hat{B} = \hat{C}$. Logo, os triângulos ABD e ACD são tais que $AB = AC, BD = CD$ e $A\hat{B}D = A\hat{C}D$. Pelo caso LAL de congruência de triângulos, segue que $ABD = ACD$. Em particular, $B\hat{A}D = C\hat{A}D$, o que implica que AD é a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$. Além disso, temos $A\hat{D}B = A\hat{D}C$, e como estes ângulos são suplementares, segue que $A\hat{D}B = A\hat{D}C = 90°$. □

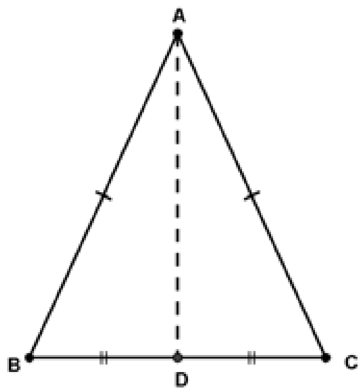

Figura 3.7:

Teorema 3.3 (Caso LLL)**.** *Se dois triângulos têm três lados cor-*

respondentes congruentes então os triângulos são congruentes.

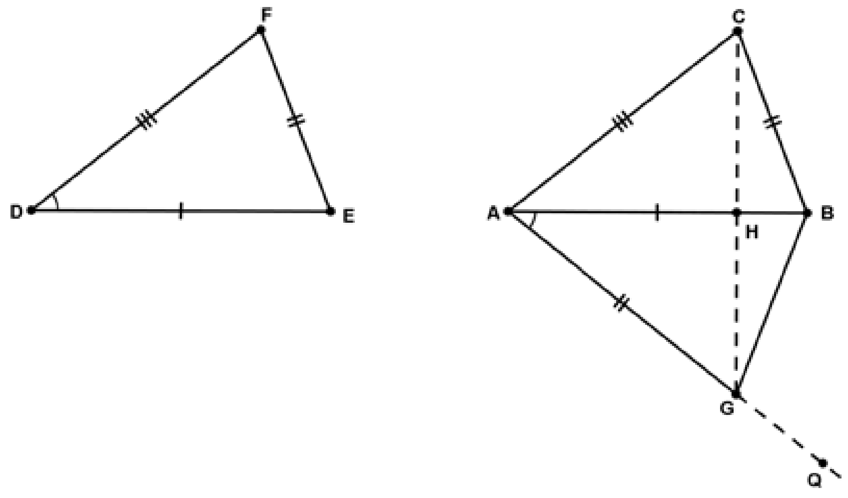

Figura 3.8: Altura

Demonstração Sejam ABC e DEF triângulos tais que $AB = DE, BC = EF$ e $AC = DF$. A idéia da prova é construir um triângulo AGC, com o ponto G no lado oposto da reta que contém DB, tal que $AGC = DEF$. Então mostraremos que $ABC = AGC$.

- Passo 1: Pelo Axioma de Medição de Ângulo 2, existe uma semi-reta S_{AQ} no semi-plano oposto ao que contém C, tal que $B\hat{A}Q = \hat{D}$.

- Passo 2: Na semi-reta S_{AQ} tome um ponto G tal que $AG = DF$.

- Passo 3: Pelo 1° caso de congruência de triângulos, segue que $AGB = DEF$.

- Passo 4: O segmento CG intercepta AB no ponto H, pois estão em lados opostos.

- Passo 5: Note que $AG = DF = AC$. Assim, o triângulo ACG é isósceles e então $A\hat{G}C = A\hat{C}G$.

- Passo 6: Da mesma forma, concluímos que o triângulo BCG é isósceles com $B\hat{C}G = B\hat{G}C$.

- Passo 7: Porém,

$$\begin{aligned} A\hat{G}B &= A\hat{G}C + C\hat{G}B \\ &= A\hat{C}G + G\hat{C}B \\ &= A\hat{C}B. \end{aligned}$$

Portanto, podemos aplicar o Axioma de Congruência 1 para concluir que $ACB = AGB$. Mas como $AGB = DFE$, segue que $ABC = DEF$. $\square$

Este teorema é conhecido como o 3° Caso de Congruência de Triângulo, ou caso LLL (lado, lado, lado) de congruência de triângulos.

RESUMO

Caro aluno, definimos congruência de segmentos, de ângulos e de triângulos. Introduzimos o Axioma de Congruência, conhecido também como o 1° caso de congruência de triângulo, que nos permitiu obter todos os outros casos de congruência de triângulos.

PRÓXIMA AULA

Na próxma aula continuaremos nosso estudo axiomático da geometria, com o estudo de propriedades geométricas de retas e triângulos sem o postulado das paralelas.

ATIVIDADES

1. Em um triângulo ABC a altura do vértice A é perpendicular ao lado BC e o divide em dois segmentos congruentes. Mostre que $AB = AC$.

2. Mostre que os pontos médios de um triângulo isósceles formam um triângulo também isósceles.

3. Sejam dois triângulos ABC e ABD tais que $AC = AD$. Se AB é a bissetriz do ângulo $C\hat{A}D$, então AB é perpendicular a CD.

4. Considere um círculo de raio R centrado em um ponto O. Sejam A e B pontos do círculo. Mostre que o raio que passa pelo ponto médio do segmento AB é perpendicular a este segmento. Inversamente, mostre que, se o raio é perpendicular ao segmento então o cortaria no seu ponto médio.

5. Dois círculos de centro A e B e mesmo raio se interceptam em dois pontos C e D. Se M é ponto de intersecção de AB e CD, mostre que M é ponto médio de AB e CD.

6. Considere um ângulo $A\hat{O}B$ onde $AO = BO$. Trace dois círculos de mesmo raio centrados em A e em B. Suponha que seus raios sejam grande suficientes para que eles se interceptem em dois pontos. Mostre que a reta ligando estes dois pontos passa pelo vértice do ângulo e é sua bissetriz.

7. Seja $ABCD$ um quadrilátero e E um ponto entre A e B. Suponha que $AD = DE$, $\hat{A} = D\hat{E}C$ e $A\hat{D}E = B\hat{D}C$. Mostre que os triângulos ADB e EDC são congruentes.

8. Determine o conjunto de pontos que satisfazem a propriedade de serem equidistante dos extremos de um segmento.

LEITURA COMPLEMENTAR

1. BARBOSA, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana.* SBM.

2. EUCLIDES, *Os Elementos.* Unesp. Tradução: Irineu Bicudo.

3. GREENBERG, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History.* Third Edition. W. H. Freeman.

4. POGORELOV, A. V., *Geometria Elemental.* MIR.

5. MOISE, E. E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint.* Third edition. Addison-Wesley.