AULA

4

Geometria sem o Postulado das Paralelas

META:

Introduzir o Teorema do Ângulo Externo e suas consequências.

OBJETIVOS:

Ao final da aula o aluno deverá compreender como

1. aplicar o Teorema do Ângulo Externo;
2. identificar triângulos retângulos congruentes.
3. aplicar o Teorema do Ângulo Externo e a Desigualdade Triangular para a demonstração do Teorema de Saccheri-Legendre.

PRÉ-REQUISITOS

Para um bom acompanhamento desta aula o aluno deverá ter compreendido todos os casos de congruência de triângulos da aula anterior.

4.1 Introdução

Observe, caro aluno, que já estamos na Aula 4 e até agora ainda não introduzimos o postulado das paralelas, além daquela forma introduzida na primeira aula. Até agora todos os nossos resultados demonstrados até aqui não foi necessário usar o postulado das paralelas. Portanto, qualquer modelo de geometria que seja válido os nossos axiomas, incidência, ordem, medição e de congruência, os resultados provados até esta aula também será válido nesta geometria.

O que faremos nesta aula é demonstrar mais alguns resultados, alguns bem conhecidos de vocês e outros nem tanto. O que estamos interessados é mostrar que certas questões que podem ser respondidas na Geometria Euclidiana Plana não podem ser respondidas em uma geometria em que não seja válido o postulado das paralelas, simplesmente porque seus axiomas não nos dá informações suficientes.

Veremos nesta aula alguns resultados que serão muito úteis nas aulas seguintes, sendo o seu entendimento crucial para o bom encaminhamento do curso. Por exemplo, o Teorema do Ângulo Interior alternado, que nos dá condições suficientes para que duas retas sejam paralelas, e o Teorema do Ângulo Exterior que relaciona os ângulo internos de um triângulo com seus ângulos exteriores.

Todos os estudantes que algum dia estudou geometria plana na escola, sabem que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a $180°$. Nesta aula, veremos que até aqui só temos condições de mostrar que a soma destes ângulos é no máximo $180°$, sendo igualdade provada somente com o postulado das paralelas.

4.2 Teorema do Ângulo Interior Alternado

O próximo teorema requer uma definição.

Definição 4.1. Seja t uma reta transversal a duas retas m e n, com t interceptando m em E e n em B. Escolha pontos D e F em m tais que $D * E * F$, e pontos A e C em n tais que A e D estejam no mesmo lado de t e $A * B * C$. Os ângulos $D\hat{E}B, F\hat{E}B, A\hat{B}E$ e $C\hat{B}E$ são chamados *ângulos interiores*. Os pares de ângulos $(A\hat{B}E, F\hat{E}B)$ e $(D\hat{E}B, C\hat{B}E)$ são chamados de pares de *ângulos interiores alternados.*

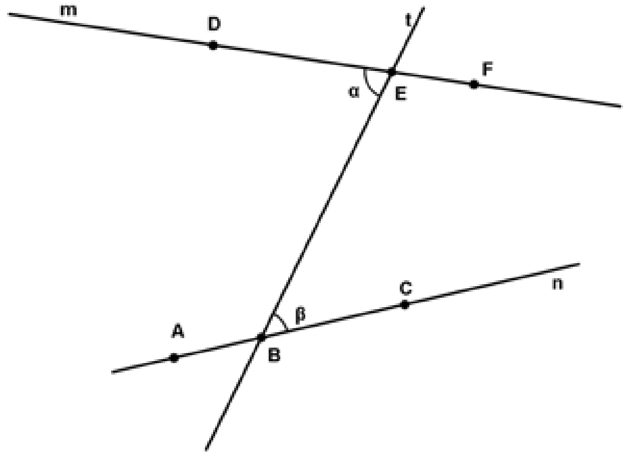

Figura 4.1: α e β são ângulo internos alternados.

Definição 4.2. Duas retas são ditas paralelas se elas não se intersectam.

Teorema 4.1. *(Teorema do ângulo interior alternado): Se duas retas m e n são cortadas por uma reta transversal t formando um par de ângulos interiores alternados congruentes, então as duas retas são paralelas.*

Demonstração: Suponha que $m \cap n = \{G\}$ e $D\hat{E}B = C\hat{B}E$. Podemos supor que G está no mesmo lado de F e C (ver figura 4.2). Existe um ponto H na semi-reta S_{ED}, tal que $HE = BG$. Considere os triângulos HEB e GBE. Como $HE = BG, EB = BE$ e $H\hat{E}B = G\hat{B}E$, segue do 1° Caso de Congruência de Triângulos que

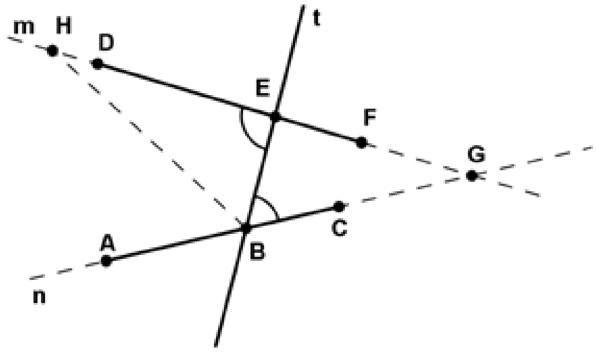

Figura 4.2:

$HEB = GBE$. Em particular, $G\hat{E}B = H\hat{B}E$. Mas como $G\hat{E}B$ é o suplementar de $H\hat{E}B$, segue que os ângulos $H\hat{B}E$ e $G\hat{B}E$ são suplementares. Isto implica que S_{BH} e S_{BG} são semi-retas opostas. Como S_{BA} é oposta a S_{BG}, segue que $S_{BA} = S_{BH}$. Portanto H pertence a $m \cap n$. Contradizendo a Proposição 1.1.
Logo, m e n são paralelas.
Este teorema tem duas importantes consequências.

Corolário 4.1. *Duas perpendiculares a uma mesma reta são paralelas.*

Demonstração Se m e n são retas distintas perpendiculares a uma reta t, então os ângulo interiores alternados são retos, portanto congruentes.
Logo, o Teorema do Ângulo Interior Alternado implica o resultado.

□

Corolário 4.2. *Dada uma reta m e um ponto P fora dela, existe uma única reta l perpendicular a m passando por P.*

Demonstração (Existência) Tome dois pontos distintos de m, B e C . Se PB é perpendicular, terminou a construção. Caso contrário, no semi-plano oposto ao que contém P, trace uma semi-reta com origem em B formando com S_{BC} um ângulo congruente com $P\hat{B}C$. Nesta semi-reta, tome um ponto P' tal que $P'B = PB$. Considere os triângulos ABP e ABP', onde A é o ponto de interseção de PP' com m. Pelo 1° Caso de Congruência de Triângulos, segue que $ABP = ABP'$ (Por quê ?) Como $P\hat{A}B$ e $P'\hat{A}B$ são congruentes e suplementares, segue que PP' é perpendicular a m.

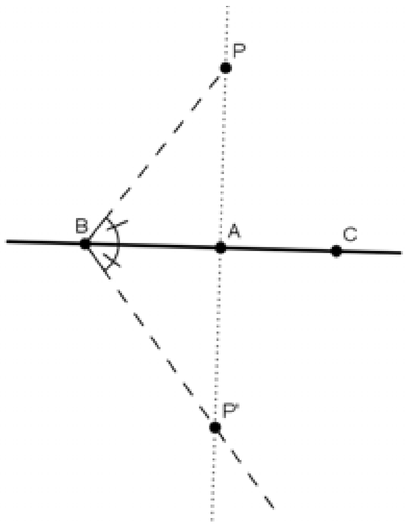

Figura 4.3:

(Unicidade) Suponha que existam duas retas perpendiculares a m passando por P. Pelo Teorema do ângulo interno alternado, as retas coincidem, já que todos os ângulos internos são retos. □

O ponto A da demonstração anterior é chamado de *pé* da perpendicular baixada de P a m.

Corolário 4.3. *Dada uma reta l e P um ponto fora dela, existe pelo menos uma paralela a l que passa por m.*

Demonstração Pelo Corolário 4.2 existe uma única perpendicular r a l passando por P. Da mesma forma, pelo Teorema 2.1 existe uma única perpendicular s a r, passando por P. Portanto, pelo Teorema do Ângulo Interior Alternado, segue que s é uma reta paralela a l passando por P. □

Nós estamos acostumados à Geometria Euclidiana onde de fato existe uma *única* reta paralela a uma reta dada passando por um ponto fora dela. Neste ponto de nosso curso, ainda não é possível provar este resultado. Também estamos acostumados à recíproca do Teorema do Ângulos Internos Alternados: "se duas retas são paralelas, então os pares de ângulos interiores alternados formados por uma transversal são congruentes." Para obtermos estes resultados só será possível com o axioma das paralelas, que veremos na próxima aula.

4.3 Teorema do Ângulo Exterior

Considere a definição seguinte antes do próximo teorema.

Definição 4.3. Os ângulos *internos* de um triângulo são os ângulos formados pelos lados do triângulo. Um ângulo suplementar a um ângulo interno do triângulo é denominado ângulo *exterior* do triângulo.

Todo triângulo possui exatamente seis ângulos externos. Esses seis ângulos formam três pares de ângulos congruentes.

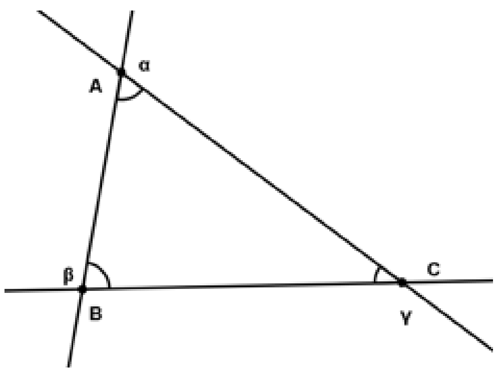

Figura 4.4: $A\hat{B}C$, $B\hat{A}C$ e $A\hat{C}B$ são ângulo internos. α, β e γ são ângulos externos.

Teorema 4.2. *(Teorema do Ângulo Exterior): Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer ângulo interno não adjacente a ele.*

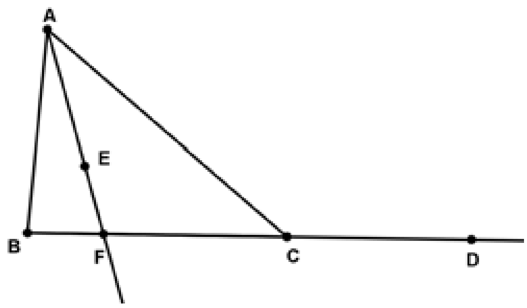

Figura 4.5:

Demonstração Sejam ABC um triângulo e $A\hat{C}D$ um ângulo externo. (ver figura) Vamos mostrar que $A\hat{C}D > B\hat{A}C$.
Se $A\hat{C}D = B\hat{A}C$, então as retas contendo A e B e contendo CD são paralelas, contradizendo a hipótese que B é oponto de interseção destas retas.
Suponha que $B\hat{A}C > A\hat{C}D$. Então existe uma semi-reta S_{AE} que divide $B\hat{A}C$ e $A\hat{C}D = C\hat{A}E$. Seja F o ponto de interseção de BC com S_{AE}. Pelo Teorema do ângulo alternado, as retas contendo AF e CD são paralelas, contradizendo o fato que elas intersectam-se no ponto F. Portanto, $A\hat{C}D > B\hat{A}C$.
Para mostrar que $A\hat{C}D > C\hat{B}A$, o raciocínio é análogo, utilizando-se o ângulo oposto pelo vértice a $A\hat{C}D$. $\square$

O Teorema do Ângulo Externo aparece na 16^a Proposição dos Elementos de Euclides. Sua prova continha um "buraco", que com os nossos axiomas é possível corrigi-lo. Euclides foi levado pela figura. Ele considerou o ponto médio M de AC e um ponto N na semi-reta S_{BM} tal que $BM = MN$. Daí ele assumui erroneamente, com base no diagrama, que N está no interior do ângulo $A\hat{C}D$. Como $AMB = CMN$ (caso LAL de congruência de triângulos), Euclides

concluiu corretamente que $A\hat{C}D > B\hat{A}C$.
Você consegue corrigir o argumento de Euclides ?
Como consequência do Teorema do Ângulo Exterior, podemos provar o 4° caso de congruência de triângulos.

Proposição 4.9 (4° Caso de Congruência de Triângulos)**.** *Sejam ABC e DEF triângulos satisfazendo $AC = DF$, $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$. Então $ABC = DEF$.*

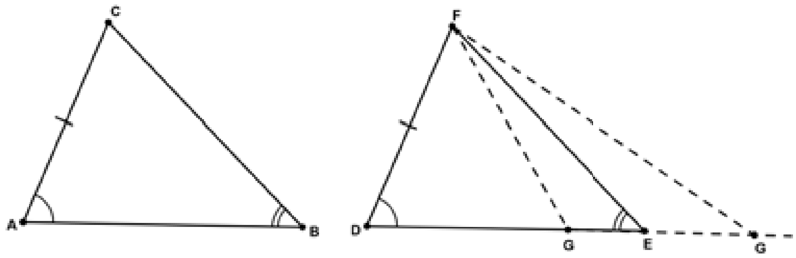

Figura 4.6:

Demonstração Seja G um ponto da semi-reta S_{DE}, tal que $DG = AB$. Pelo caso LAL temos $ABC = DGF$. Isto implica que $D\hat{G}F = \hat{B} = D\hat{E}F$. Como G pertence a S_{DE} temos três casos: $D*G*E, D*E*G$ ou $E = G$. Se $D*G*E$, então $D\hat{G}F$ é um ângulo externo do triângulo FGE. Do Teorema do Ângulo Externo, segue que $D\hat{G}F > D\hat{E}F$, o que é falso. Se $D*E*G$ então $D\hat{E}F$ é um ângulo externo do triângulo FGE. Novamente, do Teorema do Ângulo Externo, segue que $D\hat{E}F > E\hat{G}F$, o que é falso. Logo, $G = F$ e $ABC = DEF$. □

Definição 4.4. Um triângulo é dito *retângulo* se um dos ângulos internos é reto. O lado oposto ao ângulo reto é denominado de *hipotenusa* e os outros dois de *catetos*.

Pelo Teorema do Ângulo Interior Alternado, segue que um triângulo tem no máximo um ângulo reto. Mais ainda, pelo Teorema do Ângulo Externo um triângulo retângulo possui dois ângulos agudos.

4.4 Congruência de Triângulos Retângulos

Como um triângulo possui no máximo um ângulo reto, segue que se dois triângulos retângulos são congruentes, então os ângulos retos devem estar em correspondência. Devido a isto, existe mais um caso de congruência específico para triângulos retângulos.

Teorema 4.3. *Sejam ABC e DEF dois triângulos retângulos cujos ângulos retos são $\hat{C}$ e $\hat{F}$. Se $AB = DE$ e $BC = EF$, então $ABC = DEF$.*

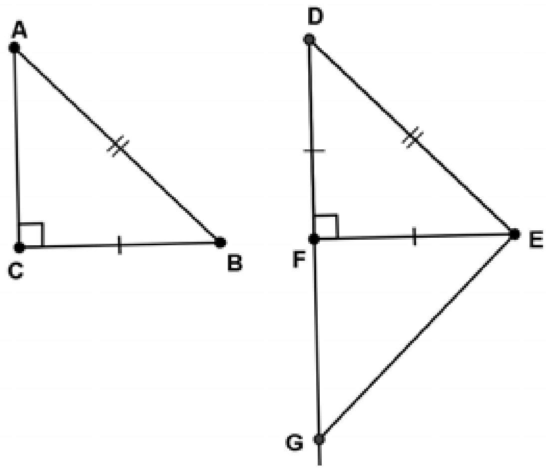

Figura 4.7:

Demonstração Seja G um ponto tal que $D * F * G$ e $FG = AC$. Segue que o triângulo EGF é retângulo cujo ângulo reto é $\hat{F}$. Pelo caso LAL de congruência de triângulos, segue que $ABC = GEF$ e, em particular, que $EG = AB$. Então DEG é um triângulo isósceles com base DG. Logo, $E\hat{D}G = E\hat{G}D$. Pelo caso LAA, segue que $DEF = GEF$. Portanto, $ABC = DEF$. □

4.5 Desigualdades no triângulo

Já vimos um teorema que nos dá uma desigualdade importante no triângulo, O Teorema do Ângulo Externo que tem consequências

importantes.
Nesta seção estudaremos mais algumas desigualdades que são consequências daquele teorema.

Proposição 4.10. *Se dois lados de um triângulo não são congruentes então seus ângulos opostos não são congruentes e o maior ângulo é oposto ao maior lado.*

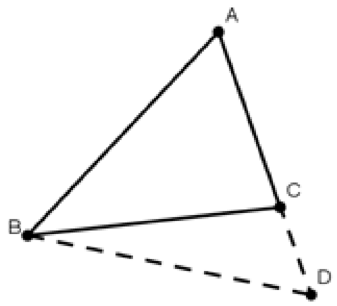

Figura 4.8:

Demonstração Seja ABC um triângulo com $\overline{AB} > \overline{AC}$. Se $\hat{B} = \hat{C}$ então ABC seria um triângulo isósceles com $AB = AC$, o que é falso. Vamos mostrar que $\hat{C} > \hat{B}$. Seja D um ponto da semi-reta S_{AC} tal que $A * C * D$ e $AD = AB$. D existe por causa da hipótese $\overline{AB} > \overline{AC}$. Assim, ABD é um triângulo isósceles com base BD. Isto implica que $A\hat{B}D = A\hat{D}B$. Como o ângulo $A\hat{C}B$ é externo ao triângulo BCD, segue do teorema do ângulo externo que $A\hat{C}B > A\hat{D}B = A\hat{B}D$. Como a semi-reta S_{BC} divide o ângulo $A\hat{B}D$, já que AD intercepta S_{BC} em C, segue que $A\hat{B}D > A\hat{B}C$. Logo $A\hat{C}B > A\hat{B}C$. □

Proposição 4.11. *Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes então os lados que se opõem a estes ângulos têm medidas distintas e o maior lado opõe-se ao maior ângulo.*

Demonstração Seja ABC um triângulo com $\hat{B} < \hat{C}$. Se $AB = AC$, então ABC é um triângulo isósceles e $\hat{B} = \hat{C}$, o que é falso.

Vamos mostrar que $\overline{AC} < \overline{AB}$. Mas se este não fosse o caso, teríamos $\overline{AC} > \overline{AB}$, que pela proposição anterior implicaria $\hat{B} > \hat{C}$, o que é falso.
Logo, só resta $\overline{AC} < \overline{AB}$. □

Pelas proposições anteriores segue que a hipotenusa de um triângulo retângulo é maior que os outros dois catetos. Disto podemos provar a seguinte proposição

Proposição 4.12. *O menor segmento unindo uma reta a um ponto fora dela é o segmento perpendicular.*

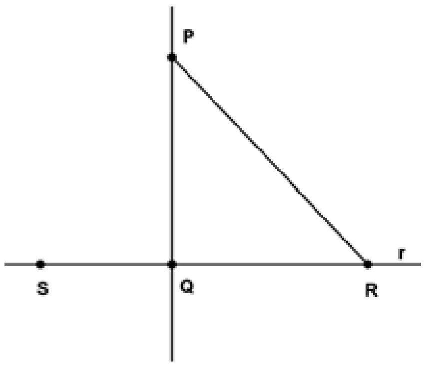

Figura 4.9:

Demonstração Seja P um ponto fora de uma reta r. Considere o ponto Q interseção da reta que passa por P e perpendicular a r, denominado pé da perpendicular baixada do ponto A à reta r. Seja R qualquer ponto de r distinto de Q. Vamos mostrar que $\overline{PQ} < \overline{PR}$. Seja S um ponto de r tal que $S * Q * R$. Como PQ é perpepndicular a r, segue que $P\hat{Q}S = 90°$. Pelo Teorema do Ângulo Externo, temos $P\hat{Q}S > P\hat{R}Q$, o que implica que $\overline{PR} > \overline{PQ}$. □

De fato o que a proposição mostra é que a hipotenusa de um triângulo retângulo é maior do que os catetos. O número $\overline{PQ}$ da demonstração anterior é denominado de distância do ponto P à reta

m. O segmento QR é chamado de projeção do segmento PR sobre a reta r.

Teorema 4.4. *(Desigualdade Triangular): Dados três pontos distintos A, B e C, têm-se que $\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}$. A igualdade ocorre se e somente se B pertence ao segmento AC.*

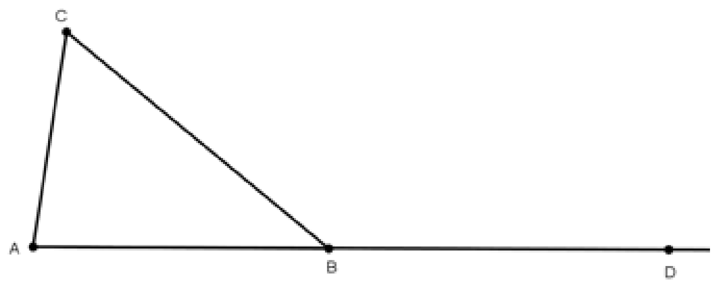

Figura 4.10:

Demonstração Suponha que A, B e C não são colineares. Então ABC é um triângulo. Seja D um ponto da semi-reta S_{AB} tal que $A * B * D$ e $BD = BC$. Assim, o triângulo BCD é isósceles com base CD. Isto implica que $B\hat{C}D = B\hat{D}C$. Note que S_{CB} divide o ângulo $A\hat{C}D$, já que AD intercepta S_{CB}. Assim,

$$A\hat{C}D = A\hat{C}B + B\hat{C}D > B\hat{C}D = B\hat{D}C.$$

Pela Proposição 4.11 temos que $\overline{AD} > \overline{AC}$. Como $A * B * D$ então $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AB} + \overline{BC}$.
Logo, $\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$.
Suponha agora que A, B e C são pontos colineares.
Se B pertence ao segmento AC, a igualdade $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ é trivial. Se vale a igualdade, vamos mostrar que B pertence ao segmento AC. Considere a, b e c as coordenadas dos pontos A, B e C, com $c < a$, por exemplo. Neste caso,

$$|a - c| = |a - b| + |b - c| \Rightarrow \begin{cases} |a - c| & > & |a - b| \\ |a - c| & > & |b - c| \end{cases}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} a - c &> a - b \\ &e \\ a - c &> b - c \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} b &> c \\ &e \\ a &> b \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 2.1 segue o resultado. □

Definição 4.5. Sejam uma reta m e um ponto P fora dela. Dizemos que o ponto P' é o *reflexo* de P relativamente a m se PP' é prependicular a m e $AP = AP'$, onde A é o ponto de interseção de PP' com m.

Problema 4.1. *Dados dois pontos A e B fora de uma reta r, determinar um ponto P em m tal que $\overline{AP} + \overline{PB}$ seja o menor possível.*

Solução Suponha que A e B estão em semi-planos distintos. Neste caso, AB intercepta r em um ponto P. Se C é um outro ponto de m, então da desigualdade triangular, obtemos

$$\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{CB}.$$

Como $A * P * B$, segue que $\overline{AB} = \overline{AP} + \overline{PB} < \overline{AC} + \overline{CB}$, e P é o ponto procurado.

Se A e B pertencem a semi-planos distintos, basta considerar o reflexo B' de B relativamente à reta m. Neste caso, encontramos um ponto P de m que resolve o problema para os pontos A e B'. Este ponto P também resolve o problema para A e B, já que $AP = AP'$. □

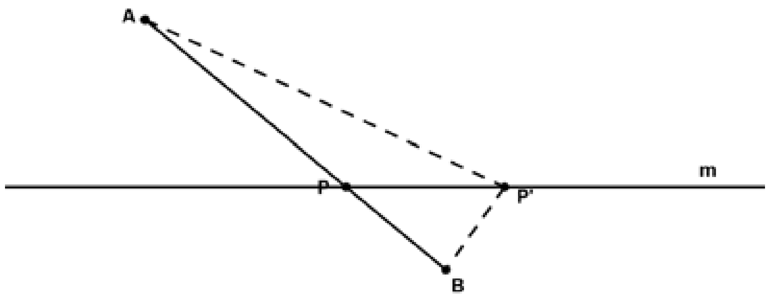

Figura 4.11:

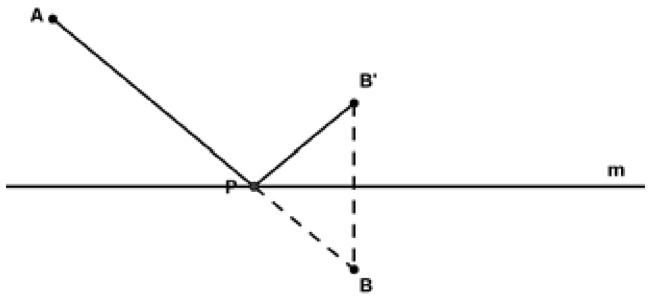

Figura 4.12:

4.6 Teorema de Saccheri-Legendre

O objetivo desta seção é provar que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é menor ou igual a 180°. Este resultado foi provado por Saccheri que na verdade estava tentando encontrar uma igualdade.

Proposição 4.13. *Seja ABC um triângulo. Existe um triângulo AEC tal que a soma dos ângulos é a mesma soma dos ângulos do triângulo ABC e AEC possui um ângulo cuja medida é menor ou igual à metade de um dos ângulos do triângulo ABC.*

Demonstração Seja um ponto D em BC tal que $BD = DC$. Na semi-reta S_{AD} considere um ponto E tal que $AD = DE$. Pelo caso

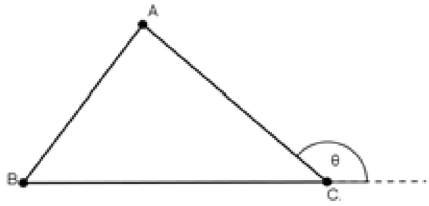

Figura 4.13:

LAL segue que $ADB = EDC$.

Afirmação 1: $A\hat{E}C + A\hat{C}E + C\hat{A}E = A\hat{B}C + B\hat{A}C + A\hat{C}B$.

Da congruência $ADB = EDC$ concluímos que $A\hat{B}D = E\hat{C}D$ e $B\hat{A}D = C\hat{E}D$. Como S_{AD} divide $B\hat{A}C$ e S_{CD} divide $A\hat{C}E$, segue que

$$\begin{aligned} A\hat{B}C + A\hat{C}B + B\hat{A}C &= B\hat{C}E + A\hat{C}B + B\hat{A}D + D\hat{A}C \\ &= A\hat{C}E + A\hat{E}C + E\hat{A}C. \end{aligned}$$

Afirmação 2: $E\hat{A}C$ ou $A\hat{E}C \leq \frac{1}{2}B\hat{A}C$.

Note que, como S_{AD} divide $B\hat{A}C$, segue que

$$B\hat{A}C = B\hat{A}D + D\hat{A}C = A\hat{E}C + E\hat{A}C.$$

Logo, $A\hat{E}C$ ou $E\hat{A}C \leq \frac{1}{2}B\hat{A}C$. □

Proposição 4.14. *A soma de dois ângulos internos de um triângulo é menor do que* 180°.

Demonstração Seja ABC um triângulo. Seja θ um ângulo externo com vértice C. Pelo Teorema do Ângulo Externo, temos que $\theta > \hat{B}$. Como $\theta + \hat{C} = 180°$, segue que

$$\hat{B} + \hat{C} < \theta + \hat{C} < 180°.$$

□

Desta proposição, reobtemos o resultado

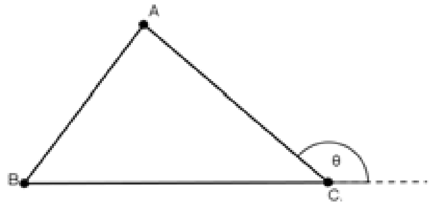

Figura 4.14:

Corolário 4.4. *Todo triângulo possui pelo menos dois ângulos internos agudos.*

De fato, caso contrário existiria um triângulo com pelo menos dois ângulos obtusos cuja soma seria maior do que 180°.

Teorema 4.5. *(Saccheri-Legendre): A soma dos ângulos internos de um triângulo é menor ou igual a* 180°.

Demonstração Suponha que exista um triângulo ABC cuja soma dos ângulos internos é maior do que 180°, digamos, que seja $180° + \delta$, onde δ é algum número positivo. Pela Proposição 4.13, podemos encontrar um outro triângulo $A_1B_1C_1$ satisfazendo

$$\begin{cases} \hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180° + \delta \\ \hat{A}_1 \leq \frac{1}{2}\hat{A}. \end{cases}$$

Seguindo indutivamente podemos encontrar um triângulo $A_nB_nC_n$ satisfazendo

$$\begin{cases} \hat{A}_n + \hat{B}_n + \hat{C}_n = 180° + \delta \\ \hat{A}_n \leq \frac{1}{2^n}\hat{A}. \end{cases}$$

Tomando n_0 suficientemente grande tal que $\frac{1}{2^{n_0}}\hat{A} < \delta$, teremos que o triângulo $A_{n_0}B_{n_0}C_{n_0}$ é tal que

$$\begin{cases} \hat{A}_{n_0} + \hat{B}_{n_0} + \hat{C}_{n_0} = 180° + \delta \\ \hat{A}_{n_0} < \delta \end{cases}$$

Isto implica que $B_{n_0}+C_{n_0} = 180° + \delta - \hat{A}_{n_0} > 180°$, contradizendo a Proposição 4.14.
Logo, só pode ser $\hat{A}_n + \hat{B}_n + \hat{C}_n \leq 180°$. □

4.7 Soma dos Ângulos de um Triângulo

Até aqui ainda não falamos do postulado das paralelas. De fato, todos os resultados até aqui demonstrados são independentes deste postulado, ou seja, podem ser demonstrados sem o uso do postulado das paralelas. O Teorema de Saccheri-Legendre afirma que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor ou igual a 180°.
Agora, iremos mostrar que se existe um triângulo cuja soma dos ângulos internos é igual a 180°, então a soma dos ângulos de qualquer triângulo é também 180°. Mas ainda não ficará demonstrado que a soma dos ângulos de um triângulo é 180°, restando para isso exibir um triângulo com tal propriedade.

Definição 4.6. Seja ABC um triângulo. O *defeito* de um triângulo é o número

$$\delta ABC = 180° - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C}.$$

Note que $\delta ABC \geq 0$.

Teorema 4.6. *Seja ABC um triângulo e D um ponto entre A e B. Então $\delta ABC = \delta ACD + \delta BCD$.*

Demonstração Como S_{CD} divide o ângulo $A\hat{C}B$, então $A\hat{C}B = A\hat{C}D + D\hat{C}B$. Além disso, $A\hat{D}C$ e $B\hat{D}C$ são suplementares, o que implica que $A\hat{D}C + B\hat{D}C = 180°$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\delta ACD + \delta BCD &= 180° - \hat{A} - A\hat{C}D - A\hat{D}C \\
&\quad +180° - \hat{B} - B\hat{C}D - B\hat{D}C \\
&= 180° - \hat{A} - A\hat{C}B - \hat{B} \\
&= \delta ABC.
\end{aligned}$$

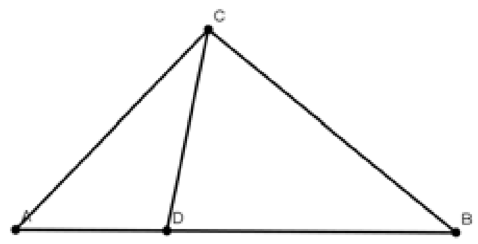

Figura 4.15:

□

Sabendo que o defeito de triângulo é sempre um número não negativo, obtemos o seguinte corolário

Corolário 4.5. *Sejam ABC um triângulo e D um ponto entre A e B. Então $\delta ABC = 0$ se e somente se $\delta ACD = \delta BCD = 0$.*

Definição 4.7. Um *retângulo* é um quadrilátero com os quatro ângulos retos.

Teorema 4.7. *Se um triângulo existe com a soma dos ângulos $180°$, então um retângulo existe. Se um retângulo existe, então todo triângulo tem a soma dos ângulos igual a $180°$.*

Demonstração Faremos a demonstração em 5 passos.
Suponha incialmente que existe um triângulo com a soma dos ângulos igual a $180°$.

> **Passo 1:** Construir um triângulo retângulo com a soma dos ângulos $180°$.
>
> Seja ABC um triângulo com $\delta ABC = 0$, que existe pela hipótese. Suponha que não seja reto; caso contrário não temos nada a fazer. Como a soma dos ângulos de um triângulo é sempre $\leq 180°$, Teorema de Saccheri-Legendre, então pelo menos dois ângulos são agudos, $\hat{A}$ e $\hat{B}$, por exemplo.

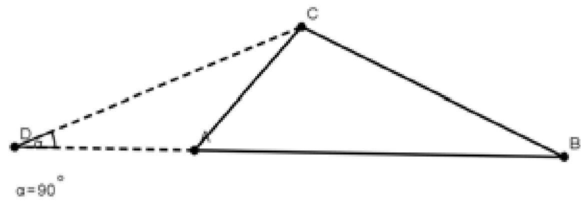

Figura 4.16:

Seja CD um segmento perpendicular à reta que contém AB.

Afirmação: $A * D * B$.

De fato, caso contrário devemos ter $D * A * B$ ou $A * B * D$.

Se ocorre $D * A * B$, então $C\hat{A}B$ é um ângulo exterior ao triângulo CDA satisfazendo $C\hat{A}B < C\hat{D}A$, contradizendo o Teorema do Ângulo Exterior.

Se $A*B*D$, da mesma forma, encontramos uma contradição.

Portanto, o Corolário 4.5 implica que $\delta ADC = 0$ e $\delta BDC = 0$.

Passo 2: Construir um retângulo.

Seja BCD um triângulo retângulo em $\hat{D}$ com defeito zero, que existe pelo passo 1. Seja S_{CE} uma semi-reta no semi-plano oposto ao semi-plano contendo D determinado pela reta que contém BC. Podemos tomar S_{CE} tal que $E\hat{C}B = C\hat{B}D$. Tome $F \in S_{CE}$ tal que $CF = DB$. Pelo 1° caso de congruência de triângulos, segue que $DBC = FCB$. Em particular $\hat{D} = \hat{F} = 90°$ e $\delta FCB = 0$. Como δ então $B\hat{C}D + D\hat{B}C = 90°$. Pela congruência $DBC = FCB$, encontramos $F\hat{C}B + D\hat{C}B = 90°$ e $D\hat{B}C + F\hat{B}C = 90°$.

Logo, $DBFC$ é um retângulo. (Ver figura 4.17.)

Passo 3: Construir um retângulo arbitrariamente grande.

Basta construir cópias do retângulo como na figura 4.18.

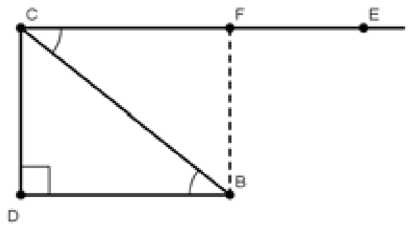

Figura 4.17:

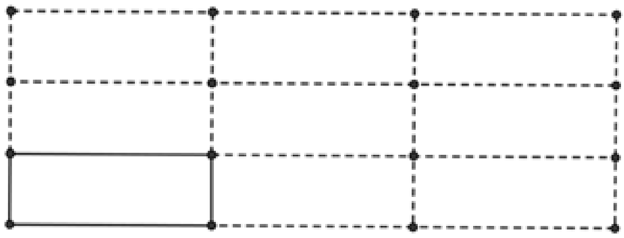

Figura 4.18:

Passo 4: Todos os triângulos retângulos têm defeito zero.

Se ABC é um triângulo retângulo e $DEFG$ um retângulo arbitrariamente grande. Sejam os pontos H^{EDE} e I^{EEF} tais que $HEI = ABC$. Assim, $\delta HEI = \delta ABC$. Note que $\delta DEF = 0$. Daí, segue, do corolário anterior que $0 = \delta DFH + \delta HEE \Rightarrow HFE = 0$. Aplicando novamente o corolário encontramos $\delta HFE = 0$. (Figura 4.19).

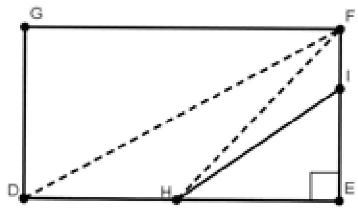

Figura 4.19:

Passo 5: Se todo triângulo retângulo tem defeito zero, então todo triângulo tem defeito zero.

Como no passo 1, divida o triângulo em dois triângulos retângulos e use o Corolário 4.5.

□

Como consequência imediata temos o corolário.

Corolário 4.6. *Se existe um triângulo com defeito positivo, então todos os triângulos têm defeito positivo.*

RESUMO

Nesta aula aprendemos dois teoremas importantes, o Teorema do Ângulo Interno Alternado, par determinar retas paralelas, e o Teorema do Ângulo Externo, que nos dá uma importante desigualdade entre os ângulos internos e externos de um triângulo arbitrário. Vimos também que sem o postulado das paralelas, provamos apenas que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor ou igual que 180°. Além disso, provamos que se existe um triângulo com defeito zero, então todos os outros também terá defeito zero.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula introduziremos o axioma das paralelas e, entre muitos outros resultados, provaremos que a soma dos ângulos internos de um triângulo arbitrário é sempre igual a 180°.

ATIVIDADES

1. A figura 4.20 é formada pelos segmentos AC, AE, CF e EB. Determine os ângulos que são:

   (a) menores do que o ângulo $\hat{7}$.

   (b) maiores do que o ângulo $\hat{5}$.

   (c) menores do que o ângulo $\hat{4}$.

2. Na figura 4.21 os ângulos externos $A\hat{C}E$ e $A\hat{B}D$ satisfazem a desigualdade: $A\hat{C}E < A\hat{B}D$. Mostre que $A\hat{B}D > A\hat{B}$.

3. Em um cartório de registro de imóveis um escrivão recusou-se a transcrever o registro de um terreno triangular cujos lados, segundo o seu proprietário, mediam 100m, 60m e 20m. Você pode dar um argumento que justifique a atitude do escrivão?

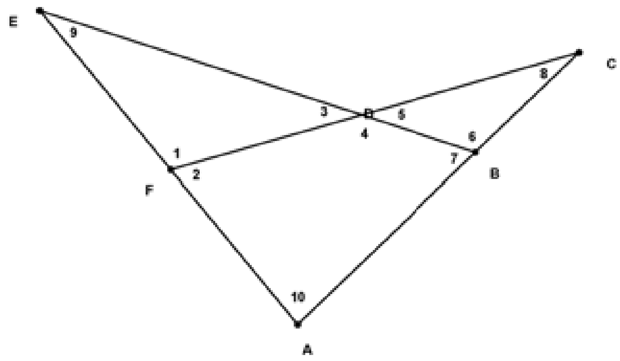

Figura 4.20:

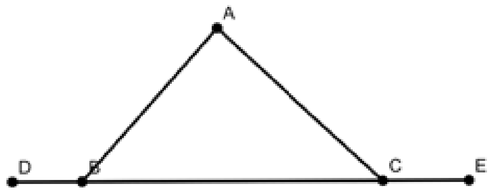

Figura 4.21:

4. Considere um quadrilátero $ABDC$ tal que $\overline{BD} > \overline{BC}$ e $\hat{A} > A\hat{B}C$. Prove que $\overline{BD} > \overline{AC}$.

5. Considere um triângulo EFG. Tome $H \in FG$ tal que $EG = EG$. Mostre que $E\hat{H}F > E\hat{H}G$.

6. Na figura 4.22 m e n são duas retas perpendiculares. Qual o caminho mais curto para se ir do ponto A ao ponto B tocandop-se nas duas retas?

7. Mostre que qualquer triângulo tem pelo menos um ângulo externo obtuso.

8. Considere um triângulo ABC. No segmento AB tome um ponto D, e no segmento CD tome um ponto E. Mostre que $A\hat{E}C > D\hat{B}C$.

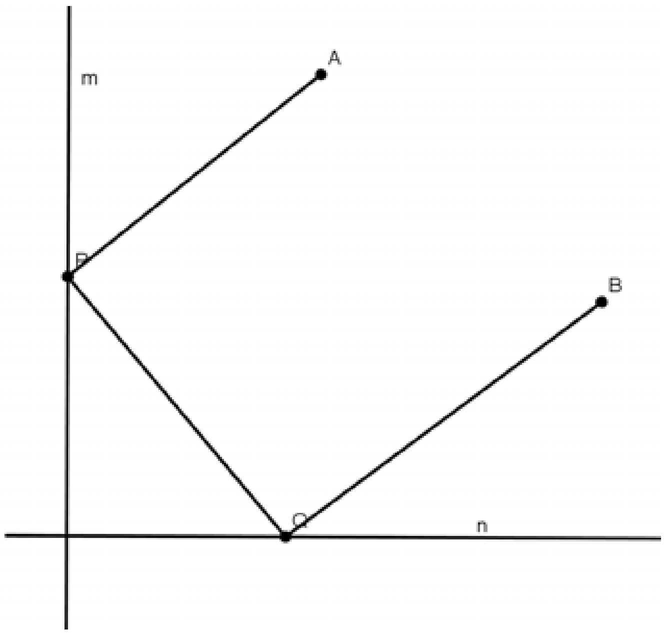

Figura 4.22:

9. Mostre que a soma das diagonais de um quadrilátero é maior que a soma de dois lados opostos.

10. Dado um triângulo ABC, marca-se um ponto D no lado AB. Mostre que $\overline{CD}$ é menor do que o comprimento de um dos lados AC ou BC.

11. Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos não retângulo com $\hat{C} = \hat{C}'$, $AB = A'B'$ e $BC = B'C'$. Dê um exemplo para mostrar que estas hipóteses não acarretam que os triângulos devam ser congruentes.

12. Dois segmentos têm extremidades em um círculo. Mostre que o mais distante do centro do círculo têm o menor comprimento.

LEITURA COMPLEMENTAR

1. BARBOSA, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana.* SBM.

2. EUCLIDES, *Os Elementos.* Unesp. Tradução: Irineu Bicudo.

3. GREENBERG, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History.* Third Edition. W. H. Freeman.

4. POGORELOV, A. V., *Geometria Elemental.* MIR.

5. MOISE, E. E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint.* Third edition. Addison-Wesley.