AULA 5

O Axioma das Paralelas

META:

Estudar o Axioma das Paralelas e suas consequências.

OBJETIVOS:

Introduzir o Axioma das Paralelas;

Estudar a soma dos ângulos de um triângulo.

PRÉ-REQUISITOS

Congruência e o Teorema do Ângulo Interno Alternado.

5.1 Introdução

Há evidências de que os postulados, particularmente o quinto, foram formulados por Euclides. Sabe-se que o quinto postulado tornou-se alvo de críticas pelos matemáticos da época. Que o próprio Euclides não confiava totalmente no quinto postulado é mostrado pelo fato que ele adiou o uso em uma prova até sua Proposição 29.

Além disso, o fato de que o quinto postulado parecer muito mais com uma proposição do que com afimação óbvia, que qualquer um aceita sem problemas, e que ele é a recíprova de uma das proposições, a Proposição 28 dos Elementos, levou muitos matemáticos a acreditarem que o quinto postulado era na verdade uma proposição que Euclides, por não saber demonstrá-la a partir dos quatro primeiros postulados, o introduziu como um postulado. Como consequência destas suspeitas, muitas foram as tentativas de prova do quinto postulado, até que três matemáticos, Carl F. Gauss (1777-1855), Johann Bolyai (1802-1860) e Nikolai I. Lobachewsky (1793-1856), descobriram independentemente as chamadas geometrias não-Euclidianas, que a grosso modo são geometrias onde o quinto postulado não é válido.

Nas aulas anteriores vimos que dada uma reta e um ponto fora dela, existe uma reta paralela a reta dada e passando pelo ponto dado. Nesta aula introduziremos o axioma que garante que esta reta paralela é única, exatamente o que falta para demonstrar muitos outros resultados além do que já provamos até aqui.

5.2 Axioma das Paralelas

O Axioma das Paralelas é o seguinte

Axioma das Paralelas: Por um ponto fora de uma reta dada pode-se traçar uma única reta paralela a esta reta.

O Teorema do Ângulo Interior Alternado afirma que se duas retas são intercectadas por uma terceira então elas são paralelas. O próximo teorema é a recíproca deste resultado.

Teorema 5.1. *Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos internos alternados são congruentes.*

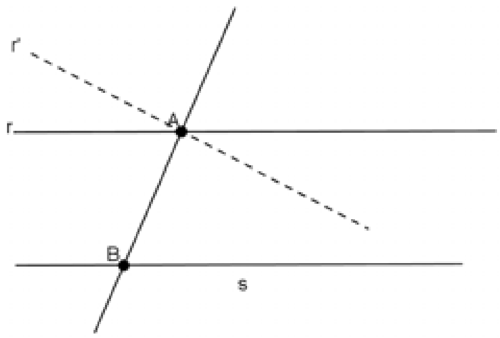

Figura 5.1:

Demonstração Sejam r e s duas retas paralelas cortadas por uma transversal t nos pontos A e B, respectivamente. Sabemos que existe somente uma reta r' passando por A formando ângulo interior alternado com s congruentes. Pelo Teorema do Ângulo Interior Alternado, segue que r' e s são paralelas. Pelo Axioma das Paralelas, temos que r coincide com r'. □

Note que na demonstração fizemos uso do seguinte resultado.

Proposição 5.15. *Se a reta m é paralela às retas r e s, então r e s são paralelas.*

Prove esta proposição como exercício.

Corolário 5.1. *Se uma reta corta uma de duas paralelas, então corta também a outra.*

Demonstração Se uma reta cortasse somente uma de duas paralelas, então teríamos uma reta paralela a duas retas não paralelas. □

Teorema 5.2. *Se m e n são retas paralelas, então todos os pontos de m estão à mesma distância da reta m.*

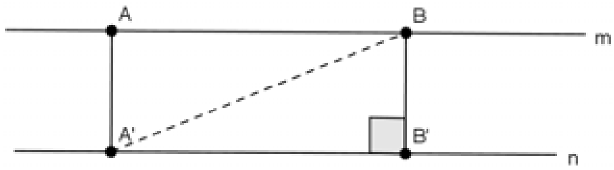

Figura 5.2:

Demonstração Sejam A e B pontos de m. Sejam A' e B' os pés das perpendiculares baixadas de A e B até m.
Vamos mostrar que $AA' = AB'$.
Como m e n são paralelas, segue do Teorema 5.1 que $B\hat{A}'B' = A\hat{B}A'$ e $B\hat{A}A' = B\hat{B}'A'$. Logo, os triângulos ABA' e $B'A'B$ são retângulos em A e B' com hipotenusa congruentes e um ângulo agudo congruente. Portanto, a Proposição 4.9 implica que $ABA' = B'A'B$. Em particular, $AA' = B'B$. □

Exercício 5.1. Mostre a recíproca deste teorema, ou seja, se todos os pontos de m estão à mesma distância da reta m, então m e n são paralelas.

5.3 Triângulos e Paralelogramos

Vamos mostrar agora que com o Axioma das Paralelas, a desigualdade no Teorema de Saccheri-Legendre não ocorre.

Teorema 5.3. *Em qualquer triângulo ABC, tem-se $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$.*

Demonstração Tome uma reta r paralela ao lado AC. Sejam D e E pontos de r tais que $D * B * E$ e D e A pontos localizados no lado da reta contendo BC. Então

$$D\hat{B}A + A\hat{B}C = D\hat{B}C \text{ e } D\hat{B}C + A\hat{B}E = 180°.$$

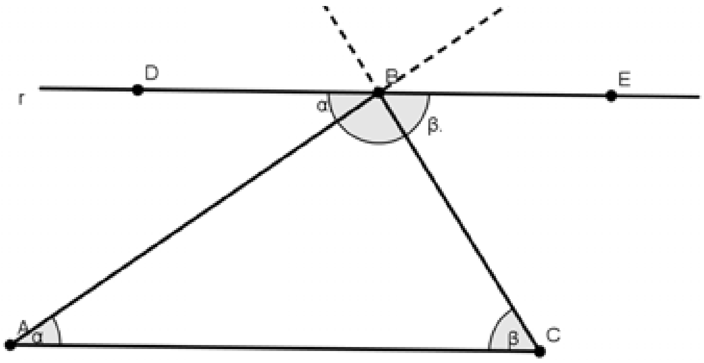

Figura 5.3:

Portanto,

$$C\hat{B}E + A\hat{B}C + A\hat{B}D = 180°.$$

Pelo Teorema 5.1, temos que $C\hat{B}E = A\hat{C}B$ e $A\hat{B}D = B\hat{A}C$.
Logo,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°.$$

□

Como consequência imediata obtemos o seguinte corolário, cuja prova é deixada para o aluno.

Corolário 5.2. *a) A soma dos ângulos agudos de um triângulo retângulo é* 90°*.*

b) A medida de um ângulo externo de um triângulo é a soma dos ângulos internos não-adjacentes.

c) A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°*.*

Definição 5.1. Um paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.

Proposição 5.16. *Os lados e ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes.*

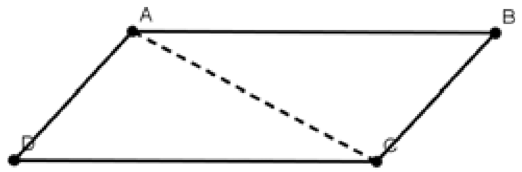

Figura 5.4:

Demonstração Seja $ABCD$ um paralelogramo. Como AB e DC são paralelos, então $B\hat{A}C = A\hat{C}D$. Da mesma forma, concluímos que $C\hat{A}D = A\hat{C}B$. Isto implica que $DAC = BCA$, já que AC é comum a ambos os triângulos. Em particular, $AB = DC$, $AD = BC$ e $\hat{B} = \hat{D}$. Além disso, $\hat{A} = D\hat{A}C + C\hat{A}B = B\hat{C}A + A\hat{C}D = \hat{C}$. □

Exercício 5.2. Prove que as diagonais de um paralelogramo se intersectam em um ponto que é o ponto médio das duas diagonais.

Proposição 5.17. *Se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes então o quadrilátero é um paralelogramo.*

Demonstração Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $AB = CD$ e $BC = AD$. O 3° caso de congruência de triângulos implica que $ABC = CDA$. Em particular, $\hat{B} = \hat{D}$ e

$$D\hat{A}B = D\hat{A}C + C\hat{A}B = B\hat{C}A + A\hat{C}D = B\hat{C}D.$$

□

Exercício 5.3. Mostre que se dois lados opostos de um quadrilátero são paralelos e congruentes, então o quadrilátero é um paralelogramo.

Teorema 5.4. *O segmento ligando os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem metade de seu comprimento.*

Demonstração Seja ABC um triângulo. Sejam D e E os pontos médios dos segmentos AB e AC, respectivamente.

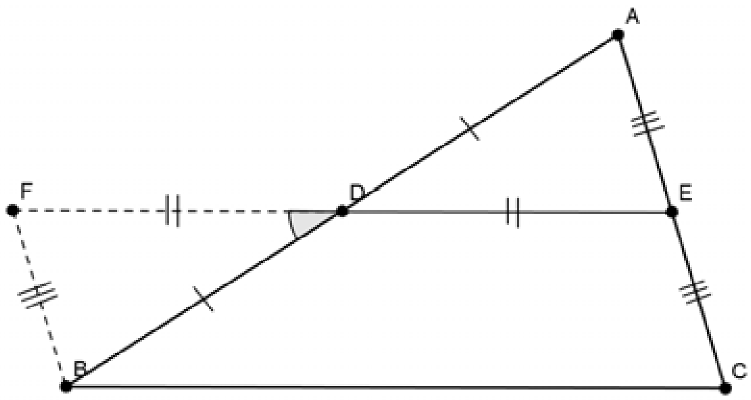

Figura 5.5:

Vamos mostrar que DE é paralelo a BC e $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$.

Seja F um ponto na semi-reta S_{ED} tal que $FD = DE$ e $E * D * F$. Observe que $ADE = BDF$, já que $FD = DE$ (por construção), $AD = DB$ (já que D é o ponto médio do segmento AB) e $A\hat{D}E = B\hat{D}F$ (pois são opostos pelo vértice). Em particular $BF = AE$. O ponto E é ponto médio de AC e isto implica que $AE = EC$ e então $FB = EC$. Além disso, novamente da congruência $ADE = BDF$, obtemos $A\hat{E}F = B\hat{F}E$. Do Teorema do Ângulo Interior Alternado, que FB é paralelo a EC. Pelo Exercício 5.3, segue que $BCEF$ é um paralelogramo. Portanto, da Proposição 5.16, obtemos que $EF = BC$ e como $FD = DE$, e $F * D * E$ segue que $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$. □

A próxima proposição será muito útil para o estudo de semelhança de triângulos e é tradicionalmente atribuída a Tales de Mileto, matemático grego que viviu por volta dos anos 624 - 546 a.C.

Proposição 5.18. *Sejam a, b e c retas paralelas e m e n duas transversais. Suponha que m e n intercectam a, b e c nos pontos A, B e C e nos pontos A', B' e C', respectivamente. Se $A * B * C$,* *então* $A' * B' * C'$. *Se* $AB = BC$ *então* $A'B' = B'C'$.

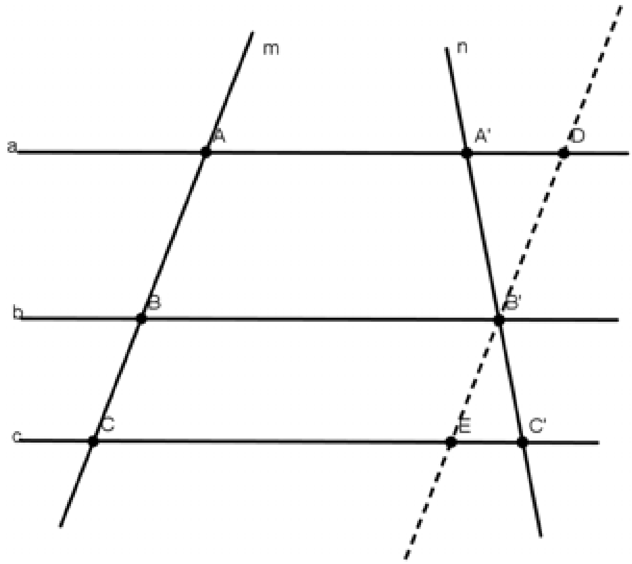

Figura 5.6:

Demonstração Suponha qeu $A * B * C$. Neste caso, A e C estão em semi-planos opostos relativamente à reta b. Como AA' não intercecta b, já que os pontos A e A' pertencem a reta a que é paralela à reta b, segue que A e A' estão no mesmo semi-plano determinado por b. Do mesmo modo, concluímos que C e C' estão no mesmo semi-plano. Portanto, A' e C' estão em semi-planos distintos relativamente a b. Logo, b intercecta $A'C'$ implicando $A' * B' * C'$.

Suponha agora que $AB = BC$. Trace pelo ponto B' uma paralela a m. Esta paralela corta a e c em pontos D e E, respectivamente. Como $ADB'B$ e $BB'EC$ são paralelogramos, segue que $DB' = AB$ e $B'E = BC$. Além disso, temos do Teorema do Ângulo Interno Alternado que $B'\hat{D}A' = B'EC'$. Como $AB = BC$, por hipótese, e $A'\hat{B}'D = E\hat{B}'C'$ por serem opostos pelo vértice, segue que $A'B'D = C'B'E$.

Assim, $A'B' = C'B'$. $\square$

Corolário 5.3. *Suponha que k retas paralelas $a_1, \ldots, a_k$ cortam duas retas m e n nos pontos $A_1, \ldots, A_k$ e nos pontos $B_1, \ldots, B_k$, respectivamente. Se $A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = A_{k-1}A_k$ então $B_1B_2 = B_2B_3 = \cdots = B_{k-1}B_k$.*

Utilizando a Proposição 5.18, a demonstração é simples e é feita por indução sobre o número de retas. Deixamos para o aluno.

Teorema 5.5. *Se uma reta, paralela a um dos lados de um triângulo, corta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão.*

O que o teorema diz é que se uma reta r paralela a BC corta os lados AB e AC de um triângulo ABC, nos pontos D e E, respectivamente, então vale a igualdade:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}.$$

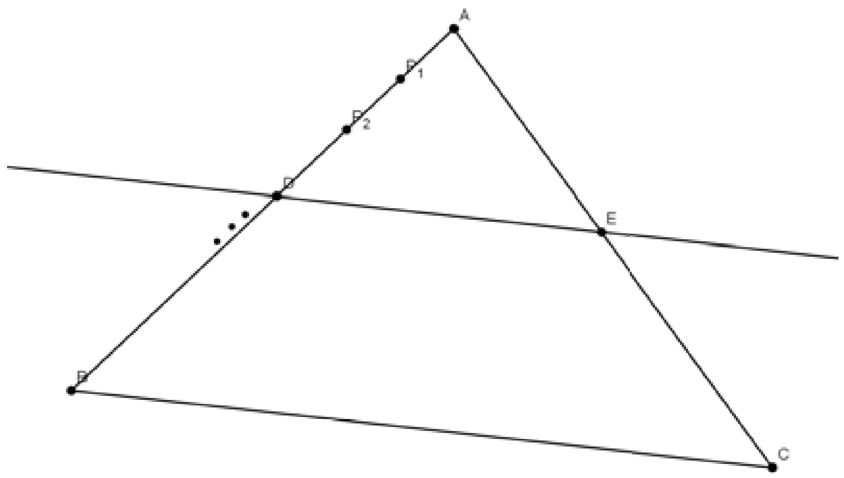

Figura 5.7:

Demonstração Na semi-reta S_{AB}, tome um ponto P_1 tal que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP_1}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AD}}{\overline{AP_1}}$$

não sejam números inteiros. De fato, basta tomar P_1 tal que $\overline{AP_1}$ não seja um divisor comum de AB e AD. Assim, por indução, encontramos pontos $P_2, P_3, \ldots, P_k, \ldots$ na semi-reta S_{AB} tais que

$$P_{k-1} * P_k * P_{k+1} \quad \text{e} \quad \overline{AP_k} = k\overline{AP_1}, \;\; \forall k \geq 2.$$

Observe que isto implica que $\overline{P_kP_{k+1}} = \overline{AP_1}$.

Afirmação: D e B não coincidem com nenhum dos $P_i's$.

De fato, caso contrário teríamos $D = P_{k_0}$ para algum $k_0 \geq 1$ e

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AP_1}} = \frac{\overline{AP_k}}{\overline{AP_1}} = \frac{k\overline{AP_1}}{\overline{AP_1}} = k,$$

impcando que $\frac{\bar{AD}}{\overline{AP_1}}$ seria inteiro, o que é uma contradição pela escolha do ponto P_1.

Logo, existem inteiros m e n tais que $P_m * D * P_{m+1}$, $P_n * B * P_{n+1}$, $A * P_m * D$ e $A * P_n * B$.

Isto implica que

$$\begin{aligned} m\overline{AP_1} = \overline{AP_m} &< \overline{AP_m} + \overline{P_mD} = \overline{AD} \\ &< \overline{AD} + \overline{DP_{m+1}} = \overline{AP_{m+1}} = (m+1)\overline{AP_1}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$m\overline{AP_1} < \overline{AB} < (n+1)\overline{AP_1}.$$

Da mesma forma, encontramos

$$n\overline{AP_1} < \overline{AB} < (n+1)\overline{AP_1}.$$

Afirmação:

$$\frac{m}{n+1} < \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} < \frac{m+1}{n}. \tag{5.2}$$

Esta afirmação é consequência imediata das duas últimas desigualdades.

Trace retas paralelas à reta contendo o segmento BC passando pelos pontos $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$. Pelo Corolário 5.3, estas paralelas cortam S_{AC} em pontos $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n+1}$ tais que $\overline{AQ_1} = \overline{Q_1Q_2} = \overline{Q_2Q_3} = \cdots$. Em particular, $\overline{AQ_k} = k\overline{AQ_1}$. Além disso, $Q_m *$

$E * Q_{m+1}$ e $Q_n * C * Q_{n+1}$. Da mesma forma que obtivemos a desigualdade (5.2), obtemos

$$\frac{m}{n+1} < \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} < \frac{m+1}{n}. \tag{5.3}$$

As desigualdades (5.2) e (5.3) implicam que

$$\left|\frac{\bar{AD}}{\bar{AB}} - \frac{\bar{AE}}{\bar{AC}}\right| < \frac{m+1}{n} - \frac{m}{n+1}.$$

Observe que $m \leq n$, o que implica que

$$\begin{aligned}\frac{m+1}{n} - \frac{m}{n+1} &= \frac{m+n+1}{n(n+1)} \\ &\leq \frac{2n+2}{n(n+1)} = \frac{2}{n}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\left|\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} - \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}\right| < \frac{2}{n}. \tag{5.4}$$

Como $\frac{2}{n}$ pode ser tomado muito pequeno se $\overline{AP_1}$ é tomado muito pequeno (Por quê?), segue que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}},$$

já que estes quocientes não dependem de n na desigualdade (5.4).

□

5.4 Semelhança de Triângulos

Dizemos que dois triângulos ABC e DEF são semelhantes se existe uma correspondência entre os vértices $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow D$ e $C \leftrightarrow F$, tal que $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$ e

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}}.$$

O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de *razão de proporcionalidade* entre os triângulos.

Notação: Usaremos a notação $ABC \sim DEF$ para indicar que os dois triângulos são semelhantes e a correspondência entre os vértices é dada exatamente na ordem que eles aparecem.

Observe que dois triângulos congruentes são semelhantes.
O próximo teorema afirma que não é necessário verificar todas as condições da definição de semelhança de triângulos, basta verificar algumas delas. Ele conhecido também como o 2° caso de semelhança de triângulos.

Teorema 5.6 (Casso AAA de semelhança)**.** *Se em dois triângulos ABC e DEF tem-se $\hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E}$ e $\hat{C} = \hat{F}$, então $ABC \sim DEF$.*

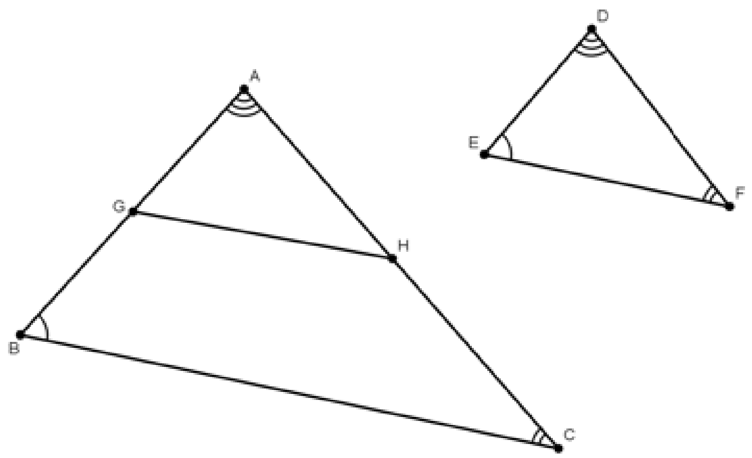

Figura 5.8:

Demonstração Sejam G e H pontos nas semi-retas S_{AB} e S_{AC}, respectivamente, tais que $AG = DE$ e $AH = DF$. Pelo caso LAL de congruência de triângulos, segue que $AGH = DEF$. Assim, $A\hat{G}H = \hat{E} = \hat{B}$, o que implica que GH e BC são paralelas. O Teorema 5.5 afirma que

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}},$$

ou seja,

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}}.$$

Da mesma forma, mostramos que

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}.$$

□

Se dois triângulos possuem dois pares de ângulos congruentes, então o terceiro par também será congruente, já que a soma dos ângulos de um triângulo é 180°. Logo, se dois triângulos ABC e DEF são tais que $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$, então $ABC \sim DEF$. De fato, na demonstração anterior não fizemos uso da congruência $\hat{C} = \hat{F}$. O próximo teorema é também conhecido como 2° caso de semelhança de triângulos.

Teorema 5.7 (Caso LAL de semelhança)**.** *Se dois triângulos ABC e DEF são tais que $\hat{A} = \hat{D}$ e*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}},$$

então $ABC \sim EFG$.

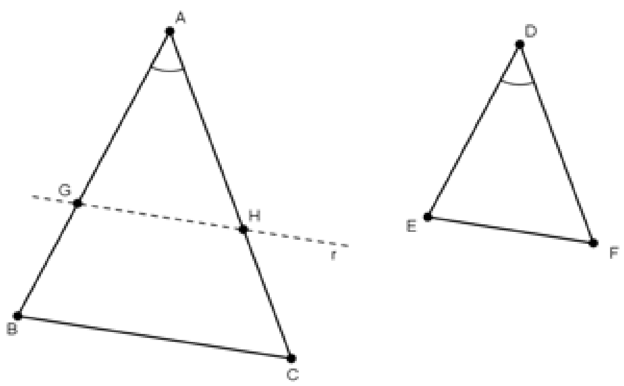

Figura 5.9:

Demonstração Seja G um ponto na semi-reta S_{AB} tal que $AG = DE$. Sejam r a reta paralela a BC que passa por G e H o ponto de interseção desta reta com a semi-reta S_{AC}. Como r é paralela a BC, segue que $A\hat{G}H = A\hat{B}C$ e $A\hat{H}G = A\hat{C}B$, o que implica que $ABC \sim AGH$, pelo caso AAA de semalhança de triângulos. Como

$$AG = DE \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}},$$

segue que

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}},$$

ou seja, $DF = AH$.
Logo, pelo caso LAL de congruência, segue que $AGH = DEF$. Como $AGH \sim ABC$, então $ABC \sim DEF$. □

O próximo teorema é conhecido também como o 3° caso de semelhança de triãngulos.

Teorema 5.8 (Caso LLL de semelhança)**.** *Se em dois triângulos ABC e DEF tem-se*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}},$$

então $ABC \sim DEF$.

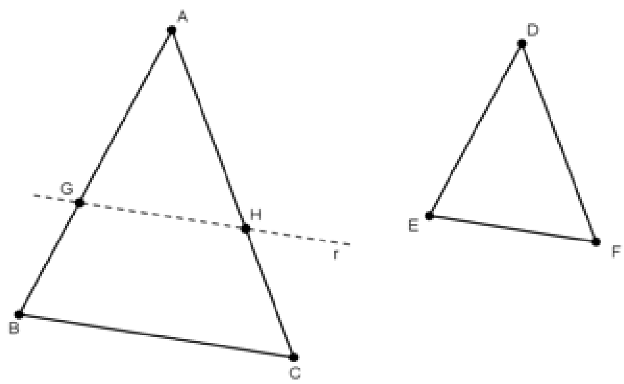

Figura 5.10:

Demonstração Sejam G em ponto de S_{AB} tal que $AG = DE$ e H o ponto de interseção da reta paralela a BC que passa por G.

Note que $A\hat{G}H = \hat{B}$, o que implica que $AGH \sim ABC$, pelo caso AAA de semelhança de triângulos. Em particular

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{BC}}.$$

Mas como

$$AG = DE \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}},$$

então

$$\frac{\overline{GH}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}$$

o que implica que

$$EF = GH.$$

Da mesma forma, mostramos que $AG = DE$ e $AH = DF$.
Logo, $ABC \sim EFG$. □

Teorema 5.9. *Seja ABC um triângulo retângulo cujo ângulo reto é $\hat{C}$. Seja D o pé da perpendicular baixada de C a AB. Então $ACD \sim ABC \sim CBD$.*

A demonstração baseia-se no fato que a soma dos ângulos internos de um triângulo retângulo é 180° e no caso AAA de semelhança de triângulos. Usaremos este teorema para a demonstração do Teorema de Pitágoras a seguir.

Teorema 5.10 (Teorema de Pitágoras)**.** *Seja ABC um triângulo retângulo cujo ângulo reto é $\hat{C}$. Se $\overline{AB} = c, \overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, então $c^2 = a^2 + b^2$.*

Demonstração Seguindo a figura anterior, temos $ACD \sim ABC \sim CBD$, o que implica que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}}.$$

Assim,

$$b^2 = c\overline{AD} \;\text{ e }\; a^2 = c\overline{DB}$$

implica que

$$a^2 + b^2 = c(\overline{AD} + \overline{DB}) = c^2.$$

□

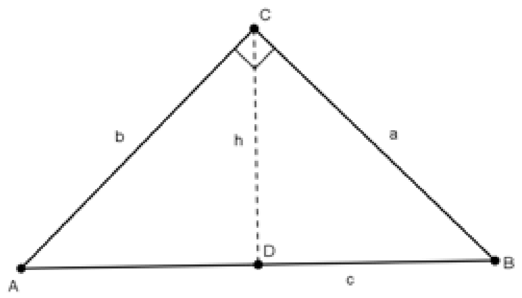

Figura 5.11:

Exercício 5.4. Nas condições anteriores ,prove que $h^2 = \bar{A}D\hat{D}B$.

O próximo teorema é simplesmente a recíprova do Torema de Pitágoras.

Teorema 5.11. *Se a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo e satisfazem $c^2 = a^2 + b^2$, então o triângulo é retângulo com hipotenusa c.*

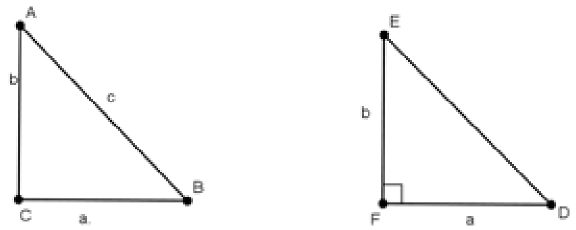

Figura 5.12:

Demonstração Seja ABC um triângulo com $\overline{AB} = c, \overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Seja $D\hat{F}E$ um ângulo reto com $EF = AC$ e $DF = BC$. Pelo Teorema de Pitágoras, temos que $\overline{DE} = \sqrt{a^2 + b^2} = c$. Pelo caso LLL de congruência de triângulos, temos $ABC = EDF$. $\square$

Exercício 5.5. Mostre que em qualquer triângulo, o produto de uma base e a correspondente altura é independente da escolha da base.

RESUMO

Nesta aula introduzios o Axioma das Paralelas, que nos permitiu mostrar que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é $180°$. Estudamos algumas propriedades dos paralelogramos. Além disso, definimos semelhança de triângulos e mostramos três casos de semelhança. Como aplicação de semelhança de triângulos, mostramos o Teorema de Pitágoras, que diz que em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula iremos estudar angulos inscritos num círculos. Também estudaremos polígonos inscritíveis e circunscritíveis num círculo.

ATIVIDADES

1. Prove que a soma das medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo é $90°$.

2. Prove que a medida do ângulo externo de um triângulo é igual a soma das medidas dos ângulos internos a ele não adjacentes.

3. O que é maior, a base ou a lateral de um triângulo isósceles cujo ângulo oposto à base mede $57°$?

4. Quanto medem os ângulos de um triângulo se eles estão na mesma proporção que os números 1, 2 e 3?

5. Se um triângulo retângulo possui um ângulo que mede 30°, mostre que o cateto oposto a este ângulo mede a metade da hipotenusa.

6. Seja ABC um triângulo isósceles com base AB. Sejam M e N os pontos médios dos lados CA e CB, respectivamente. Mostre que o reflexo do ponto C relativamente à reta que passa por M e N é exatamente o ponto médio do segmento AB.

7. Um *retângulo* é um quadrilátero que tem todos os seus ângulos retos. Mostre que, todo retângulo é um paralelogramo.

8. Um *losango* é um paralelogramo que tem todos os seus lados congruentes. Mostre que, as diagonais de um losango cortam-se em ângulo reto e são bissetrizes dos seus ângulos.

9. Pode existtir um triângulo ABC em que a bissetriz do ângulo $\hat{A}$ e a bissetriz do ângulo externo no vértice B sejam paralelas?

10. Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. Mostre que a bissetriz do seu ângulo externo no vértice A é paralela a sua base.

11. Na figura 5.13 AB, AC e CD são congruentes. Determine o ângulo β em função do ângulo α.

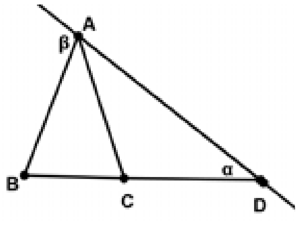

Figura 5.13:

12. Na figura 5.14 determine o valor de $\alpha + \beta + \gamma + \theta$.

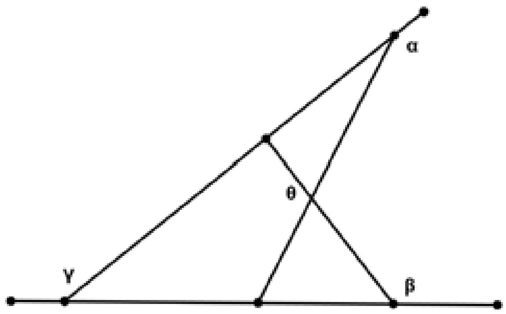

Figura 5.14:

13. Mostre que, se os ângulos opostos de um quadrilátero são congruentes, então o quadrilátero é um paralelogramo.

14. Mostre que, se as diagonais de um quadrilátero se intersectam em um ponto que é ponto médio de ambas, então o quadrilátero é um paralelogramo.

15. Mostre que, se as diagonais de um paralelogramo são congruentes, então o paralelogramo é um retângulo.

16. Mostre que, os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são vértices de um paralelogramos.

17. Mostre que dois triângulos equilátero são sempre semelhantes.

18. Considere um triângulo ABC e um ponto $D \in AC$ tal que $BDA \sim ABC$. Conclua que o triângulo BDA é isósceles.

19. Na figura (pg 114) o triângulo ABC é equilátero, as três retas ligando os lados AB a AC são paralelas a BC, dividem o lado AB em quatro segmentos congruentes. Se $\overline{DG} + \overline{EH} + \overline{FI} = 18$, determine o perímetro do triângulo ABC.

20. Considere o triângulo EFG formado pelos pontos médios dos lados do triângulo ABC. Qual a relação entre seus perímetros?

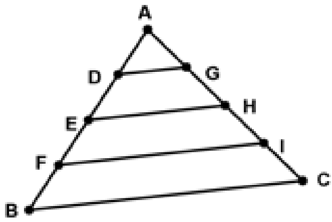

Figura 5.15:

21. Prove que alturas correspondentes em triângulos semelhantes estão na mesma razão que os lados correspondentes.

22. Seja ABC um triângulo, D o ponto médio de AC e E o ponto médio de BC. Sabendo que BD é perpendicular a AE, $\overline{AC} = 7$, determine $\overline{AB}$.

23. Seja ABC um triângulo retângulo em que $\hat{C}$ é o ângulo reto. Trace a altura a partir do ponto C. Se a e b são comprimentos dos catetos e h é o comprimento da altura, mostre que

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

24. Os lados de um triângulo ABC medem: $\overline{AB} = 20$cm, $\overline{BC} = 15$cm e $\overline{CA} = 10$cm. Sobre o lado BC marca-se um ponto D de modo que $\overline{BD} = 3$cm e traçam-se pelo ponto D retas paralelas aos lados AB e AC as quais intercectam, respectivamente, nos pontos F e E. Mostre que o quadrilátero $AEDF$ é um paralelogramo e determine seu perímetro.

LEITURA COMPLEMENTAR

1. BARBOSA, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana.* SBM.

2. EUCLIDES, *Os Elementos.* Unesp. Tradução: Irineu Bicudo.

3. GREENBERG, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History.* Third Edition. W. H. Freeman.

4. POGORELOV, A. V., *Geometria Elemental.* MIR.

5. MOISE, E. E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint.* Third edition. Addison-Wesley.