

O Círculo

META:

Estudar propriedades básicas do círculo.

OBJETIVOS:

Estudar retas tangentes a um círculo.

Estudar ângulo inscritos no círculo.

Identificar polígonos inscritíveis e circunscritíveis num círculo.

PRÉ-REQUISITOS

O aluno deve ter compreendido todas as aulas anteriores, principalmente os casos de congruência de triângulos.

O Círculo

6.1 Introdução

O terceiro postulado de Euclides diz que é possível traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio. Com os nossos axiomas, este postulado é simplesmente uma consequência.

Até o momento nós estudamos apenas triângulo e quadriláteros, figuras planas definidas por pontos e retas. Nesta aula começaremos nosso estudo do círculo, que é uma figura plana definida através da noção de distância entre dois pontos. Veremos quais as consequências de um ângulo inscrito em um polígono, e também quando um polígono possui um círculo inscrito e outro circunscrito.

6.2 O Círculo

Seja P um ponto e r um número positivo.

Definição 6.1. O *círculo* com centro P e raio r é o conjunto dos pontos Q tais que $\overline{PQ} = r$.

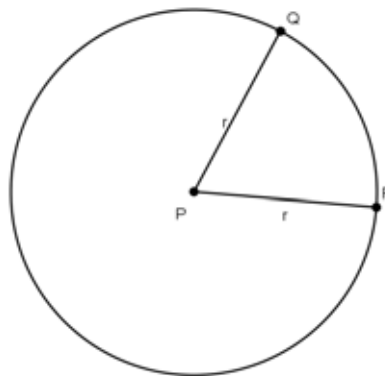


Figura 6.1:

Dois ou mais círculos com o mesmo centro são ditos *concêntricos*. Se Q é qualquer ponto do círculo, então o segmento PQ é um *raio* do círculo, e Q é a extremidade do raio. Se Q e R são pontos do círculo, então QR é uma *corda* do círculo. Uma corda que contém

o centro é denominada um *diâmetro* do círculo. Evidentemente, o comprimento de todo diâmetro é o número $2r$. Este número é denominado o diâmetro do círculo.

Observação Note que a palavra raio é usada com dois sentidos. Ela pode significar um número r ou um segmento PQ . Porém, no contexto sempre será fácil identificar o significado. Quando falamos “o raio”, falamos do número r , e quando falamos de “um raio”, falamos de um segmento. Da mesma forma, para a palavra diâmetro.

Definição 6.2. Uma reta é tangente a um círculo se possui um único ponto em comum. O ponto em comum é denominado de ponto de tangência. Se uma reta intersecta um círculo em dois pontos, ela é denominada reta secante.

Teorema 6.1. *Se uma reta é perpendicular a um raio de um círculo em sua extremidade, então a reta é tangente ao círculo.*

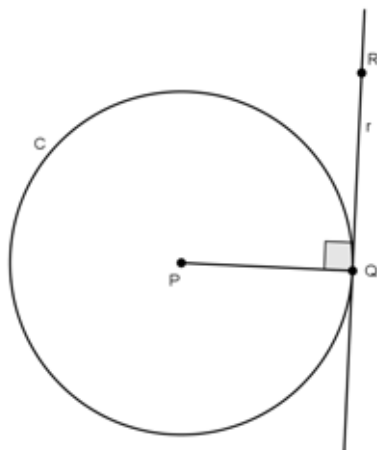


Figura 6.2:

Demonstração Sejam C um círculo com centro em P , PQ um raio e r uma perpendicular a PQ em Q .

O Círculo

Se R é qualquer outro ponto de r , então $\overline{PR} > \overline{PQ}$, já que o menor segmento unindo um ponto a uma reta é o segmento perpendicular. Portanto, R está no exterior de C .

Logo, r intersecta C somente no ponto Q , o que implica que r é tangente a C . \square

Teorema 6.2. *Toda tangente r a um círculo C é perpendicular ao raio com extremidade no ponto de tangência Q .*

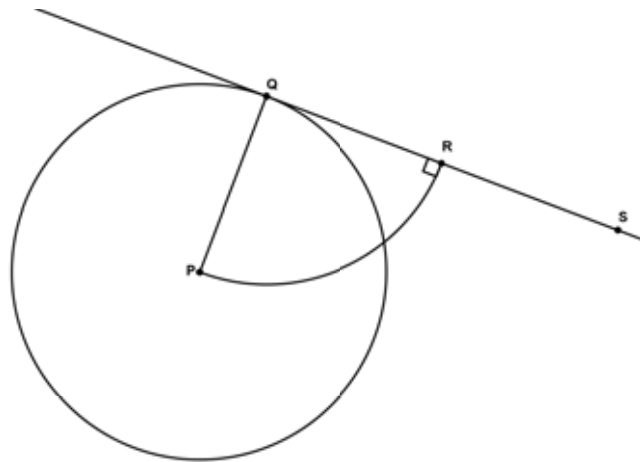


Figura 6.3:

Demonstração Suponha que PQ não seja perpendicular a r . Então, seja R um ponto de r tal que PR é perpendicular a r . Sabemos que existe um ponto S na reta r tal que $Q * R * S$ e $\overline{RQ} = \overline{RS}$. Pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$\overline{PR}^2 + \overline{RQ}^2 = \overline{PQ}^2$$

e

$$\overline{PR}^2 + \overline{RS}^2 = \overline{PS}^2,$$

o que implica que

$$\overline{PQ} = \overline{PS}.$$

Logo, S pertence ao círculo, e isto implica que r não é tangente ao círculo. \square

Proposição 6.19. *Um raio é perpendicular a uma corda (que não é um diâmetro) se e somente se a divide em dois segmentos congruentes.*

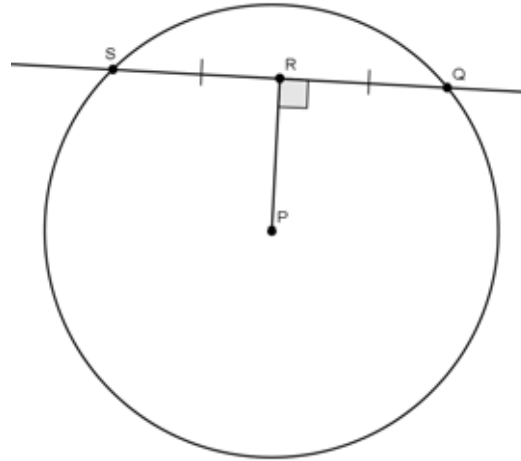


Figura 6.4:

Demonstração Suponha inicialmente que um raio PR seja perpendicular a uma corda AB que não é um diâmetro.

Seja M o ponto de interseção de PR com AB . Como $PA = PB$, segue que APB é um triângulo isósceles com base AB . Então PM é a altura de APB com respeito a AB . Pela Proposição 3.8, temos que a altura coincide com a mediana.

Logo, $AM = MB$.

Para a recíproca, a demonstração é análoga ao caso anterior, já que em um triângulo isósceles a altura coincide com a mediana. \square

Exercício 6.1. Mostre que em um círculo duas cordas são congruentes se e somente se elas estão à uma mesma distância do centro do círculo.

A demonstração deste exercício é simples, basta usar congruência de triângulo retângulos.

6.3 Ângulos Inscritos em um Círculo

Sejam A e B pontos de um círculo de centro P . Considere a reta r que passa por A e B . Cada semi-plano determinado por r contém uma parte do círculo chamada arco.

Definição 6.3. O arco contido no semi-plano contendo o centro é chamado de *arco maior* e o outro arco é denominado *menor*.

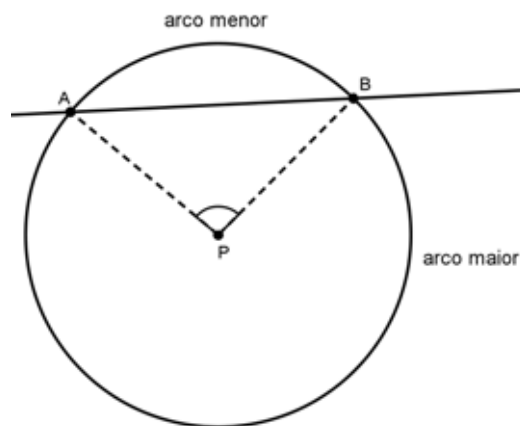


Figura 6.5:

Se \widehat{APB} é raso, cada arco é um semi-círculo.

Definição 6.4. O ângulo \widehat{APB} é denominado de *ângulo central*.

A medida em graus do arco menor é a medida do ângulo central \widehat{APB} . A medida em graus do arco maior é $360^\circ - \widehat{APB}$.

Exercício 6.2. Em um mesmo círculo, cordas congruentes determinam ângulos centrais congruentes.

Para a demonstração deste exercício use o caso LLL de congruência de triângulos.

Definição 6.5. Um ângulo está *inscrito* em um círculo se seu vértice A pertence ao círculo e os lados intersectem o círculo em pontos, B e C , distintos do vértice. O arco determinado por B e C

que não contém o vértice A é denominado de *arco correspondente* ao ângulo inscrito dado.

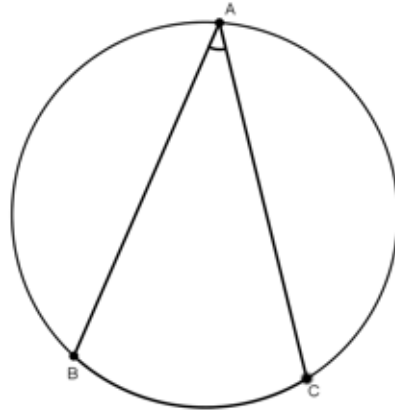


Figura 6.6:

Dizemos também que o ângulo *subtende* o arco.

Proposição 6.20. *Todo ângulo inscrito em um círculo tem a metade da medida do arco correspondente.*

Demonstração Seja $B\hat{A}C$ um ângulo inscrito em um círculo de centro P .

Temos três casos a considerar.

- Caso 1: Suponha que um dos lados do ângulo $B\hat{A}C$ contém um diâmetro.

Note que PAB é isósceles com base AB . Assim, $B\hat{A}P = P\hat{B}A$. Além disso,

$$A\hat{B}P + B\hat{P}A + P\hat{A}B = 180^\circ$$

e

$$B\hat{P}C + B\hat{P}A = 180^\circ.$$

Logo, $C\hat{A}B = P\hat{A}B = \frac{1}{2}P\hat{P}C$.

O Círculo

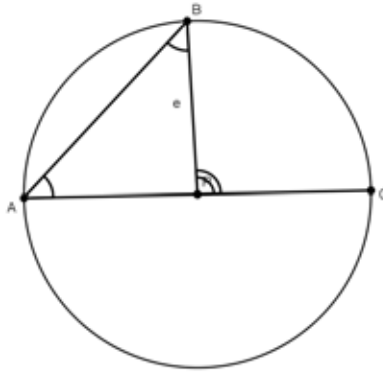


Figura 6.7:

- Caso 2: Suponha que B e C estão em lados opostos do diâmetro com extremidade A .

Seja D a outra extremidade do diâmetro contendo A . Assim,

$$\widehat{BAC} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC}.$$

Pelo caso 1, temos que

$$\widehat{BAD} = \frac{1}{2}\widehat{BPD} \text{ e } \widehat{DAC} = \frac{1}{2}\widehat{DPC}.$$

Portanto, $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BPD} + \frac{1}{2}\widehat{DPC} = \frac{1}{2}\widehat{BPC}$.

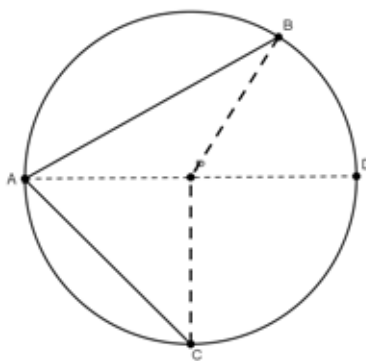


Figura 6.8:

- Caso 3: Suponha que B e C estão no mesmo lado do diâmetro contendo A .

Basta ver que, pelo caso 1 novamente, obtemos

$$\widehat{BAC} = \widehat{BAD} - \widehat{CAD} = \frac{1}{2}\widehat{BPD} - \frac{1}{2}\widehat{CPD} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

□

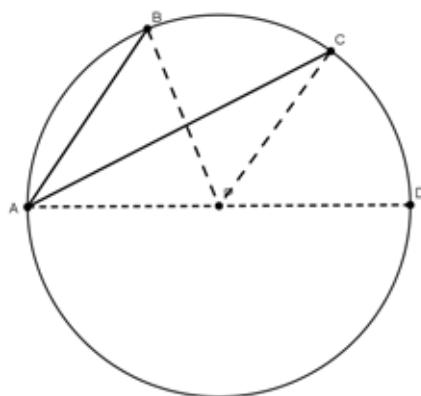


Figura 6.9:

Corolário 6.1. *Todos os ângulos inscritos no mesmo arco são congruentes.*

Corolário 6.2. *Um ângulo inscrito em um semi-círculo é reto.*

A prova destes corolários são imediatas e deixada ao aluno.

Proposição 6.21. *Sejam AB e CD cordas distintas de um círculo que se intersectam em um ponto P . Então $\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$.*

Demonstração Pelo Corolário 6.1 temos $\widehat{DAB} = \widehat{DCB}$ e $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$. Como \widehat{APD} e \widehat{BPC} são opostos pelo vértices, então são congruentes.

Logo, pelo caso AAA de semelhança de triângulos, segue que $APD \sim CPB$.

O Círculo

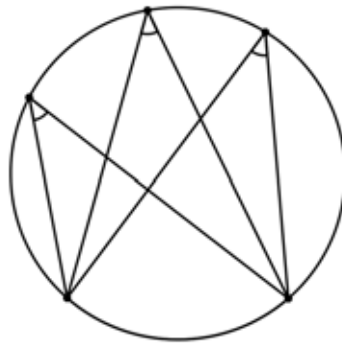


Figura 6.10:

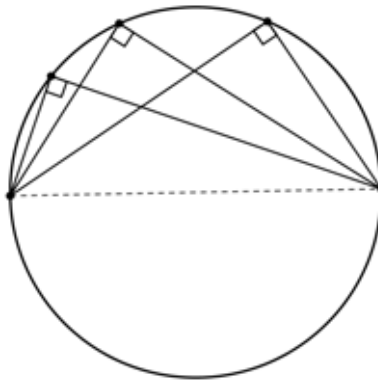


Figura 6.11:

Portanto,

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}},$$

que é equivalente a $\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$. □

Proposição 6.22. *Se os dois lados de um ângulo com vértice P são tangentes a um círculo de centro O nos pontos A e B , então*

a) $\hat{A}PB = 180^\circ$ menos o arco menor determinado por A e B .

b) $PA = PB$.

Demonstração Pelo Teorema 6.2, segue que $\hat{O}AP = \hat{O}BP = 90^\circ$. Como o arco menor determinado por A e B mede $\hat{A}OB$,

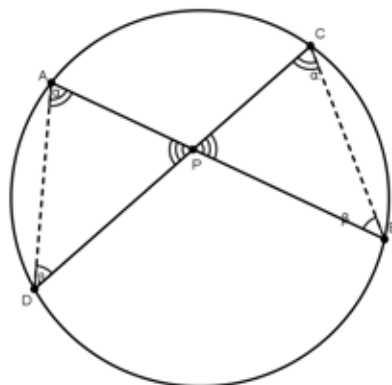


Figura 6.12:

segue que

$$\hat{P} + \hat{PAO} + \hat{AOB} + \hat{OBP} = 360^\circ,$$

implica que

$$\hat{P} = 180^\circ - \hat{AOB},$$

provando a parte (a).

Para provar a parte (b), inicialmente observe que os triângulos PAO e PBO são retângulos em A e B , respectivamente. Como $AO = BO$, por serem raios de um mesmo círculo, e PO é comum a ambos os triângulos, segue $PAO = PBO$, pelo caso de congruência de triângulos retângulos. Em particular, $PA = PB$. \square

6.4 Polígonos Inscritos em um Círculo

Inicialmente vejamos a seguinte definição

Definição 6.6. A *mediatriz* de um segmento é a reta perpendicular ao segmento que passa por seu ponto médio.

Lema 6.1. *Os pontos da mediatriz de um segmento são equidistantes das extremidades do segmento.*

Demonstração Sejam AB um segmento, M seu ponto médio e r sua mediatriz.

O Círculo

Tome um ponto P qualquer de r diferente de M . Observe que temos dois triângulos AMP e BMP com $AM = MB$, já que M é o ponto médio de AB , $\hat{A}MP = \hat{B}MP = 90^\circ$ (pois r é perpendicular a AB) e com um lado MP em comum.

Logo, pelo caso LAL de congruência de triângulos, temos que $AMP = BMP$, em particular $AP = BP$, que é o que queríamos demonstrar. \square

Definição 6.7. Um polígono está *inscrito* num círculo se todos os seus vértices pertencem ao círculo.

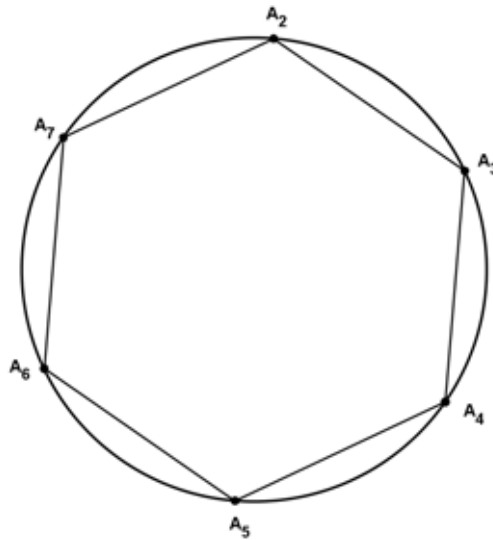


Figura 6.13:

Proposição 6.23. *Todo triângulo está inscrito em algum círculo.*

Demonstração Considere um triângulo ABC . Seja m a reta perpendicular a AB e passando por seu ponto médio M . Seja n a reta perpendicular a BC e passando por seu ponto médio N . Seja P o ponto de interseção de m com n . Pelo Lema 6.1, segue que todo ponto de m é equidistante de A e B e todo ponto de n é equidistante de B e C .

Logo, P é o centro do círculo que contém A, B e C . \square

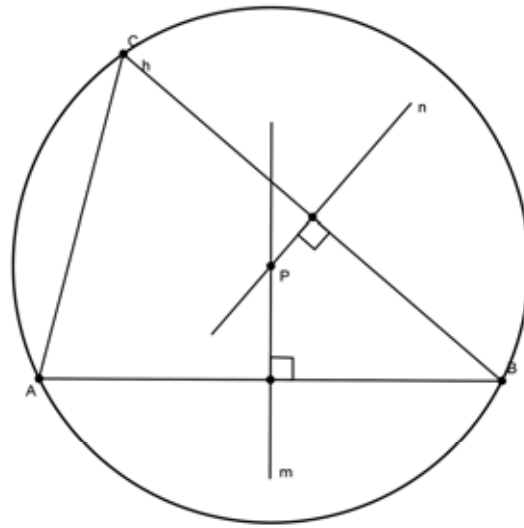


Figura 6.14:

Corolário 6.3. *As mediatrizes dos lados de um triângulo encontram-se em um mesmo ponto.*

A demonstração deste corolário é uma aplicação direta da Proposição 6.23 e deixada para o aluno. O próximo corolário é basicamente a Proposição 6.23.

Corolário 6.4. *Três pontos não colineares determinam um círculo.*

Mostramos que qualquer triângulo está inscrito em um círculo. Então, podemos perguntar se qualquer polígono pode ser inscrito em algum círculo. Em geral esta pergunta tem uma resposta negativa, visto que a condição de que um polígono esteja inscrito em um círculo acarreta fortes restrições sobre sua medida.

Para um quadrilátero temos a seguinte proposição.

Proposição 6.24. *Um quadrilátero pode ser inscrito em um círculo se e somente se possui um par de ângulos opostos suplementares.*

O Círculo

Demonstração Suponhamos que o quadrilátero $ABCD$ esteja inscrito em um círculo de centro P . Note que os ângulos \hat{DAB} e \hat{DCB} subtendem os dois arcos determinados por B e D . Assim, pela Proposição 6.20, temos

$$\hat{DAB} = \frac{1}{2}\hat{DPB} \quad \text{e} \quad \hat{DCB} = \frac{1}{2}\hat{DPB}.$$

Aqui estamos indicando pela mesma notação, \hat{DPB} , dois ângulos cuja soma é 360° .

Logo, $\hat{DAB} + \hat{DCB} = 180^\circ$.

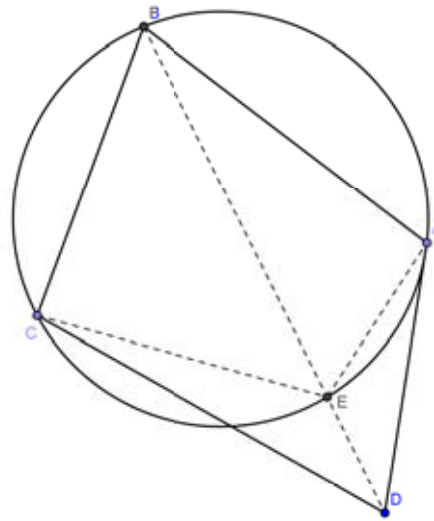


Figura 6.15:

Suponha agora que $ABCD$ é um quadrilátero com $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$. Vamos mostrar que $ABCD$ está inscrito em algum círculo.

Pelo Corolário 6.4 podemos traçar um círculo pelos pontos A , B e C .

Temos três casos possíveis.

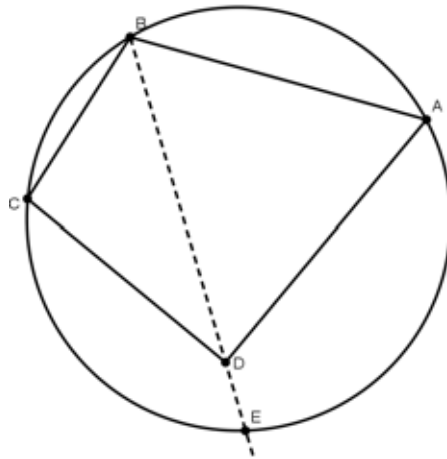


Figura 6.16:

Caso 1: D esta fora do círculo.

Seja E o ponto de interseção de BD com o círculo. Pelo Teorema do Ângulo Externo, temos

$$\hat{AEB} > \hat{ADB} \text{ e } \hat{BEC} > \hat{CDB}.$$

Assim,

$$\hat{AEC} = \hat{AEB} + \hat{BEC} > \hat{ADB} + \hat{CDB} = \hat{ADC}.$$

Por outro lado,

$$\hat{ABC} + \hat{ADC} = 180^\circ,$$

por hipótese, e

$$\hat{ABC} + \hat{AEC} = 180^\circ,$$

pela primeira parte.

Logo, $\hat{ADC} = \hat{AEC}$, que é uma contradição.

Caso 2: D pertence ao interior do círculo.

Neste caso, tome E o ponto de interseção do círculo com a semi-reta S_{BD} . Da mesma forma que antes, mostramos que $\hat{ADC} = \hat{AEC}$ e $\hat{ADC} > \hat{AEC}$. Contradição.

O Círculo

Logo, só podemos ter que D pertence ao círculo. \square

Definição 6.8. Um círculo está inscrito em um polígono se todos os lados são tangentes ao círculo.

Neste caso, dizemos que o polígono *circunscreve o círculo*.

Proposição 6.25. *Todo triângulo possui um círculo inscrito.*

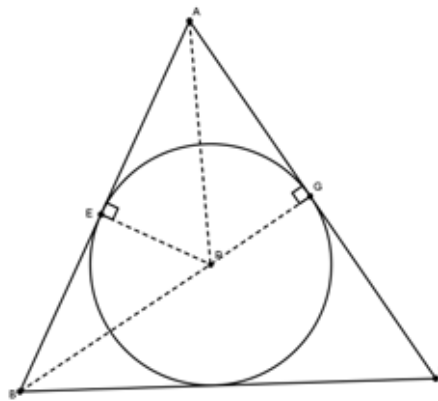


Figura 6.17:

Demonstração Seja ABC um triângulo e P o ponto de encontro das bissetrizes de \hat{A} e \hat{B} .

Afirmção: P é equidistante dos lados do triângulo.

De fato, se E e G são os pés das perpendiculares baixadas de P a AB e a AC , respectivamente, então

$$P\hat{A}E = P\hat{A}G \quad \text{e} \quad P\hat{E}A = P\hat{G}A = 90^\circ.$$

Logo, $PAE = PAG$, já que PA é comum a ambos. Em particular, $PE = PG$. Da mesma forma, mostramos que P é equidistante de BC e AB . \square

Corolário 6.5. *As bissetrizes de um triângulo encontram-se em um ponto.*

A demonstração deste corolário é imediata da Proposição 6.25.

Definição 6.9. Um *polígono regular* é um polígono com todos os lados e ângulos congruentes.

Proposição 6.26. *Todo polígono regular está inscrito em um círculo.*

Demonstração Seja $A_1A_2A_3\dots A_n$ um polígono regular. Pelo Corolário 6.4, podemos traçar um círculo contendo A_1 , A_2 e A_3 . Seja P o centro deste círculo.

Vamos mostrar que os vértices A_4, A_5, \dots, A_n pertencem a este círculo.

Para isto, note que o triângulo PA_2A_3 é isósceles, já que PA_2 e PA_3 são raios de um mesmo círculo. Assim, $\hat{P}A_2A_3 = \hat{P}A_3A_2$. Como o polígono é regular, todos os seus ângulos são congruentes. Portanto, $A_1\hat{A}_2A_3 = A_2\hat{A}_3A_4$. Além disso, temos

$$A_1\hat{A}_2A_3 = A_1\hat{A}_2P + P\hat{A}_2A_3$$

e

$$A_2\hat{A}_3A_4 = A_2\hat{A}_3P + P\hat{A}_3A_4,$$

implicando que $A_1\hat{A}_2P = P\hat{A}_3A_4$. Também temos que $A_1A_2 = A_3A_4$, já que são lados de um polígono regular, e $PA_2 = PA_3$, pelo fato que A_1 e A_2 pertencem a um círculo de raio P . Pelo caso LAL de congruência de triângulos, temos que $PA_1A_2 = PA_4A_3$. Em particular obtemos $PA_4 = PA_1$, implicando que A_4 pertence ao círculo contendo A_1, A_2 e A_3 .

Analogamente mostramos que cada um dos pontos A_5, \dots, A_n pertencem a este mesmo círculo. \square

Corolário 6.6. *Todo polígono regular possui um círculo inscrito.*

Demonstração Seja $A_1A_2\dots A_n$ um polígono regular. Pela Proposição 6.26, podemos traçar um círculo contendo A_1, A_2, \dots, A_n . Seja P o centro deste círculo.

Pelo caso LLL de congruência de triângulos, mostramos que todos os triângulos $A_1PA_2, A_2PA_3, A_3PA_4, \dots$ são congruentes. Como

O Círculo

consequência suas alturas relativamente às bases são também congruentes.

Portanto, o círculo de centro P e raio igual a esta altura está inscrito no polígono. (Por que este círculo é tangente aos lados do triângulo?) \square

6.5 Como calcular o comprimento de um círculo?

Até aqui já sabemos calcular a distância entre dois pontos, bastando para isso calcular o comprimento do segmento determinado por estes pontos. A maneira como nós introduzimos o comprimento de um segmento foi através de um axioma. Então podemos perguntar:

Mas como calcular o comprimento de um círculo? É necessário um outro axioma?

De fato, não é necessário introduzir um novo axioma para este fim. Calcula-se o comprimento de um círculo através de uma idéia intuitiva. Aproxima-se o círculo através de polígonos regulares inscritos, cujo perímetro sabemos calcular. A nossa intuição nos diz que se o número de lados do polígono regular for suficientemente grande, então o perímetro do polígono será muito próximo do comprimento do círculo.

De fato, se P é um polígono convexo inscrito em um círculo e A e B são vértices consecutivos de P , então considerando P_1 o polígono cujos os vértices são os vértices de P mais um ponto C do círculo entre os pontos A e B , teremos que o perímetro de P_1 será maior que o perímetro de P , desde que $\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{CB}$. Assim, adicionando-se a um polígono convexo novos vértices, aumentamos o seu perímetro. Além disso, o perímetro de um polígono circunscrito ao círculo é maior que o perímetro de qualquer polígono convexo inscrito.

Assim, temos a seguinte definição

Definição 6.10. O comprimento de um círculo é o menor dos números maior que o perímetro de qualquer polígono convexo nele inscrito.

O comprimento do círculo de raio r é tradicionalmente representado na forma $2\pi r$.

O número π é um velho conhecido dos matemáticos. Os babilônios, por volta de 2000 a 1600 a.C., considerou o comprimento do círculo três vezes o diâmetro, isto é, eles aproximaram π como sendo igual a 3. Os egípcios de 1800 a.C., de acordo com o papiro de Rhind, tomaram a aproximação $\pi \sim \left(\frac{22}{7}\right)^2 \sim 3,1604$. O valor aproximado de π , correto até a 5ª casa decimal é $\pi = 3,141593$.

Em 1789 Johann Lambert provou que π não é um número racional, e em 1882 F. Lindemann provou que π é um número transcendente, ou seja, não raiz de nenhum polinômio com coeficientes inteiros. Isto implica, como veremos nas próximas aulas, que é impossível construir um quadrado com mesma área de um círculo usando somente régua e compasso.

O Círculo

RESUMO

..

Nesta aula vimos algumas propriedades básicas dos círculos. Estudamos algumas relações de ângulos inscritos no círculo e obtemos algumas consequências, como por exemplo, que um quadrilátero está inscrito em algum círculo se e somente se possui um par de ângulo opostos suplementares. Vimos também que todo triângulo e todo polígono regular possui um círculo inscrito e circunscrito.

PRÓXIMA AULA

..

Na próxima aula, vamos usar o que estudamos de círculos e de triângulos para definir uma classe de funções bem conhecidas, as funções trigonométricas.

ATIVIDADES

..

1. Considere dois círculos de raios r_1 e r_2 . Mostre que se eles se intersectam em mais de um ponto então $r_1 + r_2$ é maior do que a distância entre seus centros.
2. Diremos que dois círculos são *tangentes* se são tangentes a uma mesma reta em um mesmo ponto. O ponto mencionado é chamado de *ponto de contato*. Mostre que, quando dois círculos são tangentes, os dois centros e o ponto de contato são colineares.
3. Dois círculos são ditos *tangentes exteriores* se ficam de lados opostos da reta tangente comum. Se os dois ficam do mesmo lado da reta tangente, diz-se que os dois são *tangentes interiores*. Qual a distância entre os centros de dois círculos que são tangentes exteriores sabendo-se que seus raios medem 2cm e 5cm?

4. Prove que, em um mesmo círculo ou em círculos de mesmo raio, cordas equidistantes do centro são congruentes.
5. Em um triângulo equilátero mostre que o círculo inscrito e o círculo circunscrito têm o mesmo centro.
6. Na figura 6.18 as três retas são tangentes simultaneamente aos dois círculos. Estas retas são denominadas *tangentes comuns* aos círculos. Desenhe dois círculos que tenham:

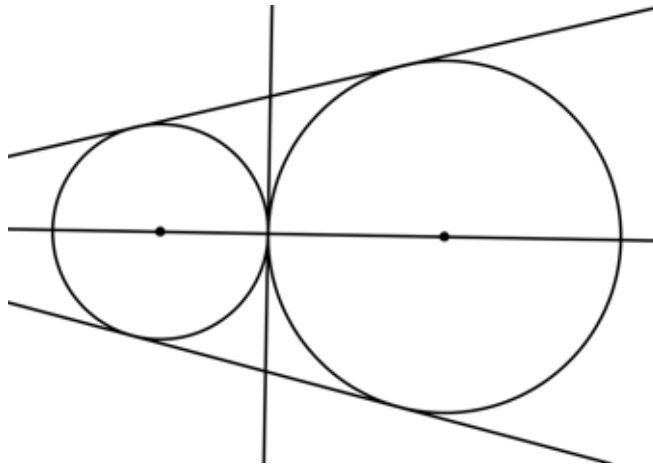


Figura 6.18:

- (a) quatro tangentes comuns.
 - (b) exatamente duas tangentes comuns.
 - (c) somente uma tangente comum.
 - (d) nenhuma tangente comum.
 - (e) mais de quatro tangentes comuns.
7. Na figura relativa ao exercício anterior, os dois círculos são tangentes e a tangente que passa no ponto de contato intersecta as outras duas, determinando um segmento. Determine, em função dos dois raios, o comprimento deste segmento e mostre que o ponto de contato é o seu ponto médio.

O Círculo

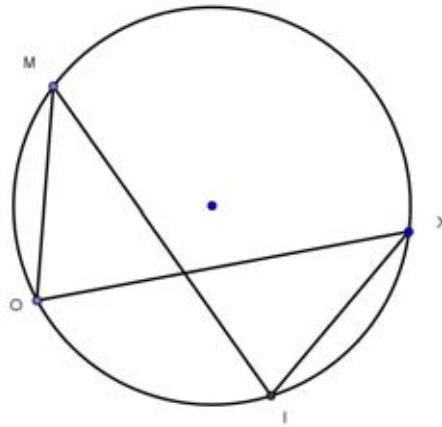


Figura 6.19:

8. Na figura 6.19 $MO = IX$. Prove que $MI = OX$.
9. Na figura 6.20 sabe-se que Y é o centro do círculo e que $BL = ER$. Mostre que BE é paralelo a LR .

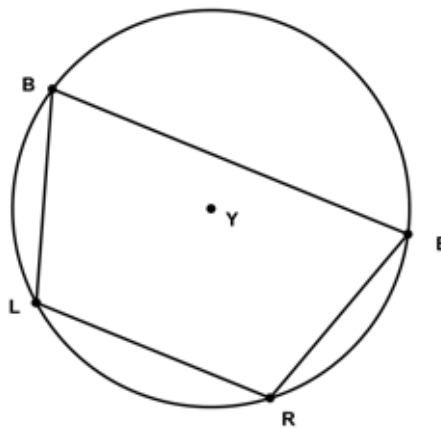


Figura 6.20:

10. Na figura 6.21 o quadrilátero $DIAN$ é um paralelogramo e I , A e M são colineares. Mostre que $DI = DM$.
11. Na figura 6.22 qual dos dois arcos, \widehat{AH} ou \widehat{MY} , tem a maior

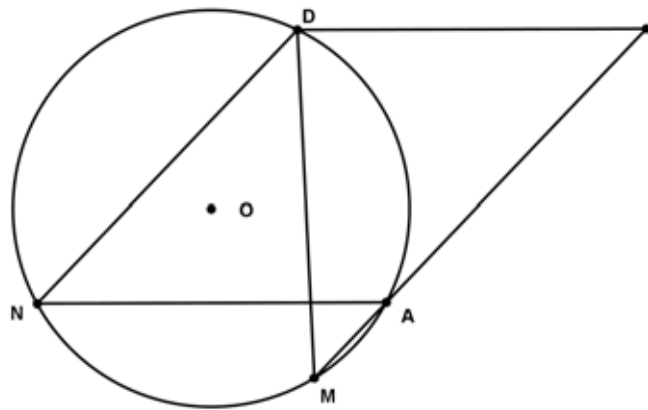


Figura 6.21:

medida em graus? Sabe-se que os dois círculos são concêntricos.

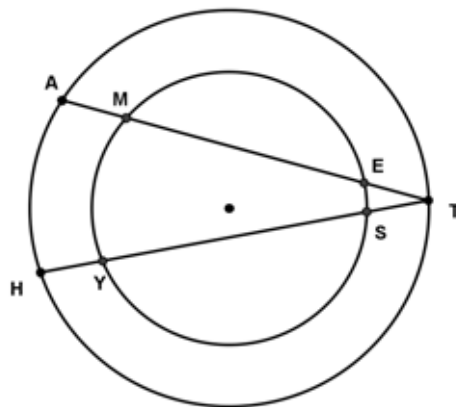


Figura 6.22:

12. Uma reta intersecta um círculo em no máximo dois pontos. As que o intersectam em exatamente dois pontos são chamadas de *secantes*. Um *ângulo secante* é um ângulo cujos lados estão contidos em duas secantes do círculo e que cada lado intersecta o círculo em pelo menos um ponto excluído o vértice. Vamos chamar de *região angular* associada a um ân-

O Círculo

gulo \widehat{ABC} a intrseção dos seguintes dois semi-planos: o que contém o ponto C e é determinado por AB , e o que contém o ponto A e é determinado por BC . Dados um ângulo e um círculo, a parte do círculo contida na região angular associada ao ângulo dado designado *arco* (ou arcos) *determinado* (determinados) *pelo ângulo*. Nos ítems seguintes indicaremos por \widehat{AB} a medida em graus do arco \widehat{AB} .

- (a) Na figura 6.23 à esquerda \widehat{APB} é um ângulo secante cujo vértice está dentro do círculo. Mostre que

$$\widehat{APB} = \frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{CD}).$$

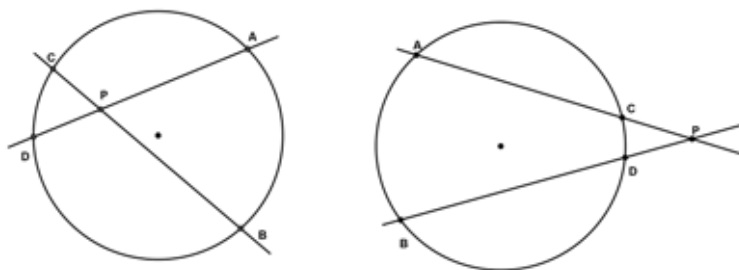


Figura 6.23:

- (b) Na figura 6.23 à direita \widehat{APB} é um ângulo secante cujo vértice está fora do círculo. Mostre que

$$\widehat{APB} = \frac{1}{2}(\widehat{AB} - \widehat{CD}).$$

13. Prove que todo paralelogramo inscrito em um círculo é um retângulo.
14. Um círculo está inscrito em um triângulo retângulo cujos catetos medem b e c e a hipotenusa mede a . Determine o diâmetro do círculo.

15. Dois círculos são tangentes exteriores sendo A o ponto de contato. Seja B um ponto de um dos círculos e C um ponto do outro tais que a reta que passa por estes pontos é tangente comum aos dois círculos. Mostre que o ângulo $B\hat{A}C$ é reto.
16. Na figura 6.24 à esquerda, $A\hat{P}C$ é um ângulo secante cujo vértice encontra-se fora do círculo e que o intersecta em quatro pontos como indicado. Prove que $\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$.

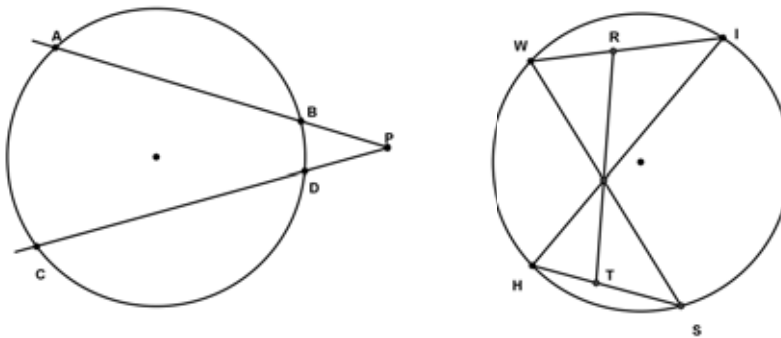


Figura 6.24:

17. Na figura à direita, WS e HI são cordas que se intersectam no ponto G , e RT é bissetriz do ângulo $W\hat{G}I$. Prove que $\overline{WR} \cdot \overline{TS} = \overline{RI} \cdot \overline{HT}$.
18. Na figura seguinte as retas são tangentes comuns aos dois círculos. Prove que m_1 e m_2 se intersectam na reta que contém os centros dos círculos. Prove que se os raios dos dois círculos são diferentes, as retas n_1 n_2 também se intersectam na reta que contém os centros.

LEITURA COMPLEMENTAR

..



1. BARBOSA, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana*. SBM.

O Círculo

2. EUCLIDES, *Os Elementos*. Unesp. Tradução: Irineu Bicudo.
3. GREENBERG, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. Third Edition. W. H. Freeman.
4. POGORELOV, A. V., *Geometria Elemental*. MIR.
5. MOISE, E. E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*. Third edition. Addison-Wesley.