AULA 7

Funções Trigonométricas

META:

Introduzir as principais funções trigonométricas: *seno*, *cosseno* e *tangente*.

OBJETIVOS:

Definir as funções seno, cosseno e tangente.
Mostrar algumas identidades trigonométricas.
Calcular os valores das funções seno, cosseno e tangente para alguns ângulos.

PRÉ-REQUISITOS

O aluno para acompanhar esta aula, é necessário que tenha compreendido todos os casos de semelhança de triângulos e as propriedades de ângulos inscritos em um círculo.

7.1 Introdução

Olá caro aluno, espero que esteja curtindo a leitura. Nesta aula iremos iniciar nosso estudo da funções trigonométricas. O estudo destas funções e de suas aplicações é denominado trigonometria. A trigonometria iniciou-se como estudo das aplicações, a problemas práticos, das relações entre os lados de um triângulo.
Algumas funções eram historicamente comuns, mas agora são raramente usadas, como a *corda*, que em notação atual é dada por $\mathrm{crd}\theta = 2\sin(\theta/2)$. Hoje as funções trigonométricas mais conhecidas são as funções *seno*, *cosseno* e *tangente*. De fato, as funções seno e cosseno são as funções principais, visto que todas as outras podem ser colocadas em termos destas.
Nesta aula veremos como utilizar semelhança de triângulo para definir as funções trigonométricas, bem como provrar algumas de suas principais propriedades. Veremos também como calcular alguns valores destas funções tomando triângulo retângulos particulares.

7.2 Funções Trigonométricas

Considere um semicírculo de centro P e diâmetro AB. Tome um ponto C do semicírculo e faça $\alpha = C\hat{P}B$. Seja D um ponto de AB tal que CD seja perpendicular a AB.

Definição 7.1. a) Chama-se *seno do ângulo* α, e denotamos por sen α, ao quociente

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{PC}}.$$

b) Chama-se de *cosseno do ângulo* α, e denotamos por $\cos\alpha$, ao quociente

$$\cos\alpha = \frac{\overline{PD}}{\overline{PC}} \quad \text{se} \quad 0 \leq \alpha \leq 90^\circ$$

ou

$$\cos\alpha = -\frac{\overline{PD}}{\overline{PC}} \quad \text{se} \quad 90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ.$$

c) Chama-se de *tangente do ângulo* α, e denotamos por $\tan\alpha$ ao quociente
$$\tan\alpha = \frac{\text{sen }\alpha}{\cos\alpha}.$$

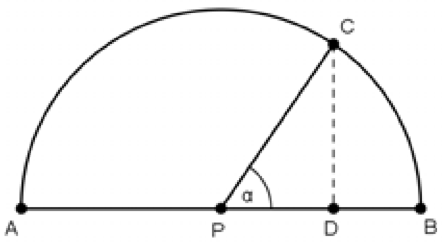

Figura 7.1:

Observação: De acordo com as definições acima podemos deduzir os seguintes valores

$$\text{sen } 0^\circ = 0, \;\; \text{sen } 90^\circ = 1, \quad \text{e} \quad \text{sen } 180^\circ = 0,$$

$$\cos 0^\circ = 1, \;\; \cos 90^\circ = 0, \quad \text{e} \quad \cos 180^\circ = -1$$

e

$$\tan 0^\circ = \tan 180^\circ = 0.$$

Além disso, a tangente não está definida para $\alpha = 90^\circ$.

Proposição 7.27. *O seno e cosseno independem do semi-círculo utilizado para definí-los.*

Demonstração De fato, se temos dois semi-círculos como na figura abaixo e tomamos C e C' tais que $C\hat{P}D = C'\hat{P}'D' = \alpha$, então os triângulos PDC e $P'D'C'$, retângulos em D e D', respectivamente, são semelhantes (Por quê ?). Assim,

$$\frac{\overline{C'P'}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{P'D'}}{\overline{PD}}.$$

Portanto,

$$\text{sen }\alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{C'P'}} \;\; \text{e} \;\; \cos\alpha = \frac{\overline{PD}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{P'D'}}{\overline{P'C'}}.$$

$\square$

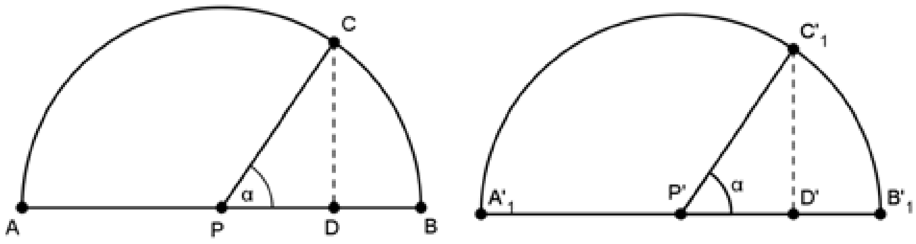

Figura 7.2:

Teorema 7.1. *Para todo ângulo α temos sen $\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$.*

Demonstração Se $\alpha = 0°, 90°$ e $180°$, o resultado é imediato, pelo que vimos anteriormente. Nos outros casos, considere a figura 7.2. Assim,

$$\text{sen }^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{\overline{PD}}{\overline{PC}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{CD}}{\overline{PC}}\right)^2 = \frac{\overline{PD}^2 + \overline{CD}^2}{\overline{PC}^2} = \frac{\overline{PC}^2}{\overline{PC}^2}.$$

Nesta terceira igualdade usamos o Teorema de Pitágoras.
Logo,

$$\text{sen }^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

□

7.3 Fórmulas de Redução

Os próximos resultados irão nos permir calcular os valores de alguns ângulos a partir de outros.

Teorema 7.2. *Se α é um ângulo agudo, então*

a) *sen* $(90° - \alpha) = \cos\alpha$

b) $\cos(90° - \alpha) =$ *sen* α

c) $\tan(90° - \alpha) = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

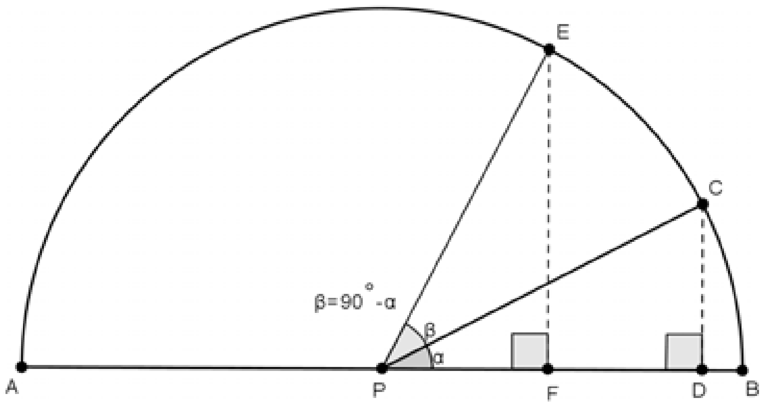

Figura 7.3:

Demonstração Considere a figura abaixo. Como os triângulos PFE e PDC são retos em F e D, e a soma dos ângulos agudos de um triângulo retângulo é 90°, segue que PFE e CDP são congruentes. Em particular,

$$\frac{\overline{PD}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{PF}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{sen } (90^\circ - \alpha) &= \frac{\overline{EF}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PC}} = \cos\alpha, \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \frac{\overline{PF}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{PC}} = \text{sen } \alpha, \end{aligned}$$

e

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \frac{\text{sen } (90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen } \alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

□

Teorema 7.3. *Para todo α temos*

a) *sen* $(180^\circ - \alpha) =$ *sen* α

b) $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$

Demonstração Para $\alpha = 0^\circ, 90^\circ$ ou 180°, segue diretamente. Considere a figura abaixo. Como antes, mostramos que $PDC =$

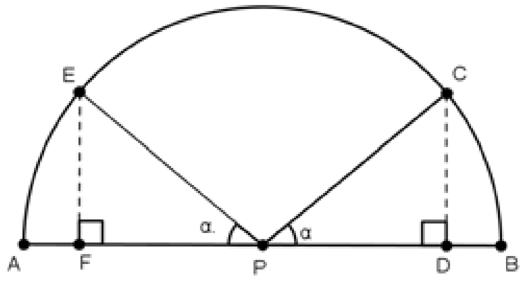

Figura 7.4:

PFE, o que implica que

$$\text{sen }(180^\circ - \alpha) = \frac{\overline{EF}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{PC}} = \text{sen }\alpha$$

e

$$|\cos(180^\circ - \alpha)| = \frac{\overline{PF}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PC}} = |\cos\alpha|.$$

Como $\alpha \neq 90^\circ$, então α ou $180^\circ - \alpha$ é agudo e o outro obtuso. Isto implica que $\cos\alpha$ e $\cos(180^\circ - \alpha)$ têm sinais contrários. $\square$

Exercício 7.1. Mostre que se ABC é um triângulo retângulo em C, então

$$\overline{BC} = \overline{AB}\text{sen }\hat{A}, \quad \overline{AC} = \overline{AB}\cos\hat{A} \quad \text{e} \quad \overline{BC} = \overline{AC}\tan\hat{A}.$$

Proposição 7.28.

a) *sen* $45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ *e* $\tan 45^\circ = 1$

b) *sen* $30^\circ = \dfrac{1}{2}, \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *e* $\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Demonstração

a) Seja ABC um triângulo retângulo em $\hat{C}$ e com $AC = BC$. Então $\hat{A} = \hat{B} = 45^\circ$, já que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. O Teorema de Pitágoras implica que

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AC}^2$$

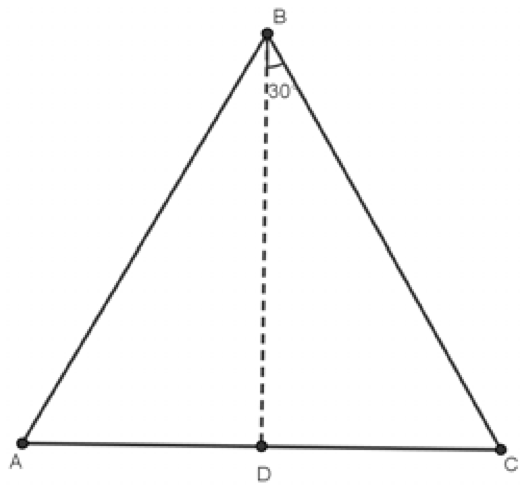

Figura 7.5:

e assim,

$$\overline{AC} = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}.$$

Logo,

$$\text{sen } 45° = \cos 45° = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}/\sqrt{2}}{\overline{AB}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

A tangente é obtida pela simples divisão dos valores do seno e cosseno.

b) Seja ABC um triângulo equilátero. Considere D o ponto médio de AC. Daí, $D\hat{B}C = 30°$ e, pelo Teorema de Pitágoras $\overline{CD} = \frac{\overline{BC}}{2}$. Portanto,

$$\text{sen } 30° = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}/2}{\overline{BC}} = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30° = \sqrt{1 - (\text{sen } 30°)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

□

Usando o Teorema 7.28 e as fórmulas de redução, podemos calcular os valores do seno e cosseno dos ângulos $60°, 120°, 135°$ e $150°$. Deixamos como exercício.

7.4 Lei dos Cossenos

Teorema 7.4. *Seja ABC um triângulo. Então*

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{BC} \cos \hat{C}.$$

Demonstração Se $\hat{C} = 90°$, então não temos nada a fazer, já que $\cos 90° = 0$ e, neste caso, a fórmula reduz-se ao Teorema de Pitágoras.
Suponha que $\hat{C} \neq 90°$.
Seja D o pé da perpendicular da altura do vértice A. Como $\hat{C} \neq 90°$, então $C \neq D$.
Se $D = B$, então $\hat{B} = 90°$. Neste caso

$$\cos \hat{C} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

e

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2,$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{BC}^2 \\ &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{BC} \cdot \overline{AC} \cos \hat{C}, \end{aligned}$$

que é o resultado desejado.
Suponha agora que $D \neq B$ e C.
Neste caso, ADB e ADC são triângulos retângulos em $\hat{D}$. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2$$

e

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2.$$

Subtraindo, obtemos

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{DB}^2 - \overline{DC}^2$$

que é equivalente a

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{DB}^2 - \overline{DC}^2. \tag{7.5}$$

Temos três casos a considerar.

- **Caso 1:** $B * C * D$.

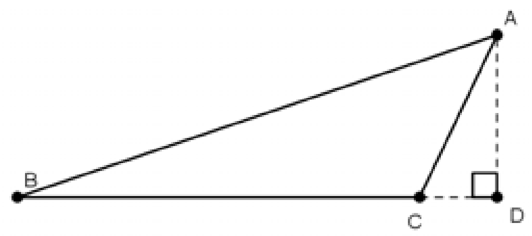

Figura 7.6:

Neste caso,

$$\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD}.$$

Assim, da equação (7.5), obtemos

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + (\overline{BC} + \overline{CD})^2 - \overline{DC}^2 \\ &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2\overline{BC} \cdot \overline{CD} - \overline{CD}^2 \\ &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{BC} \cdot \overline{CD}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\cos A\hat{C}D = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$$

e

$$\cos A\hat{C}B = -\cos(180^\circ - A\hat{C}B) = -\cos A\hat{C}D.$$

Logo,

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{BC} \cdot \overline{AC} \cos \hat{C}.$$

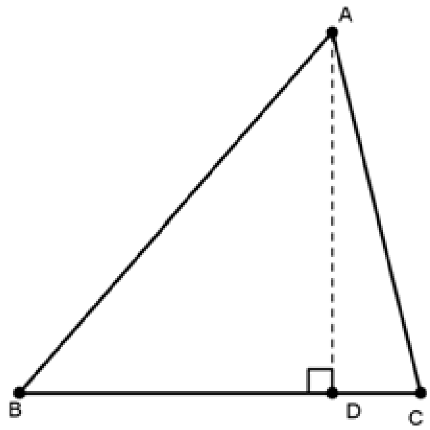

Figura 7.7:

- **Caso 2:** $B * D * C$.

  Neste caso,

$$\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DC} \quad \text{e} \quad \cos\hat{C} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}}.$$

  Assim, a equação (7.5) implica que

$$\begin{aligned}
\overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + (\overline{BC} - \overline{DC})^2 - \overline{DC}^2 \\
&= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{DC}^2 - 2\overline{BC} \cdot \overline{DC} - \overline{DC}^2 \\
&= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{BC} \cdot \overline{DC} \\
&= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{BC} \cos\hat{C}.
\end{aligned}$$

- **Caso 3:** $C * B * D$.

  Neste último caso, temos que

$$\overline{CD} = \overline{CB} + \overline{BD} \quad \text{e} \quad \overline{CD} = \overline{AC} \cos\hat{C}$$

  donde, da equação (7.5) segue que

$$\begin{aligned}
\overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + (\overline{CD} - \overline{BC})^2 - \overline{DC}^2 \\
&= \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{CD} \cdot \overline{BC} - \overline{DC}^2 \\
&= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{BC} \cdot \overline{CD} \\
&= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{ACBC} \cos\hat{C}.
\end{aligned}$$

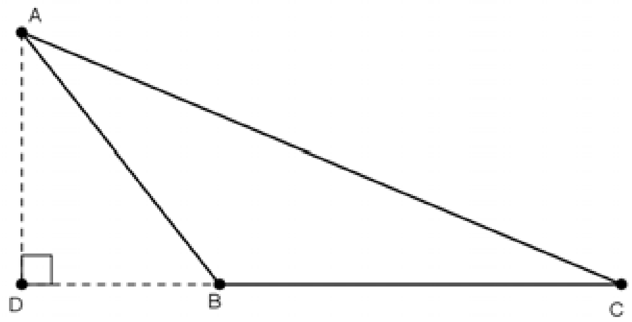

Figura 7.8:

Portanto, fica demonstrada a Lei dos Cossenos. $\square$

7.5 Lei dos Senos

Teorema 7.5. *Seja ABC um triângulo. Então*

$$\frac{sen\ \hat{A}}{\overline{BC}} = \frac{sen\ \hat{B}}{\overline{AC}} = \frac{sen\ \hat{C}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2R},$$

onde R é o raio do círculo circunscrito no triângulo ABC.

Demonstração Considere o círuclo de centro P e raio R que circunscreve o triângulo. Seja D um ponto do círculo tal que BD é um diâmetro. Temos dois casos, A e C estão no mesmo lado de BD ou em lados opostos.

Se A e C estão em lados opostos de BD, então $B\hat{A}C = B\hat{D}C$, por serem ângulos inscritos no círculo que subentende o mesmo arco.

Se A e C estão no mesmo lado de BD, então $ABDC$ é um quadrilátero inscrito no círuclo.

Então, pela Proposição 6.24, temos

$$C\hat{A}B + C\hat{D}B = 180°.$$

Em ambos os casos, sen $B\hat{A}C =$ sen $B\hat{D}C$. Como BCD é retângulo em C, já que está inscrito em um semi-círculo, segue que

$$\text{sen } \hat{A} = \text{sen } B\hat{A}C = \text{sen } B\hat{D}C = \frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{DC}}{2R}.$$

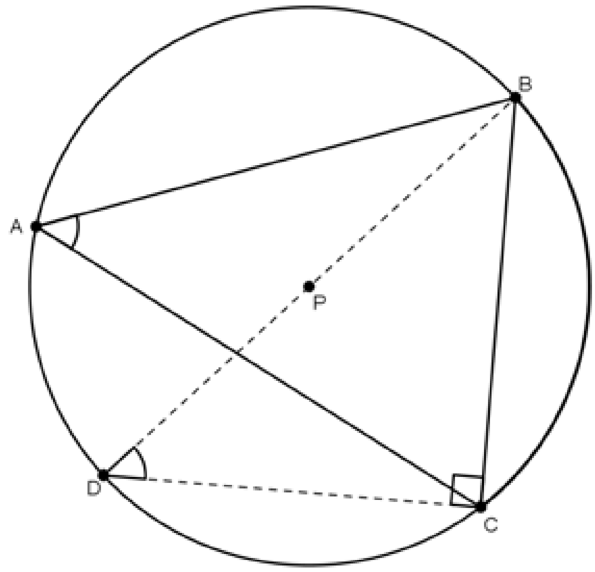

Figura 7.9:

Da mesma forma, mostramos que

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{\overline{AC}}{2R} \text{ e } \text{sen } \hat{C} = \frac{\overline{DC}}{2R}.$$

Disto segue o resultado. $\square$

Teorema 7.6. *Sejam α e β ângulos agudos. Então*

a) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\ \alpha sen\ \beta$

b) $sen\ (\alpha+\beta) = sen\ \alpha\cos\beta + \cos\alpha sen\ \beta.$

Demonstração

a) Considere um ângulo de medida $\alpha+\beta$ e vértice P. Trace uma semi-reta S_{PH} que divide o ângulo em dois ângulos de medidas α e β. Trace uma perpendicular a S_{PH} que intercepta os lados do ângulo $\alpha+\beta$ em A e B. Sejam $\overline{PH} = h, \overline{PB} = b, \overline{PA} = a, \overline{BH} = n$ e $\overline{AH} = m$. Pela Lei dos Cossenos temos que

$$(m+n)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha+\beta), \tag{7.6}$$

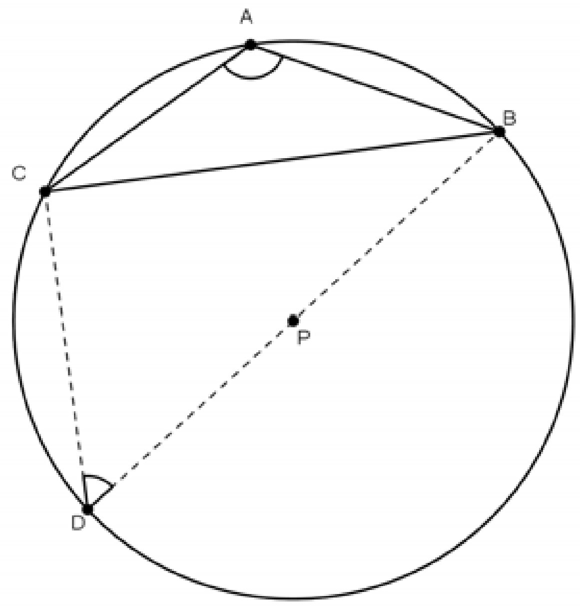

Figura 7.10:

$$m^2 = a^2 + h^2 - 2ah\cos\alpha \tag{7.7}$$

e

$$n^2 = b^2 + h^2 - 2bh\cos\beta. \tag{7.8}$$

Além disso,

$$\cos\alpha = \frac{h}{a} \quad \text{e} \quad \cos\beta = \frac{h}{b}.$$

Portanto,

$$h^2 = ab\cos\alpha\cos\beta$$

e

$$ah\cos\alpha = bh\cos\beta = ab\cos\alpha\cos\beta.$$

Logo, de (7.7) e (7.8) obtemos

$$m^2 = a^2 - ab\cos\alpha\cos\beta \tag{7.9}$$

e

$$n^2 = b^2 - ab\cos\alpha\cos\beta. \tag{7.10}$$

Além disso,

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{m}{a} \quad \text{e} \quad \text{sen}\ \beta = \frac{n}{b}$$

que junto com (7.9) e (7.10), implica em

$$\begin{aligned}(m+n)^2 &= m^2 + n^2 + 2mn \\ &= a^2 - ab\cos\alpha\cos\beta + b^2 - ab\cos\alpha\cos\beta \\ &\quad +2ab\text{sen}\ \alpha\text{sen}\ \beta \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha\cos\beta + 2ab\text{sen}\ \alpha\text{sen}\ \beta.\end{aligned}$$

Comparando com (7.6) obtemos que

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\ \alpha\text{sen}\ \beta.$$

b) Nas condições do ítem a), obtemos que $\hat{A} = 90^\circ - \alpha$. Isto implica que, pelo Teorema 7.2,

$$\text{sen}\ \hat{A} = \text{sen}\ (90^\circ - \alpha) = \cos\alpha. \tag{7.11}$$

Pela Lei dos Senos, temos

$$\frac{\text{sen}\ (\alpha+\beta)}{m+n} = \frac{\text{sen}\ \hat{A}}{b} \quad \text{e} \quad \frac{\text{sen}\ \alpha}{m} = \frac{\text{sen}\ \hat{A}}{h},$$

o que implica em

$$\text{sen}\ (\alpha+\beta) = \frac{m}{b}\text{sen}\ \hat{A} + \frac{n}{b}\text{sen}\ \hat{A} \tag{7.12}$$

e

$$\text{sen}\ \hat{A} = \frac{h}{m}\text{sen}\ \alpha. \tag{7.13}$$

Substituindo (7.13) no primeiro termo do segundo membro de (7.12) e (7.11) no segundo termo do segundo membro de (7.13), obtemos

$$\text{sen}\ (\alpha+\beta) = \frac{h}{b}\text{sen}\ \alpha + \frac{n}{b}\cos\alpha. \tag{7.14}$$

Porém,

$$\text{sen}\ \beta = \frac{n}{b} \quad \text{e} \quad \cos\beta = \frac{h}{b},$$

que substituindo em (7.14), obtemos

$$\text{sen}\ (\alpha+\beta) = \text{sen}\ \alpha\cos\beta + \cos\alpha\text{sen}\ \beta.$$

□

Corolário 7.1. *Se $\alpha > \beta$, então*

a) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + sen\ \alpha sen\ \beta$.

b) $sen\ (\alpha = \beta) = sen\ \alpha\cos\beta - \cos\alpha sen\ \beta$.

Demonstração No teorema anterior, faça $\alpha + \beta = a$ e $\alpha = b$. Resolva o sistema

$$\begin{cases} \cos a = \cos b \cdot \cos(a-b) - \text{sen } b \cdot \text{sen } (a-b) \\ \text{sen } a = \text{sen } b \cdot \cos(a-b) + \cos b \cdot \text{sen } (a-b) \end{cases},$$

para encontrar $\cos(a-b)$ e sen $(a-b)$. □

RESUMO

Nesta aula nós vimos como definir as funções trigonométricas e como utilizar semelhança de triângulos para mostrar que elas estão bem definidas. Mostramos algumas fórmulas de redução, as Leis dos Cossenos e a Lei dos Senos, identidades trigonmétricas muito útil nas aplicações. Além disso, também calculamos alguns valores das funções trigonométricas, por exemplo, para os ângulos $30°$, $45°$ e $60°$.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula iremos definir a noção de área e mostrar como calcular a área de algumas figuras geométricas.

ATIVIDADES

1. Em um triângulo ABC, em que todos os ângulos são agudos, a altura do vértice C forma com os lados CA e CB, respectivamente, ângulos α e β. Seja D o pé da altura do vértice C. Calcule $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$ sabendo qeu $\overline{AD} = 1$, que $\alpha = 30°$ e $\beta = 45°$.

2. Quando o sol está $30°$ acima do horizonte, qual o comprimento da sombra projetada por um edifício de 50 metros?

3. Um barco está ancorado no meio de um lago. Uma longa estrada retilínea acompanha parte de sua margem. Dois amigos em passeio turístico observam o barco de um ponto na estrada e anotam que a reta daquele ponto ao barco forma um ângulo de $45°$ com a estrada. Após viajarem 5 km eles

param e anotam que agora podem ver o barco segundo um ângulo de 30° com a estrada. Com esta informação calcule a distância do barco à estrada.

4. Um parque de diversões deseja construir um escorregador gigante cujo ponto de partida fique a 20m de altura. As normas de segurança exigem que o ângulo do escorregador com a horizontal seja de, no máximo, 45°. Qual será o comprimento mínimo do escorregador?

5. Achar o comprimento da corda de um círculo de 20cm de raio subtendida por um ângulo central de 150°.

6. Do topo de um farol, 40m acima do nível do mar, o faroleiro vê um navio segundo um ângulo (de depressão) de 15°. Qual a distância do navio ao farol?

7. Mostre que o perímetro de um polígono regular inscrito em um círculo de raio R é $p_n = 2Rn\text{sen}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$.

8. Num triângulo ABC tem-se $\overline{AC} = 23$, $\hat{A} = 20^\circ$ e $\hat{C} = 140^\circ$. Determine a altura do vértice B.

9. O que é maior:

   (a) sen 55° ou $\cos 55^\circ$?

   (b) sen 40° ou $\cos 40^\circ$?

   (c) $\tan 15^\circ$ ou $\cot 15^\circ$?

10. As funções *secante*, *cosecante* e *cotangenet* de um ângulo α são definidas por $\sec\alpha = 1/\cos\alpha$, $\csc\alpha = 1/\text{sen }\alpha$ e $\cot\alpha = 1/\tan\alpha$. Para qualquer ângulo α diferente de zero e 180° mostre que:

    (a) $\dfrac{\text{sen }\alpha}{\csc\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sec\alpha} = 1$.

    (b) $\tan\alpha + \cot\alpha = \sec\alpha\csc\alpha$.

    (c) $\sec\alpha = \text{sen }\alpha(\cot\alpha + \tan\alpha)$.

(d) $\sec^2\alpha - \csc^2\alpha = \tan^2\alpha - \cot^2\alpha$.

(e) $\dfrac{\cos\alpha}{1 - \text{sen }\alpha} = \dfrac{1 + \text{sen }\alpha}{\cos\alpha}$.

(f) $\text{sen }^4\alpha - \cos^4\alpha = 2\text{sen }^2\alpha - 1$.

11. Calcule $\cos 105°$, $\cos 15°$ e $\text{sen } 75°$.

12. Mostre que se α e β são ângulos agudos então

    (a) $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

    (b) $\cot(\alpha + \beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$.

13. Em um triângulo ABC, em que todos os ângulos são agudos, a altura do vértice C forma com os lados CA e CB respectivamente ângulos α e β. Seja D o pé da altura do vértice C. Calcule $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ sabendo que $\overline{AD} = 1$.

14. Mostre que $\cos\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{1 + \cos\theta}{2}}$.

15. Mostre que $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1 - \cos\theta}{\text{sen }\theta}$.

LEITURA COMPLEMENTAR

1. BARBOSA, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana*. SBM.

2. EUCLIDES, *Os Elementos*. Unesp. Tradução: Irineu Bicudo.

3. GREENBERG, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. Third Edition. W. H. Freeman.

4. POGORELOV, A. V., *Geometria Elemental*. MIR.

5. MOISE, E. E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*. Third edition. Addison-Wesley.