AULA 8

Área

META:

Definir e calcular área de figuras geométricas.

OBJETIVOS:

Definir área de figuras geométricas.

Calcular a área de figuras geométricas básicas, triângulos e paralelogramos.

PRÉ-REQUISITOS

Nesta aula o aluno deverá ter compreendido as noções de congruência e de semelhança de triângulos.

8.1 Introdução

Nesta aula iremos aprender como introduzir e calcular a área de regiões poligonais. Existem várias formas de introduzir área, dando continuidade à nossa construção axiomática da geometria, a forma como foi escolhida para ser apresentada é a axiomática.
A área é um objeto geométrico que tem diversas aplicações, uma delas é a demonstração do Teorema de Pitágora. Essa demonstração será deixada ao aluno na forma de exercício.

8.2 Área

Uma *região triangular* é um conjunto de todos os pontos do plano formado por todos os segmentos cujas extremidades estão sobre os lados de um triângulo. O triângulo é a *fronteira* da região triangular e todos os outros pontos são pontos interiores.

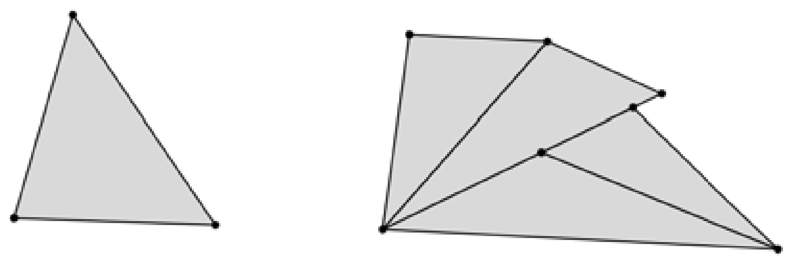

Figura 8.1: À esquerda: região triangular. À direita: região poligonal.

Uma *região poligonal* é uma figura plana que pode ser expressa como a união de um número finito de regiões triangulares, de tal modo que duas a duas não têm pontos interiores em comum.
A noção de área de regiões poligonais é introduzida na geometria através dos seguintes axiomas

Axioma de Área 1: A toda região poligonal corresponde um único número maior do que zero.

Axioma de Área 2: Se uma região poligonal é a união de duas ou mais regiões poligonais, de modo que duas a duas não possuam pontos interiores em comum, então sua área é a soma das áreas daquelas regiões.

Axioma de Área 3: Regiões triangulares limitadas por triângulos congruentes têm áreas iguais.

Axioma de Área 4: Se $ABCD$ é um retângulo então sua área é dada pelo produto $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$.

Vamos calcular a área de algumas figuras planas.

Proposição 8.29. *Seja $ABCD$ um paralelogramo com altura h com respeito ao lado DC. Então sua área é $h \cdot \overline{DC}$.*

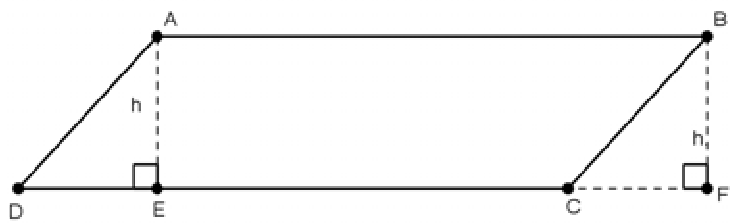

Figura 8.2:

Demonstração Trace, a partir dos pontos A e B, dois segmentos, AE e BF, perpendiculares à reta que contém CD. O quadrilátero $ABFE$ é um retângulo cuja área é $\overline{AB} \cdot \overline{BF}$, a qual em termos de nossa notação, é exatamente $h \cdot \overline{DC}$, já que $EF = AB = CD$. Observe que pelo caso LAL de congruência de triângulo, temos que

$ADE = BCF$. Portanto,

$$\begin{aligned}\text{Área}(ABCD) &= \text{Área}(ABCE) + \text{Área}(ADE)\\ &= \text{Área}(ABCE) + \text{Área}(CBF)\\ &= \text{Área}(ABFE).\end{aligned}$$

□

Proposição 8.30. *Seja ABC um triângulo com altura h com respeito ao lado BC. Então, sua área é $h \cdot \overline{BC}$.*

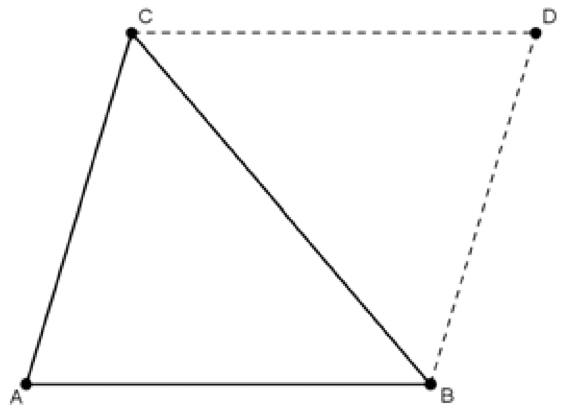

Figura 8.3:

Demonstração Trace pelo vértice C uma reta paralela ao lado AB, e pelo vértice B uma reta paralela ao lado AC. Estas duas retas se intercectam em um ponto D. O polígono $ABCD$ é um paralelogramo, e os dois triângulos ABC e CDB são congruentes, pelo caso LAL de congruência de triângulos. Como

$$\text{Área}(ABDC) = \text{Área}(ABC) + \text{Área}(BCD)$$

e

$$\text{Área}(ABC) = \text{Área}BCD,$$

então

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2}\text{Área}(ABDC).$$

Além disso, a altura do vértice C do triângulo ABC é exatamente a altura do paralelogramo $ABDC$ relativamente ao lado AB. $\square$

Definição 8.1. Um *trapézio* é um quadrilátero com dois lados opostos paralelos. Os lados paralelos são chamados de *bases*.

Proposição 8.31. *A área de um trapézio é metade do produto do comprimento de sua altura pela soma dos comprimentos de suas bases.*

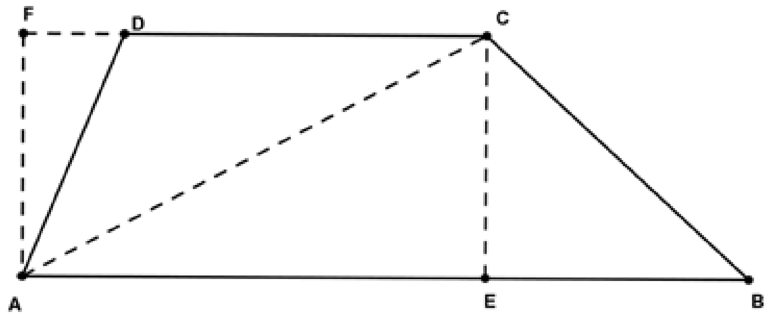

Figura 8.4:

Demonstração Seja $ABCD$ um trapézio cujas bases são os lados AB e CD. Trace a diagonal AC para dividir o trapézio em dois triângulos. Trace as alturas CE, do triângulo ACB, e AF, do triângulo ACD. Então teremos que $AF = CE$, já que os lados AB e CD são paralelos. Como consequência

$$\begin{aligned}
\text{Área}(ABCD) &= \text{Área}(ACB) + \text{Área}(ACD) \\
&= \tfrac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CE} + \tfrac{1}{2}\overline{CD} \cdot \overline{AF} \\
&= \tfrac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot \overline{CE}.
\end{aligned}$$

$\square$

Definição 8.2. A área da região limitada por um círculo é o menor número maior do que a área de qualquer polígono nele inscrito.

Da mesma forma que o comprimento do círculo é finito, a área é finita, já que a área de qualquer polígono nele circunscrito é maior do que a área de qualquer polígono inscrito.

8.3 Área do Círculo

Teorema 8.1. *A área da região limitada por um círculo é igual à metade do produto do raio pelo comprimento do círculo.*

Demonstração Sejam p o perímetro do círculo de raio R e A a área da região por ele limitada. Se P é um polígono inscrito neste círculo, então façamos

- $p(P) :=$ perímetro de P;
- $A(P) :=$ área de P;
- $L(p) :=$ comprimento do maior lado de P.

Tome $\varepsilon > 0$ arbitrário. Sejam três polígonos P_1, P_2 e P_3 tais que

i) $L(P_1) < \varepsilon$;

ii) $A - \varepsilon R < A(P_2)$;

iii) $p - \varepsilon < p(P_3)$.

Note que a existência de P_2 e P_3 é garantida pela definição de perímetro e área do círculo.
Seja P o polígono contendo todos os vértices dos polígonos P_1, P_2 e P_3. Observe que ao aumentarmos um vertice a um polígono inscrito, a nova área não diminui e o perímetro também não diminui. Portanto, o polígono P também goza das propriedades $i), ii)$ e $iii)$ acima.
A área do polígono P é a soma das áreas de todos os triângulos com vértices no centro do círculo e tendo como lado um dos lados do polígono P. Sejam OAB um destes triângulos e OC a altura com respeito ao lado AB. Assim,

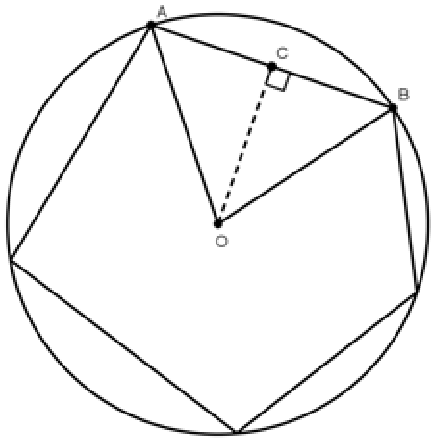

Figura 8.5:

$$\text{Área}(OAB) = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{OC}.$$

Como a hipotenusa é maior que qualquer um dos catetos, segue da desigualdade triângular que

$$\overline{OA} > \overline{OC} > \overline{OA} - \overline{AC},$$

o que implica que

$$\frac{1}{2}\overline{AB}(\overline{OA} - \overline{AC}) < \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{OC} = \text{Área}(OAB) < \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{OA}.$$

Mas como $\overline{OA} = R \quad \text{e} \quad \overline{AC} < L(P) < \varepsilon$, concluímos que

$$\overline{OA} - \overline{AC} = R - \overline{AC} > R - \varepsilon.$$

Daí,

$$\frac{1}{2}\overline{AB}(R - \varepsilon) < \frac{1}{2}\overline{AB}(\overline{OA} - \overline{AC}) < \text{Área}(OAB) < \frac{1}{2}R \cdot \overline{AB}.$$

Como o triângulo OAB foi escolhido arbitrariamente, obtemos uma desigualdade análoga para todos os outros. Somando todas elas, obtemos

$$\frac{1}{2}p(P)(R - \varepsilon) < A(P) < \frac{1}{2}p(P)R.$$

Da desigualdade $iii)$ e de $p(P) < p$, obtemos

$$\frac{1}{2}(p-\varepsilon)(R-\varepsilon) < \frac{1}{2}p(P)(R-\varepsilon) < A(P) < \frac{1}{2}p(P)R < \frac{1}{2}pR.$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}pR - \frac{1}{2}(\varepsilon R + \varepsilon p - \varepsilon^2) < A(p) < \frac{1}{2}pR.$$

Assim,

$$\left|A(P) - \frac{1}{2}pR\right| < \frac{1}{2}(\varepsilon R + \varepsilon p - \varepsilon^2).$$

Então, de $ii)$

$$\begin{aligned} \left|A - \tfrac{1}{2}pR\right| &\leq |A - A(P)| + \left|A(P) - \tfrac{1}{2}pR\right| \\ &< \varepsilon R + \tfrac{1}{2}(\varepsilon R + \varepsilon p - \varepsilon^2). \end{aligned}$$

Como o lado esquerdo independe de ε e $\varepsilon > 0$ foi tomado arbitrário, concluímos que

$$A = \frac{1}{2}pR.$$

$\square$

Corolário 8.1. *A área de um disco de raio R é πR^2.*

RESUMO

..

Nesta aula o aluno pode aprendeu com introduzir a noção de área para regiões planas, bem como calcular a área de algumas regiões, como o triângulo, retângulo, paralelogramo, trapézio e o círculo.

PRÓXIMA AULA

..

Na próxima aula iremos aplicar o que aprendemos nesta aula para demonstrar um interessante teorema, o Teorema de Ceva.

ATIVIDADES

..

1. Que relação satisfazem as áreas de dois triângulos semelhantes?
2. O raio do círculo inscrito em um polígono regular é chamado de *apótema* do polígono regular. Prove que a área de um polígono regular é igual a metade do produto do seu perímetro por seu apótema.
3. Se o diâmetro de dois discos são 3 e 6, qual a relação entre as suas áreas?
4. O comprimento de um círculo vale duas vezers o comprimento de outro círculo. Que relação satisfazem suas áreas?
5. Inscreve-se um triângulo equilátero de lado a em um círculo. Determine a área limitada por este círculo em termos de a.
6. Na figura 8.6, $ABCD$ é um quadrado e a, b e c são três retas paralelas passando nos vértices A, B e C, respectivamente. Determine a área do quadrado sabendo que a distância entre as retas a e b é 5cm e entre as retas b e c é 7cm.

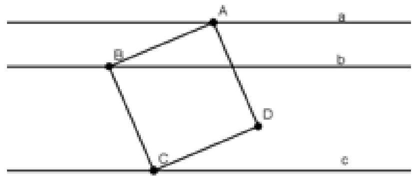

Figura 8.6:

7. A figura 8.7, apresenta um círculo de centro O cujo raio mede 2cm. AB é um diâmetro, C é um ponto do círculo tal que $B\hat{O}C = 60°$. Determine a área da região sobreada limitada por AC e pelo arco menor determinado por A e C.

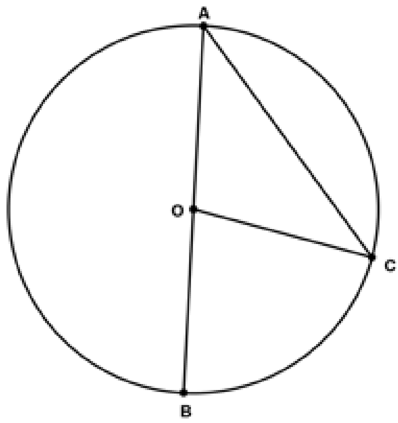

Figura 8.7:

8. Um losango tem três de seus vértices sobre um círculo de raio r e o quarto no centro do círculo. Determine sua área.

9. Na figura abaixo são representados dois círculos concêntricos de raios r e R, sendo $r < R$. Seja m um areta tangente ao círculo menor tendo A como ponto de contato. Seja B o ponto onde esta reta corta o círculo maior e seja n a reta tangente em B ao círculo maior. Se o ângulo α (o menor

formado entre m e n) mede $30°$, determine a razão entre as áreas limitadas pelos dois círculos.

10. Deseja-se calcular a área da figura ao lado. Ela foi desenhada tomando-se um círculo e um ponto P fora dele e trançando-se as duas tangentes ao círculo à partir de P. Sabe-se também que o ponto P dista $2r$ do centro do círculo, sendo r o seu raio.

11. A figura 8.8 sugere uma outra maneira de demonstrar o Teorema de Pitágora. Para fazer a demonstração expresse a área do quadrado maior de duas maneiras diferentes: como produto dos lados e como soma das áreas dos 4 triãngulos e do quadrado menor. Complete a demonstração.

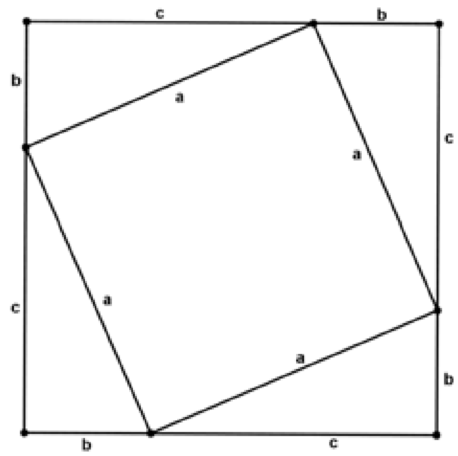

Figura 8.8:

12. Uma outra prova do Teorema de Pitágora é sugerida pela figura 8.9. Determine a área do trapézio de duas maneira diferentes, de forma análoga ao que feito no exercício anterior. Complete a prova.

13. Baseado na figura 8.10, demonstre o Teorema de Pitágoras. Esta prova foi dada por Bhaskara.

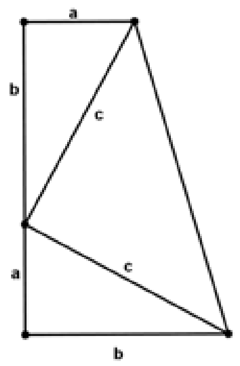

Figura 8.9:

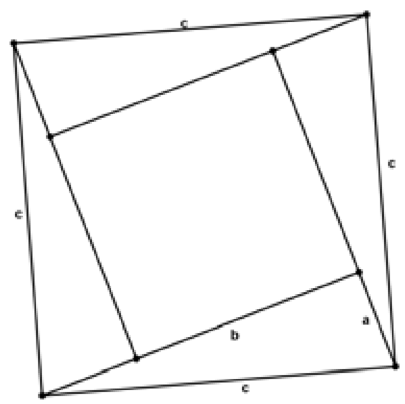

Figura 8.10:

14. Na figura 8.11 os segmentos PQ e MN são paralelos ao lado BC do triângulo ABC. Se M é o ponto médio de AC e P é o ponto médio de AM, determine a área do trapézio $MPQN$ em termos da área do triângulo ABC.

15. Na figura 8.12 $ABCD$ é um retângulo e $DM = MN = NB$. Determine a área do triângulo MNC.

16. Um triângulo isósceles está inscrito em um círculo cujo raio mede 5cm. Qual a área da região exterior ao triângulo e interior ao círculo.

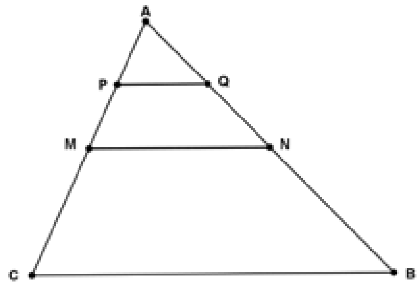

Figura 8.11:

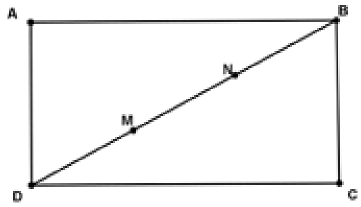

Figura 8.12:

17. Um triângulo tem lados medindo a, b e c e perímetro igual a $2p$. Mostre que sua área vale $\sqrt{p(p-a)(p-b)(pc)}$. (p é chamado de *semi-perímetro* do triângulo.)

18. Um triãngulo tem semi-perímetro p e o raio do círculo inscrito é r. Mostre que sua área é igual a pr.

19. Um triângulo tem lados medindo a, b e c. Se R é a medida do raio circunscrito ao triângulo então sua área é dada por $\frac{abc}{4R}$.

20. Mostre que, entre todos os retângulos de perímetro 8cm o que tem maior área é o quadrado.

LEITURA COMPLEMENTAR

¨

1. BARBOSA, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana.* SBM.

2. EUCLIDES, *Os Elementos*. Unesp. Tradução: Irineu Bicudo.

3. GREENBERG, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. Third Edition. W. H. Freeman.

4. POGORELOV, A. V., *Geometria Elemental*. MIR.

5. MOISE, E. E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*. Third edition. Addison-Wesley.