AULA 9

Teorema de Ceva

META:

O Teorema de Ceva e algumas aplicações.

OBJETIVOS:

Enunciar e demonstrar o Teorema de Ceva;

Aplicar o Teorema de Ceva.

PRÉ-REQUISITOS

O aluno deverá ter compreendido as aulas anteriores.

9.1 Introdução

Perceba que com a introdução do Axioma das Paralelas foi possível provar uma série de resultados a partir deles. Na última aula nós introduzimos o conceito de área, tendo sido necessário o conhecimento de triângulos congruentes para garantir que triângulos congruentes possuem a mesma área.
Nesta aula faremos uso do conceito de área para provar um resultado não muito conhecido do ensino básico, o Teorema de Ceva. Este teorema foi provado pelo matemática italiano Giovanni Ceva (1647–1734) em 1678, em seu trabalho intitulado *De lineis rectis.*

9.2 O Teorema de Ceva

Uma *ceviana* de um triângulo é um segmento que liga um vértice a um ponto do lado oposto. Assim, se X, Y e Z são pontos nos lados BC, AC e AB, respectivamente de um triângulo ABC, os segmentos AX e BY são cevianas. Exemplos particulares de cevianas são as alturas, medianas e bissetrizes. Este termo vem do nome do matemático italiano Giovanni Ceva, que publicou em 1678 o seguinte teorema

Teorema 9.1. *Se três cevianas AX, BY, CZ de um triângulo ABC são concorrentes, então*

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1.$$

Demonstração Seja P o ponto de encontro das três cevianas. Denote por (ABC) a área de um triângulo ABC. Observe que os triângulos BXP e CXP possuem a mesma altura h com respeito às bases BX e XC, respectivamente. E os triângulos ABX e ACX têm altura H com respeito às bases BX e CX, respectivamente. Assim,

$$(ABX) = \frac{1}{2}H \cdot \overline{BX}, \quad (ACX) = \frac{1}{2}H \cdot \overline{CX}$$

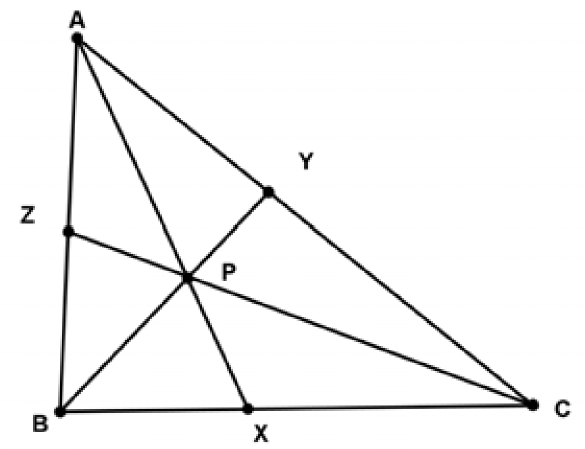

Figura 9.1: Cevianas concorrentes.

e

$$(BXP) = \frac{1}{2}h \cdot \overline{BX} \quad \text{e} \quad (CXP) = \frac{1}{2}h \cdot \overline{CX}.$$

Isto implica que

$$\begin{aligned} \frac{(ABP)}{(ACP)} &= \frac{(ABX) - (BXP)}{(ACX) - (CXP)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}H \cdot \overline{BX} - \frac{1}{2}h \cdot \overline{BX}}{\frac{1}{2}H \cdot \overline{CX} - \frac{1}{2}h \cdot \overline{CX}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} = \frac{(ABP)}{(ACP)}.$$

Da mesma forma, obtemos

$$\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{(BCP)}{(ABP)} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{(CAP)}{(BCP)}.$$

Portanto,

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{(ABP)}{(ACP)} \frac{(BCP)}{(ABP)} \frac{(ACP)}{(BCP)} = 1.$$

□

Também vale a recíproca.

Teorema 9.2. *Se três cevianas AX, BY e CZ satisfazem*

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1$$

então elas são concorrentes.

Demonstração Seja P o ponto de interseção das cevianas AX e BY.
Vamos mostrar que CZ passa por P.
Seja CZ' uma ceviana que passa por P. Pelo Teorema anterior, temos

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \frac{\overline{AZ'}}{\overline{Z'B}} = 1.$$

Pela hipótese, obtemos

$$\frac{\overline{AZ'}}{\overline{Z'B}} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}.$$

Isto implica que $Z = Z'$. (Por quê ?) □

Como consequência desse útlimo teorema temos o seguinte corolário.

Corolário 9.1. *As medianas de um triângulo são concorrentes.*

De fato, basta observar que as medianas satisfazem a hipótese do Teorema 9.2.

Teorema 9.3. *As medianas de um triângulo o divide em seis triângulos de mesma área.*

Demonstração Observe que

- $(BPX) = (CPX)$
- $(BPZ) = (APZ)$
- $(CPY) = (APY)$

já que têm a mesma altura com respeito a bases congruentes. Pela mesma razão, $(AXC) = (ABX)$. Mas como

$$(AXC) = (APY) + (CPY) + (CPX) = 2(APY) + (CPX)$$

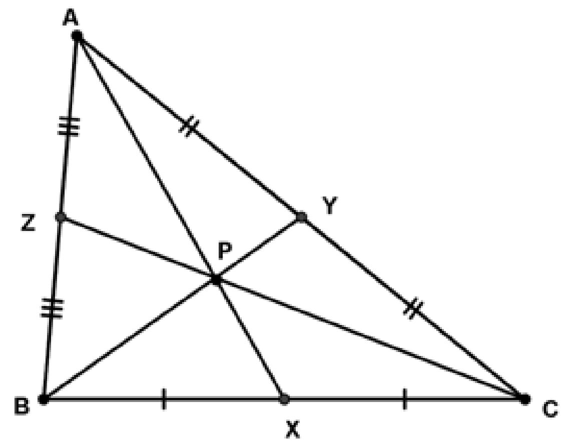

Figura 9.2: As medianas de um triângulo são concorrentes.

e

$$(ABX) = (APZ) + (BPZ) + (BPX) = 2(APZ) + (CPX),$$

então

$$(APY) = (APZ).$$

Da mesma forma mostramos que $(APY) = (BPX)$. □

Teorema 9.4. *O ponto de interseção das medianas as divide na razão* $2 : 1$.

Demonstração Pelo teorema anterior, temos $(APB) = 2(PBX)$. Além disso, APB e PBX têm a mesma altura h com respeito às bases AP e PX. Assim,

$$(APB) = \frac{1}{2}h\overline{AP}$$

e

$$(PBX) = \frac{1}{2}h\overline{PX},$$

o que implica que $\overline{AP} = 2\overline{PX}$. Da mesma forma, mostramos que $\overline{CP} = 2\overline{PZ}$ e $\overline{BP} = 2\overline{PY}$. □

Exercício 9.1. Prove que as três alturas de um triângulo são concorrentes.

Sugestão: Use o fato que em um triângulo ABC retângulo em $\hat{A}$ satisfaz $\overline{AB} = \overline{BC}\cos\hat{B}$. Use o Teorema de Ceva.

9.3 Pontos Notáveis de um Triângulo

Definição 9.1.

a) O ponto de encontro das bissetrizes de um triângulo é chamado de *incentro.*

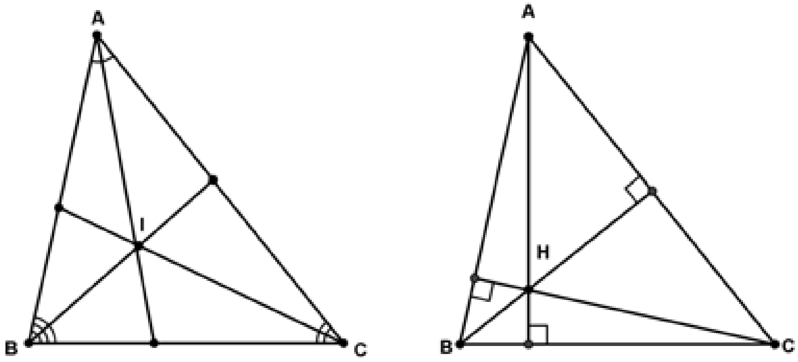

Figura 9.3: O ponto I é o incentro e o ponto H é o ortocentro.

b) O ponto de encontro das alturas de um triângulo é denominado de *ortocentro.*

c) O ponto de encontro das medianas de um triângulo é denominado *baricentro.*

d) O ponto de encontro das mediatrizes dos lados de um triângulo é denominado de *circuncentro.*

Teorema 9.5. *Em um triângulo ABC qualquer, o baricentro, o ortocentro, e o circuncentro são colineares. Além disso, o baricentro está entre o ortocentro e o circuncentro e sua distância ao ortocentro é o dobro de sua distância ao circuncentro.*

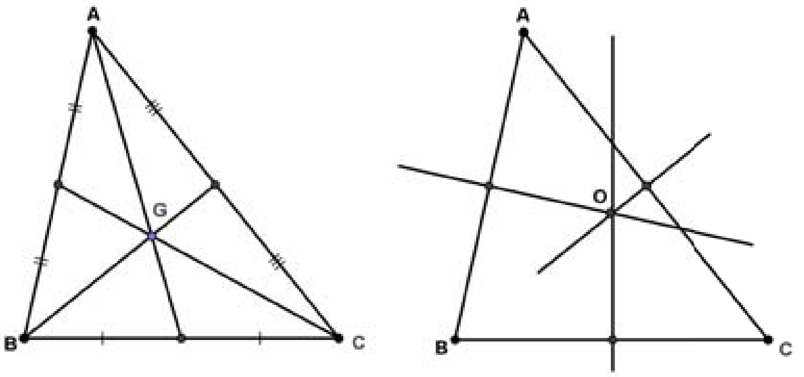

Figura 9.4: O ponto G é o Baricentro e o ponto O é o circuncentro.

Definição 9.2. A reta que contém esses três pontos do teorema é denominada de Reta de Euler do triângulo ABC.

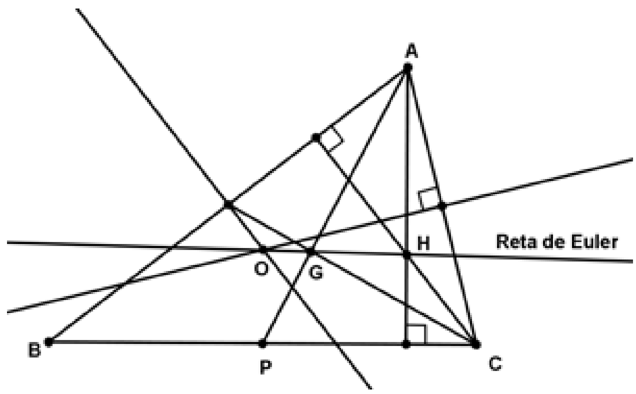

Figura 9.5: $\overline{OG} = 2\overline{GH}$.

Observe que em um triângulo equilátero a reta de Euler não está definida, já que neste triângulo a mediatriz, a bissetriz e a altura coincidem e por sua vez os três pontos também coincidem. Em triângulos isósceles, temos que a mediana, mediatriz e altura relativa à base são coincidentes, logo, o baricentro, o ortocentro e o circuncentro pertencem a um mesmo segmento. Assim, a reta que contém esse segmento é a reta de Euler do triângulo.

Demonstração [do Teorema] Vamos supor que todos os ângulos do triângulo ABC são agudos, para garantirmos que os três pontos são internos ao triângulo. Para um triângulo com um ângulo obtuso ou retângulo, a prova é análoga. Podemos supor que ABC não é isósceles. Neste caso, a mediana é distinta da mediatriz, o que implica que o baricentro G e o circuncentro O são pontos distintos. Tome a reta r determinada por G e O. Na semi-reta S_{OG} tome um ponto H tal que $\overline{GH} = 2\overline{GO}$. Seja P o ponto médio do lado $\overline{BC}$. Considere a mediana e a mediatriz relativas ao lado BC. Os triângulos GHA e GOP são semelhantes pelo caso LAL de semelhança, pois

$\overline{GH} = 2\overline{GO}$ (por construção)

$A\hat{G}H = P\hat{G}O$ (opostos pelo vértice)

$\overline{AG} = 2\overline{GO}$ (propriedade do baricentro, Teorema 9.4)

Logo, $A\hat{H}G = P\hat{O}G$. Portanto, as retas contendo AH e OP são paralelas pelo Teorema do Ângulo Interno Alternado. Mas como OP é perpendicular a BC e paralela a AH, segue que H pertence à altura de ABC relativa ao lado BC. Da mesma forma, mostramos que H pertence à altura de ABC relativa ao lado AC. (Ver figura 9.5.) Como H é a interseção de duas alturas, então H é o ortocentro de ABC. □

Um teorema interessante, mas que não iremos provar aqui é o seguinte

Teorema 9.6 (Círculo dos nove pontos)**.** *Existe uma circunferência passando pelos seguintes pontos:*

- *os pontos médios dos lados;*
- *os pés das alturas;*
- *os pontos médios dos segmentos que unem os vértices do triângulo ao ortocentro.*

O raio desta circunferência é a metade do raio da circunferência inscrita. Além disso, o centro desta circunferência está na reta de Euler, entre o ortocentro e o circuncentro.

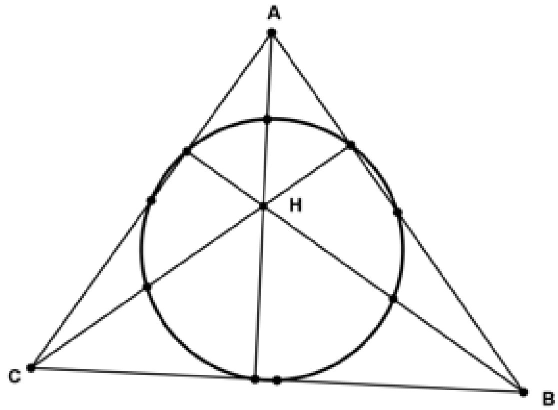

Figura 9.6: O círculo dos nove pontos do triângulo ABC.

A história destes dois últimos teoremas é um pouco confusa. Uma publicação de 1804, indicava que eles já eram conhecidos de B. Bevan. As vezes os dois teoremas são atribuídos a Euler, que provou em 1765, resultados análogos a este. De fato, alguns escritos chamam o círculo de “o Círculo de Euler”. A primeira prova completa surgiu em 1821, devido a J. V. Poncelet, a qual originou o nome *circulo dos nove pontos*.

RESUMO

Nesta aula demonstramos o Teorema de Ceva, um resultado importante que tem diversas aplicações. Vimos uma interessante relação entre os pontos notáveis de um triângulo, ortocentro, baricentro e circuncentro, estes pontos são colineares. Enunciamos o Teorema dos noves pontos, um resultado surpreendente.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula iremos fazer uso do que foi aprendido até aqui para construções geométricas com régua e compasso. Iremos estudar os três problemas clássicos, trisecção do ângulo, duplicação do cubo e quadratura do círculo.

ATIVIDADES

1. Prove que as medianas de um triângulo são concorrentes.

2. Prove que as alturas de um triângulo são concorrentes.

3. Prove que as bissetrizes de um triângulo são concorrentes.

4. Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos não congruentes cujos os respectivos lados são paralelos. Prove que as retas contento AA', BB' e CC' são concorrentes.

5. Prove que o circuncentro e o ortocentro de triângulo obtuso está fora do triângulo.

6. Se um triângulo possui duas medianas congruentes então é isósceles.

7. Se um triângulo possui duas alturas congruentes então é isósceles.

8.

LEITURA COMPLEMENTAR

1. BARBOSA, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana*. SBM.
2. EUCLIDES, *Os Elementos*. Unesp. Tradução: Irineu Bicudo.
3. GREENBERG, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. Third Edition. W. H. Freeman.
4. POGORELOV, A. V., *Geometria Elemental*. MIR.
5. MOISE, E. E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*. Third edition. Addison-Wesley.