AULA 10

Construções Elementares

META:

Introduzir as principais construções elementares.

OBJETIVOS:

Introduzir as construções elementares.

Resolver problemas práticos.

PRÉ-REQUISITOS

Para um melhor aproveitamento o aluno deverá ter compreendido todas as aulas anteriores.

10.1 Introdução

Os matemáticos gregos estudaram três problemas de Geometria que desempenharam papel importande no desenvolvimento da matemática. São os problemas de construções com régua e compasso, e resistiram a todas as tentativas dos gregos para resolvê-los, o que só veio a acontecer na virada do século XVIII para o XIX d.C.
Os problemas, que ficaram conhecidos como os três *problemas clássicos*, são

- A duplicação do cubo.
- A quadratura do círculo.
- A trissecção do ângulo.

Com relação as origens do primeiro problema existe uma lenda que conta que em 427 a.C. um quarto da população de Atenas morreu de peste. Quando um orácolo anunciou aos habitantes como combater a doença, eles deveriam duplicar o altar de Apolo, que possuia o formato de um cubo, prontamente os atenienses dobraram as dimensões do altar, mas isso não afastou a peste. O volume fora multiplicado por oito e não por dois.
A primeira mensão conhecida do problema da quadratura do círculo encontra-se no problema 50 do papiro de Rhind, em torno de 1600 a.C.
Quanto a trissecção do ângulo, acredita-se que Hípias de Elis, que viveu no século V a.C. foi um dos primeiros a tentar resolver este problema, utilizando curvas e construções que não podem ser efetuadas somente com régua e compasso.
A história do completo esclarecimento deste problema é uma das mais interessantes e instrutivas da história da Matemática, passando pela "consolidação" dos números complexos, com o grande Gauss (1777–1855), e pela criação da teoria dos grupos com o genial Galois (1811–1832).

Nas próximas aulas, estudaremos algumas construções geométricas com régua e compasso. Estudaremos também os três problemas clássicos e veremos porque eles não podem ser resolvidos somente com régua e compasso.

10.2 Construções Elementares

Antes de considerarmos problemas de construções com régua (não graduada) e compasso, algumas observações se faz necessário.
Para abordar problemas de construções geométricas com régua e compasso precisamos está atento as seguintes construções permitidas:

1. Traçar uma reta conhecendo dois de seus pontos;
2. Traçar um círculo, conhecendo o seu centro e um ponto do círculo;
3. Determinar as interseções de retas ou círculos já construídos com retas ou círculos já construídos.

Algumas construções que não são permitidas:

1. Traçar um círculo de raio ou centro "arbitrário";
2. Usar uma graduação previamente preparada da régua ou do compasso;
3. Tomar sobre uma reta um ponto "arbitrário";
4. Deslizar a régua até uma certa posição.

10.2.1 Perpendiculares

Um dos primeiros problemas básicos de construções geométricas é o traçado de perpendiculares.

Problema 10.2. *Dada uma reta r e um ponto P fora de r, traçar por P uma reta perpendicular a r.*

Solução Siga os passos seguintes (Veja figura 10.1):

1. Trace um círculo de centro P cortando a reta r em A e B.

2. Trace círculos de mesmo raio com centros em A e B obtendo Q, um dos pontos de interseção.

3. A reta que passa por P e Q é perpendicular à reta r.

□

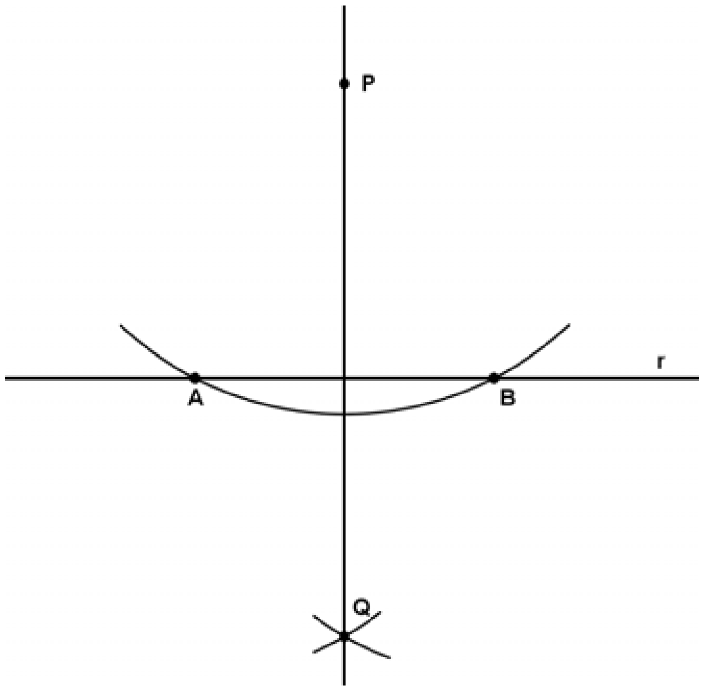

Figura 10.1: Reta perpendicular a r passando por P.

Justificativa os triângulos APQ e BPQ são congruentes, já que $AP = BP$ e $AQ = BQ$. Assim, $A\hat{P}Q = B\hat{P}Q$, ou seja, a reta PQ é a bissetriz do ângulo $A\hat{P}B$. Como APB é um triângulo isósceles, segue que a bissetriz é também a altura. □

Problema 10.3. *Dada uma reta r e um ponto $P \in r$, traçar por P uma reta perpendicular a r.*

Solução

1. Trace um círculo com centro em P e qualquer raio cortando r nos pontos A e B.

2. Trace círculos de mesmo raio com centros em A e B obtendo Q, um dos pontos de interseção.

3. A reta que passa por P e Q é perpendicular à reta r.

□

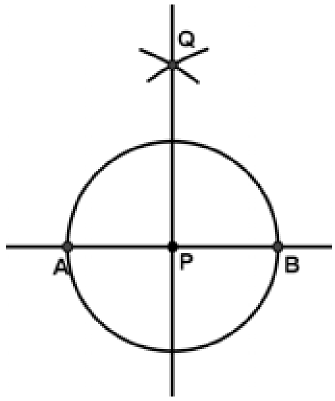

Figura 10.2: Reta perpendicular a r passando por $P \in r$.

A justificativa é análoga a da proposição anterior e é deixada para o aluno

10.2.2 Paralelas

Um outro problema básico é o traçado de paralelas.

Problema 10.4. *Dada uma reta r e um ponto P fora dela, traçar uma reta paralela a r passando por P.*

Solução Siga os passos:

1. Trace três círculos de mesmo raio:

   (a) O 1° com centro em P, determinando um ponto A na reta r;

(b) O 2° com centro em A, determinando um ponto B na reta r;

(c) O 3° com centro em B, determinando um ponto Q, diferente de A, sobre o primeiro círculo.

2. A reta que passa pelos pontos P e Q é a reta procurada (Ver figura 10.3).

□

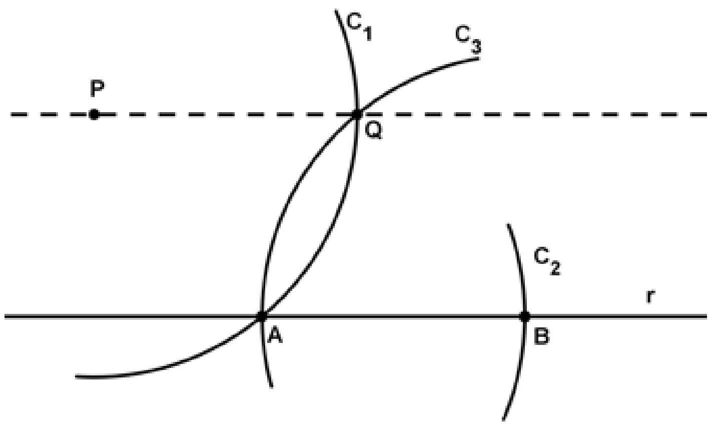

Figura 10.3: Reta paralela à reta r passando por P.

Justificativa $PABQ$ é um quadrilátero com todos os lados congruentes, logo é um paralelogramo, de fato um losango. Portanto seus lados opostos, PQ e AB, são paralelos. □

10.2.3 Mediatriz

Definição 10.1. A *mediatriz* de um segmento AB é a reta perpendicular a AB que contém o seu ponto médio.

Problema 10.5. *Construir a mediatriz de um segmento AB.*

Solução Veja figura 10.4

1. Construa dois círculos de mesmo raio com centros em A e B, determinando dois pontos de interseção, P e Q.

2. A reta contendo PQ é a mediatriz de AB.

□

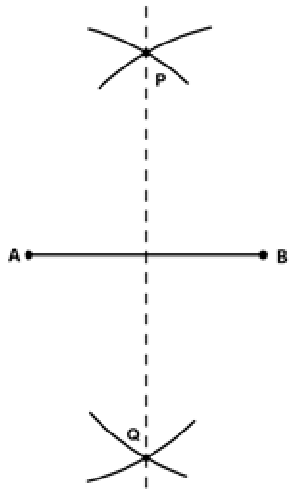

Figura 10.4: Mediatriz de AB.

Justificativa Observe que os triângulos APQ e BPQ são congruentes. Em particular, $A\hat{P}Q = B\hat{P}Q$. Assim, PQ é a bissetriz do ângulo $A\hat{P}B$. Como ABP é um triângulo isósceles, segue que PQ é perpendicular a AB. □

Lembremos a seguinte propriedade da mediatriz:

> *A mediatriz de um segmento é o conjunto de todos os pontos que equidistam dos extremos do segmento.*

10.2.4 Bissetriz

A *bissetriz* de um ângulo $A\hat{O}B$ é a semi-reta S_{OC} tal que $A\hat{O}C = C\hat{O}B$.

Problema 10.6. *Construir a bissetriz de um ângulo $A\hat{O}B$.*

Solução Ver figura 10.5.

1. Trace um círculo de centro O determinando os pontos X e Y nos lados do ângulo.

2. Trace dois círculos de mesmo raio com centros em X e Y. Seja C um dos pontos de interseção.

3. A semireta S_{OC} é a bissetriz de $A\hat{O}B$.

$\square$

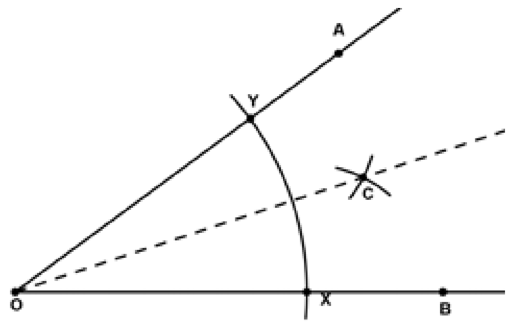

Figura 10.5: Bissetriz de $A\hat{O}B$.

Justificativa Note que $OYC = OXC$, pelo caso LLL de congruência de triângulos. Portanto, $Y\hat{O}C = X\hat{O}C$. $\square$

Lembremos a seguinte propriedade da bissetriz:

A bissetriz de um ângulo é o conjunto de todos os pontos que equidistam dos lados do ângulo.

10.2.5 O arco capaz

Antes de definirmos e construir o arco capaz de um ângulo, vejamos como transportar um ângulo.

Problema 10.7. *Dado um ângulo θ de vértice V e uma semi-reta S_{AB}, construir um ângulo sobre S_{AB} com medida θ.*

Solução Veja figura 10.6.

1. Trace um círculo de centro V, determinando os pontos P e Q sobre os lados do ângulo θ.

2. Trace um círculo de mesmo raio com centro A, determinando P' em S_{AB}.

3. Trace um círculo de raio PQ e centro P', determinando Q'.

4. Portanto, $P'\hat{A}Q' = \theta$.

$\square$

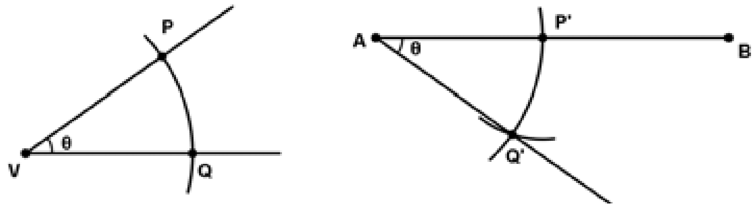

Figura 10.6: Transporte de um ângulo.

Justificativa Pelo caso LLL de congruência de triângulos, temos $PVQ = P'AQ'$. Em particular $P'\hat{A}Q' = \theta$. $\square$

Definição 10.2. Sejam A e B dois pontos sobre um círculo. Para todo ponto M em um mesmo arco determinado por A e B, o ângulo $\theta = A\hat{M}B$ é constante. Este arco chama-se *arco capaz* (Ver figura 10.7) do ângulo θ sobre o segmento AB.

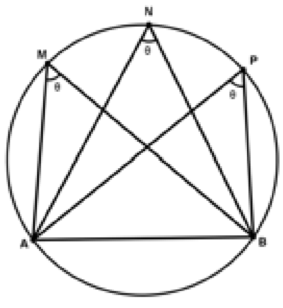

Figura 10.7: O arco determinado por A e B contendo M é o arco capaz do ângulo θ sobte o segmento AB.

O arco capaz de $90°$ sobre um segmento AB é um semicírculo com diâmetro AB.

Problema 10.8. *Dado um ângulo θ, construir seu arco capaz.*

Solução

1. Dado um segmento AB, trace a sua mediatriz e o ângulo $B\hat{A}X = \theta$.

2. Trace a perpendicular a AX que passa por A. Seja O a interseção desta perpendicular com a mediatriz de AB.

3. O arco de centro em O e extremidades A e B é o arco capaz do ângulo θ sobre AB.

□

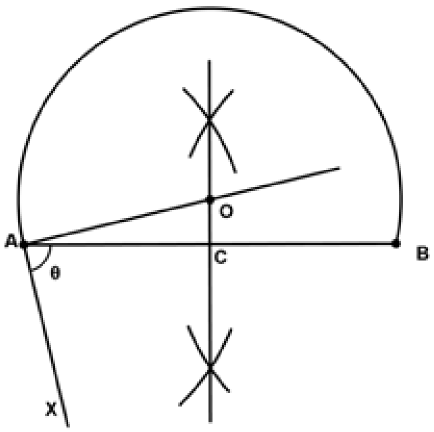

Figura 10.8: Construção do arco capaz.

Justificativa Se C é o ponto médio de AB então $C\hat{A}O = 90° - \theta, A\hat{O}C = \theta$. Daí, $A\hat{O}B = 2\theta$. Sabemos que se M é um ponto nesse arco, então

$$A\hat{M}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B.$$

Portanto, temos que este arco é de fato o arco capaz do ângulo θ. □

O arco capaz tem uma interessante propriedade:

> *Um observador que se move sobre o arco capaz de um ângulo θ, consegue ver o segmento AB sempre sob o mesmo ângulo.*

10.2.6 Divisão de um segmento em partes iguais

Problema 10.9. *Dividir um segmento AB em n partes iguais.*

Solução Faremos a demonstração para $n = 4$ e para n arbitrário, a solução é análoga.

1. Trace uma semi-reta S_{AX}.

2. Com o compasso, construa segmentos congruentes em AA_1, A_1A_2, A_2A_3 e A_3A_4.

3. Trace paralelas a A_4B que passam por A_1, A_2 e A_3, determinando 3 pontos em AB, P_1, P_2 e P_3. Os segmentos AP_1, P_1P_2, P_2P_3 e P_3P_4 são congruentes.

□

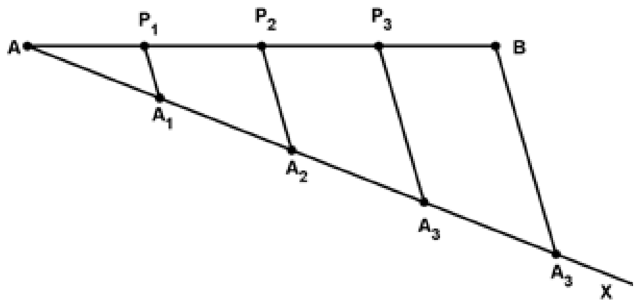

Figura 10.9: Divisão de AB em 4 partes iguais.

A justificativa é uma aplicação direta do Corolário 5.3.

10.2.7 Tangentes a um círculo

Problema 10.10. *Traçar uma reta tangente a um círculo de centro O passando por um ponto P.*

Solução Se P pertence ao círculo, basta traçar a reta perpendicular ao raio de extremidade P. (Ver figura 10.10.)

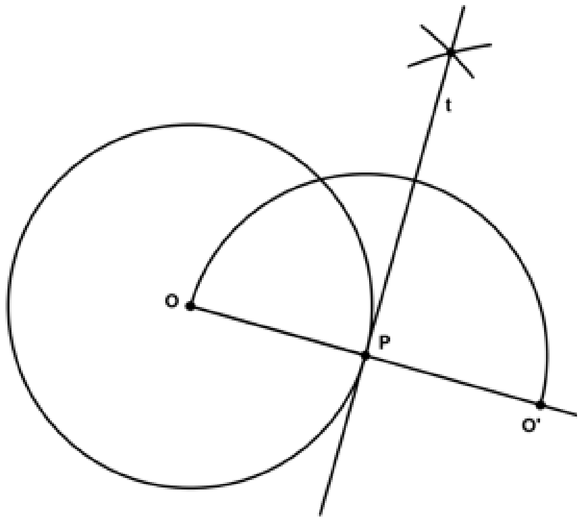

Figura 10.10: Tangente a um círculo por um ponto do círculo.

Suponha que P não pertença ao círculo.

1. Trace um círculo de centro no ponto médio de PO e raio $\frac{\overline{PO}}{2}$, determinando os pontos de interseção A e A', sobre o círculo original.

2. As retas PA e PA' são tangentes ao círculo dado.

$\square$

Justificativa Como o ângulo $P\hat{A}O$ está inscrito em um semicírculo, então ele é reto. Como toda reta perpendicular a um raio em sua extrimidade é tangente ao cículo, temos o resultado. $\square$

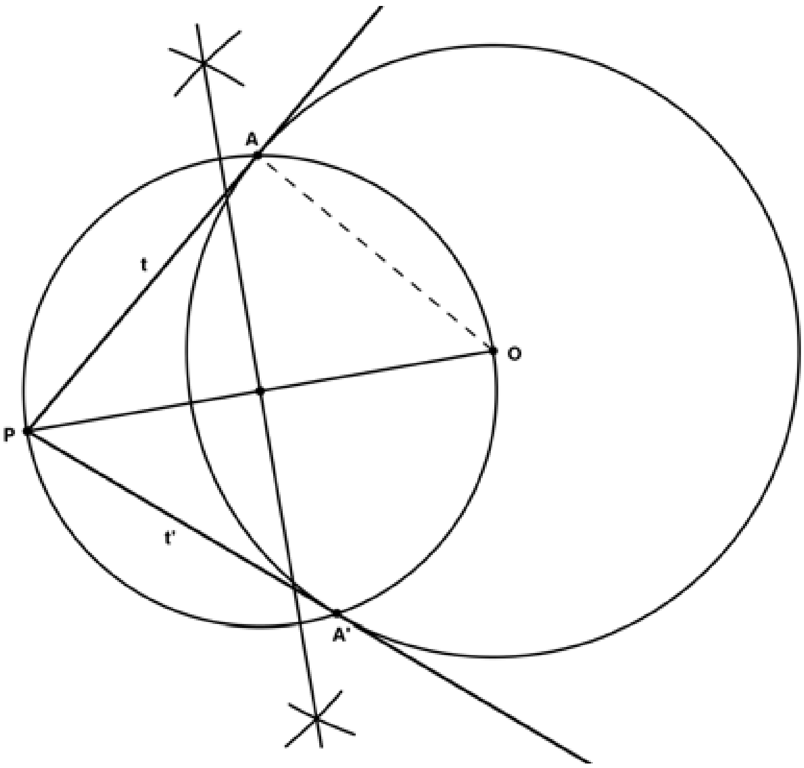

Figura 10.11: Tangente a um círculo por um ponto fora do círculo.

10.3 Problemas Resolvidos

Para resolver um problema de construção, é conveniente fazer um esboço de uma figura supondo o problema resolvido. Observando o esboço, planeje a solução, quais dados devem ser colocados primeiro e que construções devem ser realizadas para atingir a solução.

Problema 10.11. *Construir os triângulos ABC sendo dados os lados $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e o ângulo $\hat{A} = \theta$.*

Solução Ver figural 10.13.

1. Trace o segmento AB.

2. Construa a semi-reta S_{AX} tal que $B\hat{A}X = \theta$.

3. Trace o círculo de centro B e raio a.

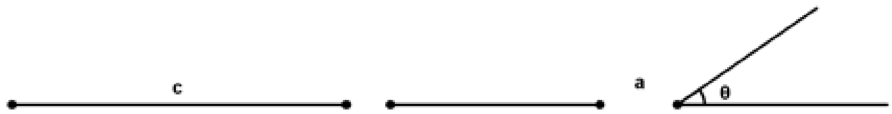

Figura 10.12: Dados do problema 10.11.

Qualquer um dos pontos de interseção, C_1 e C_2, com a semi-reta S_{AX} nos dá o triângulo procurado. □

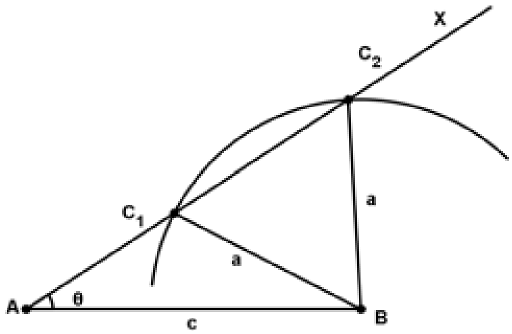

Figura 10.13: Solução do problema 10.11.

Observe que neste último problema pode acontecer três casos:

1. o problema tem duas soluções.

2. o problema tem uma única solução.

3. ou o problema não admite solução.

Qual a relação entre a e c para que ocorra cada um dos casos? Esta construção mostra porque uma correspondência entre dois triângulos do tipo ALL não é necessariamente uma congruência.

Problema 10.12. *Construir o triângulo ABC sendo dados o lado BC, a altura h relativa a esse lado e o ângulo $\hat{A}$.*

Solução

1. Trace o segmento BC.

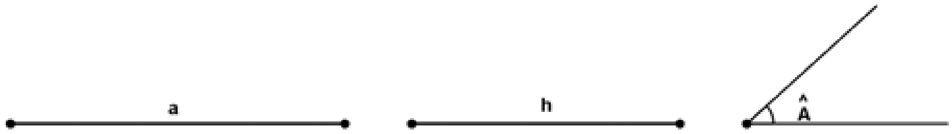

Figura 10.14: Dados do problema 10.12.

2. Trace a perpendicular a BC que passa por B.

3. Nesta perpendicular, marque um ponto P tal que $\overline{PB} = h$.

4. Trace a paralela a BC que passa por P.

5. Construa o arco capaz do ângulo $\hat{A}$ sobre BC.

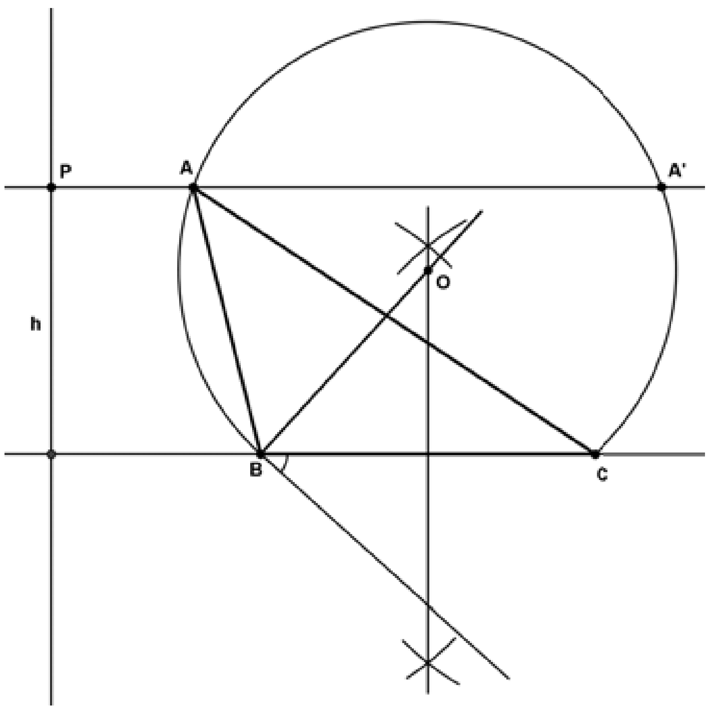

Figura 10.15: Solução do problema 10.12.

A interseção do arco capaz com a reta paralela a BC que passa por P nos dá o vértice A. □

Novamente, este problema pode ter uma, duas ou nenhuma solução. Você consegue a relação entre a, h e sen $\hat{A}$ tal que ocorra cada um dos casos?

Problema 10.13. *Construir o triângulo ABC sendo dadas as medianas m_a, m_b e a altura h_a.*

Figura 10.16: Dados do problema 10.13.

Analisemos como chegar a solução. Suponha que o triângulo ABC da figura 10.17 seja a solução do problema.

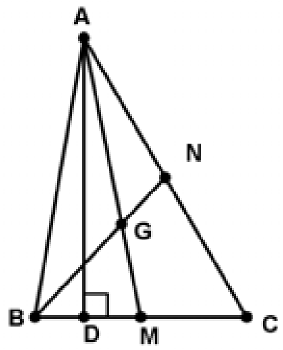

Figura 10.17: Esboço da solução do problema 10.13.

É claro que o triângulo ADM pode ser resolvido, já que é um triângulo retângulo e temos h_a e m_a. Para encontrar o ponto G, usamos o fato que as medianas de um triângulo são concorrentes e se encontram num que as dividem na razão 2:1. Assim, o ponto G é tal que $\overline{AG} = \frac{2}{3}m_a$, e como já sabemos dividir um segmento em partes iguais, podemos encontrar G. Em seguida, para determinar B na reta contendo DM, usamos o fato que $\overline{BG} = \frac{2}{3}m_b$. Agora, podemos encontrar C, visto que M é o ponto médio de BC.

Uma observação importante, é que esta construção só pode ser feita se os dados foresm compatíveis. Você é capaz de determinar condições sobre os dados do problema para sempre exista solução?

Solução As medianas de um triângulo cortam-se em um ponto (baricentro) que divide cada uma delas na razão 2 : 1.

1. Trace segmentos $\overline{PR} = m_a$ e $\overline{PQ} = m_b$.

2. Divida os segmentos PQ e PR em três partes iguais.

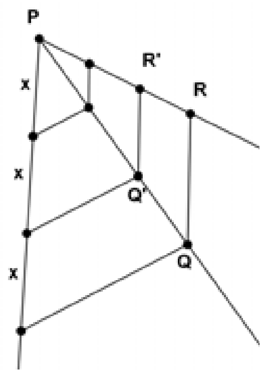

Figura 10.18: Divisão em 3 partes iguais dos segmentos PQ e PR.

3. Determine pontos Q' em PQ e R' em PR, tais que $\overline{PQ'} = \frac{2}{3}m_a$ e $\overline{PR'} = \frac{2}{3}m_b$.

4. Trace uma reta r, fixe um ponto D sobre ela e construa uma perpendicular AD com $\overline{AD} = h_a$. (Ver figura 10.19.)

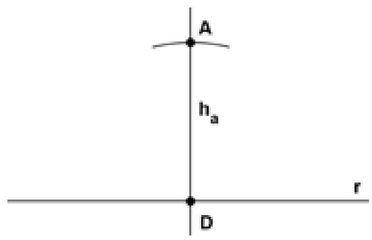

Figura 10.19: $AD \perp r$.

5. Trace um círculo com centro em A e raio m_a, determinando um ponto M sobre r. (Ver figura 10.20.)

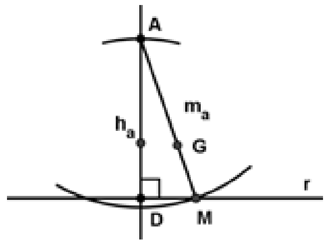

Figura 10.20: Determinação de M e G.

6. Tome G sobre AM tal que $\overline{AG} = \frac{2}{3}m_a = \overline{PR'}$.

7. Trace um círculo com centro G e raio $\frac{2}{3}m_b = \overline{PQ'}$, determinando um ponto B em r. (Ver figura 10.21)

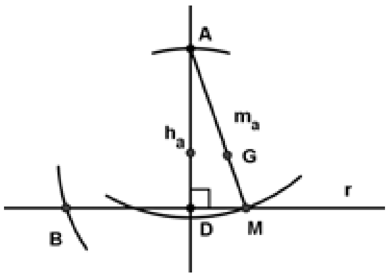

Figura 10.21: Construção de B.

8. Tome um ponto C na reta que contém B e D tal que $MC = BM$. (Ver figura 10.22.)

$\square$

Aqui também não temos uma única solução para o problema. Depende dos dados do problema. Na figura 10.23, podemos ver uma outra solução. Apesar de serem bem parecidas, elas são diferentes. Tente encontrar relações sobre os dados do problema tal que a construção seja possível.

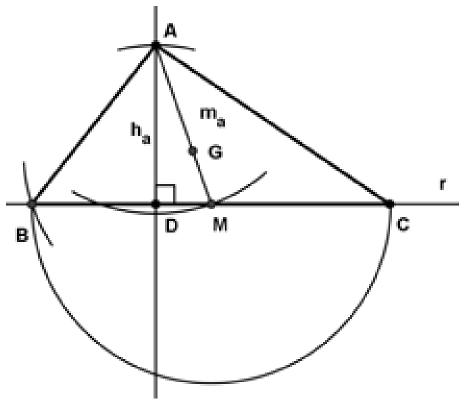

Figura 10.22: Solução do problema 10.13.

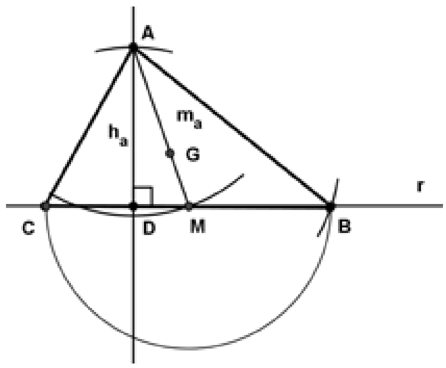

Figura 10.23: Outra solução do problema 10.13.

Problema 10.14. *Dados um círculo de centro O e um ponto P, traçar por P uma reta que determine no círculo uma corda igual a um segmento dado a.*

Solução

1. No círculo dado trace uma corda de comprimento a.

2. Trace uma perpendicular a esta corda passando pelo centro O, determinando um ponto D na corda.

3. Trace um círculo C de centro O e raio OD.

4. Trace um círculo C' de diâmetro PO e centro como sendo o

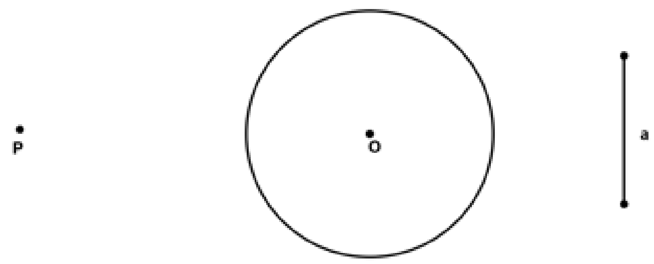

Figura 10.24: Dados em posição no plano do problema 10.14.

ponto médio de PO. Sejam M e M' os pontos de interseção com o círculo C.

5. As retas PM ou PM' nos dão a solução.

□

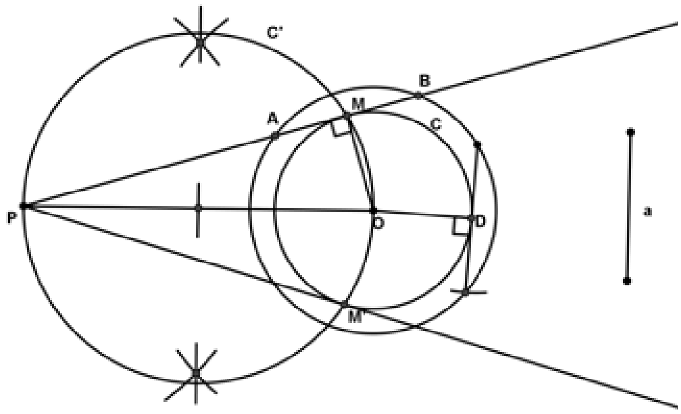

Figura 10.25: Solução do problema 10.14.

Exercício 10.1. Resolver o problema 10.14 quando P está dentro do círculo.

Problema 10.15. *São dados um círculo C de centro O, uma reta r e um ponto A sobre r. Construir um circulo C', tangente exteriormente a C e tangente em A à reta r.*

Primeiramente vamos justificar nossa construção.

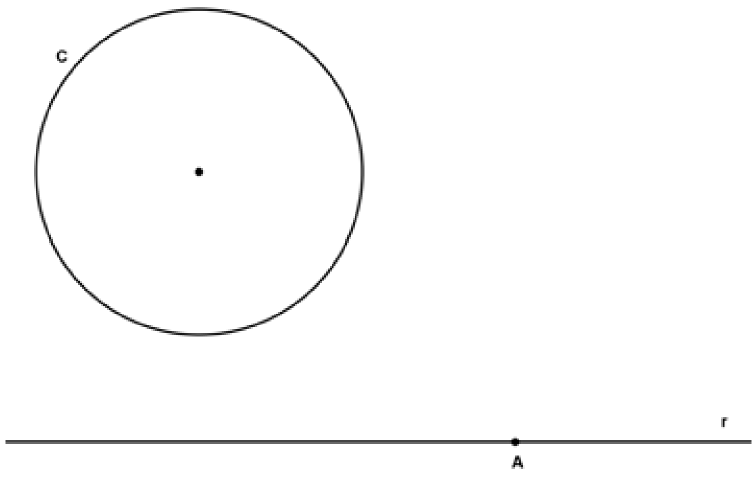

Figura 10.26: Dados do problema 10.15.

Justificativa Vamos fazer uma análise, supondo o problema resolvido. (Veja a figura 10.14.)
Sejam O o centro de C, T o ponto de tangência entre C e C' e O' o centro de C'.
Como T é o ponto de tangência entre C e C', então qualquer reta tangente aos círculos C e C', é perpendicular aos raios OT e $O'T$.
Isto implica que $T \in OO'$. Além disso, $O'A$ é perpendicular a r.
Trace por O uma perpendicular a r que intersecta C em N e S, N mais distante de r que S. Trace TA e TN. Como $N\hat{O}T$ e $T\hat{O'}A$ são ângulos internos alternos nas paralelas NO e $O'A$, então eles são congruentes. Além disso, como os triângulos NOT e $TO'A$ são isósceles então

$$O\hat{T}N = \frac{1}{2}(180^\circ - N\hat{O}T) = \frac{1}{2}(180^\circ - T\hat{O'}A) = O'\hat{T}A.$$

Isto mostra que os pontos N, T e A são colineares. □

Solução

1. Trace por O uma perpendicular a r obtendo o ponto N, um dos pontos de interseção com C, o mais distante de r.

2. Trace a reta NA e considere T o ponto de interseção com C.

3. Trace a perpendicular m a r passando por A.

4. Trace a semi-reta S_{OT}. O ponto de interseção com a reta m é o centro do círculo procurado C'.

□

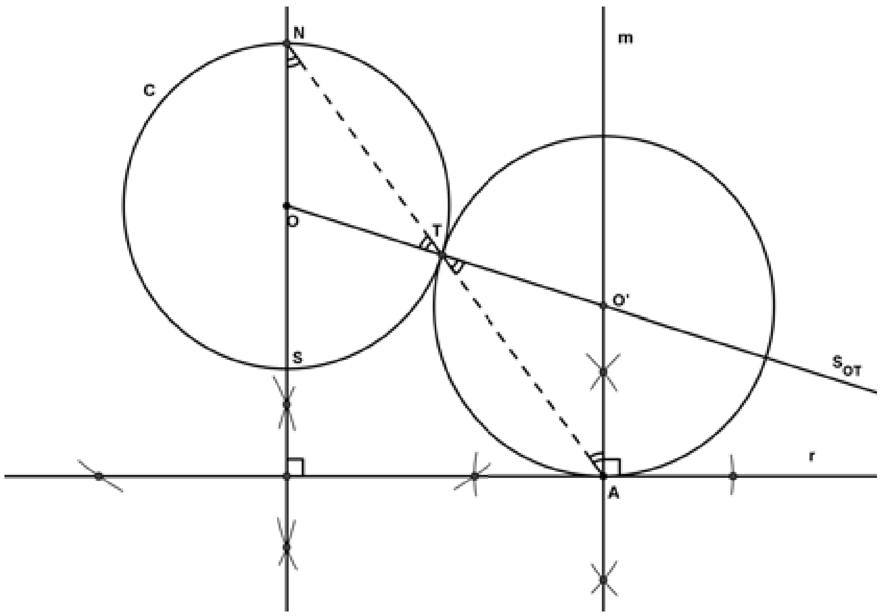

Figura 10.27: Solução do problema 10.15.

Problema 10.16. *Dado um triângulo ABC, traçar uma paralela a BC que corta AB em M e AC em N e de forma que se tenha $AN = MB$.*

Solução

1. Construa a bissetriz do ângulo $\hat{A}$, determinando um ponto D em BC.

2. Trace uma paralela a AB passando por D, determinando um ponto N em AC.

3. A paralela a BC passando por N resolve o problema.

□

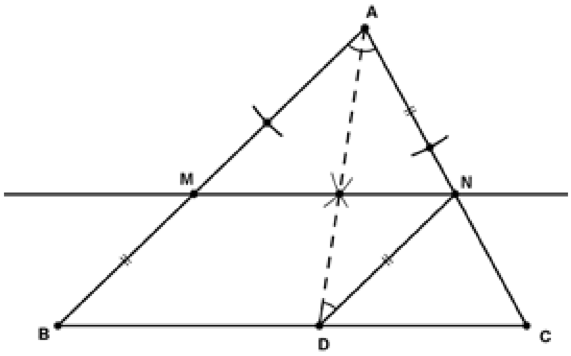

Figura 10.28: Solução do problema 10.16.

RESUMO

Nesta aula vimos como construir com régua e compasso perpendiculares e paralelas a retas dadas, mediatriz de segmentos, bissetriz de um ângulo dado e o arco capaz de um ângulo. Vimos também algumas aplicações dessas construções elementares.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula veremos como resolver geometricamente expressões algébricas.

ATIVIDADES

Nos exercícios abaixo, construir significa indicar os passos de uma construção com régua e compasso.

1. Construir um quadrado conhecendo sua diagonal.
2. Construir um quadrado dados em posição os pontos médios de dois lados adjacentes.
3. Construir o círculo circunscrito a um triângulo.
4. Construir o círculo inscrito em um triângulo.
5. Construir um hexágono regular, dado em posição um lado.
6. Construir o triângulo ABC conhecendo os lados $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$ e a mediana m_a, relativa ao lado vértice A.
7. Construir o triângulo ABC conhecendo os lados $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$ e a altura h_a, relativa ao lado vértice A.
8. Construir o triângulo ABC conhecendo os lados $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$ e a altura h_a, relativa ao lado vértice A.

9. São dados em posição um círculo C e uma reta r. Determinar um ponto P sobre r de forma que as tangentes traçadas de P ao círculo C formem um ângulo α, dado.

10. Construir as tangentes comuns a dois círculos dados em posição.

11. Construir o triângulo ABC conhecendo o perímetro $2p$ e os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

12. Construir o triângulo ABC conhecendo o lado $\overline{BC} = a$, o ângulo $\hat{A}$ e a diferença $d = b - c$ dos outros dois lados.

13. Construir o triângulo ABC conhecendo o lado $\overline{BC} = a$ e as alturas h_b, com respeito ao lado AC, e h_c, com respeito ao lado AB.

14. Construir o trapézio $ABCD$ conhecendo a soma das bases $\overline{AB} + \overline{CD} = s$, as diagonais $\overline{AC} = p$ e $\overline{BD} = q$ e o lado $\overline{AD} = a$.

15. Construir um triângulo conhecendo os comprimentos da altura, mediana e bissetriz relativas a um mesmo vértice.

LEITURA COMPLEMENTAR

1. BARBOSA, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana.* SBM.

2. CARVALHO, j. p., *Os Três Problemas Clássicos da Matemática Grega.* OBMEP.

3. EUCLIDES, *Os Elementos.* Unesp. Tradução: Irineu Bicudo.

4. GREENBERG, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History.* Third Edition. W. H. Freeman.

5. POGORELOV, A. V., *Geometria Elemental.* MIR.

6. MOISE, E. E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*. Third edition. Addison-Wesley.

7. WAGNER, E., *Construções Geométricas*. SBM

8. WAGNER, E., *Uma Introdução às Construções Geométricas*. OBMEP.