AULA 11

Expressões Algébricas

META:

Resolver geometricamente problemas algébricos.

OBJETIVOS:

Introduzir a 4^a proporcional.

Construir segmentos que resolvem uma equação algébrica.

PRÉ-REQUISITOS

O aluno deverá ter compreendido as construções elementares.

11.1 Introdução

Olá caro aluno. Na aula passada você aprendeu como construir paralelas e perpendiculares, ângulos e seu arco capaz.
Nesta aula iremos tratar os problemas de construções um pouco diferente. Veremos qual a relação entre as construções geométricas e as soluções de equações algébricas.

11.2 A 4^a proporcional

Sempe que nos referirmos ao segmento x estaremos nos referindo tanto ao segmento quanto ao comprimento do segmento, ficando claro no contexto seu uso.

Definição 11.1. Dizemos que o segmento x é a quarta proporcional dentre os segmentos a, b e c quando

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

Problema 11.17. *Construir a 4^a proporcional entre os segmentos a, b e c.*

Solução Ver figura 11.1

1. Construa um ângulo de vértice O.
2. Sobre um lado tome pontos A e C tais que $\overline{OA} = a$ e $\overline{AC} = c$.
3. Sobre o outro lado tome um ponto B tal que $\overline{OB} = b$.
4. Trace por C uma paralela a AB, obtendo o ponto D em $S_{OB.}$
5. o segmento BD de comprimento $\overline{BD} = x$ é 4^a proporcional dentre os segmentos a, b e c.

□

Vejamos uma aplicação.

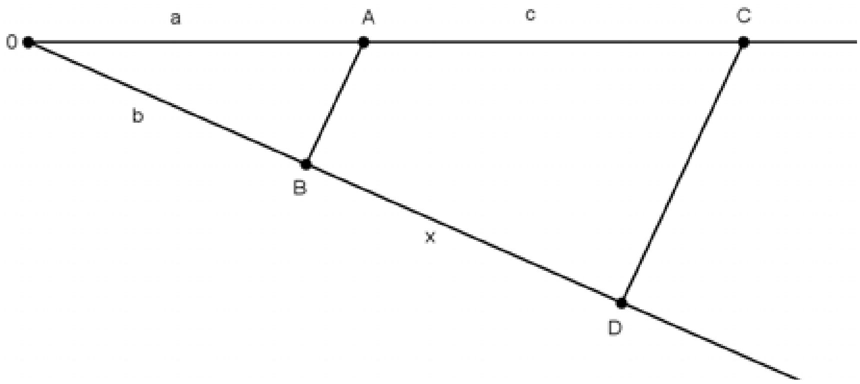

Figura 11.1: 4^a proporcional

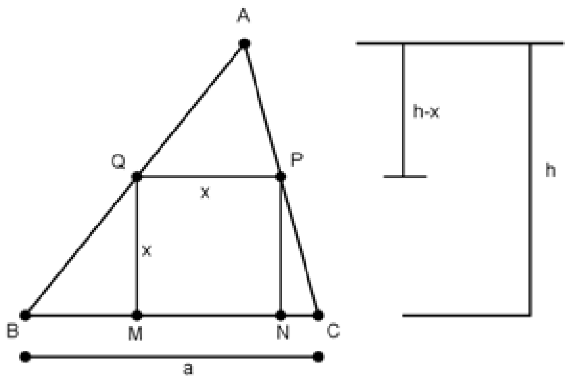

Figura 11.2: Esboço da solução do Problema 11.18

Problema 11.18. *Inscrever no triângulo ABC dado, um quadrado tendo um lado sobre $\overline{BC} = a$.*

Suponha resolvido o problema (veja figura 11.2).
Os triângulos AQP e ABC são semelhantes, já que QP é paralelo a BC. Daí,

$$\frac{x}{a} = \frac{h-x}{h}$$

o que implica que

$$x = \frac{ah}{a+h} \Rightarrow \frac{a+h}{a} = \frac{h}{x}.$$

Portanto, x é a 4^a proporcional entre $a+h, a$ e h.

Solução

1. Trace a perpendicular a BC que passa por A, determinando o ponto D. Assim, AD é a altura do triângulo ABC.

2. Determine a 4^a proporcional x dentre os números $a+h$, a e h.

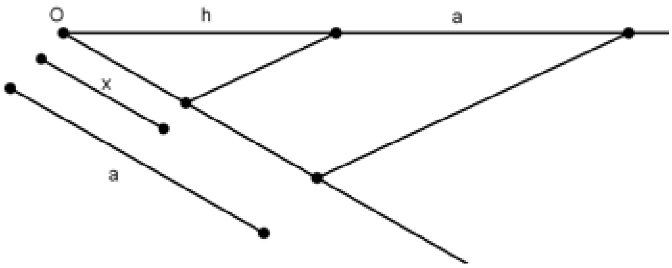

Figura 11.3: 4^a proporcional entre $a+h$, a e h.

3. Sobre a altura, construa $\overline{DE} = x$.

4. Trace uma paralela a BC passando por E, obtendo Q e P.

5. Q e P são os vértices do quadrado.

□

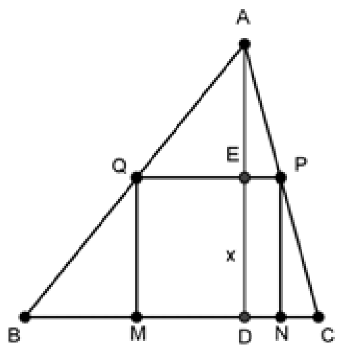

Figura 11.4: Solução do Problema 11.18

11.3 Expressões com raízes quadradas

Problema 11.19. *Construir* $\sqrt{a^2+b^2}$ *e* $\sqrt{a^2-b^2}$, *onde* a *e* b *são segmentos dados.*

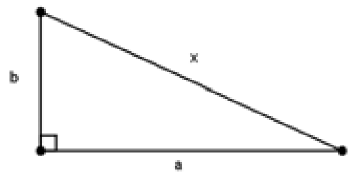

Figura 11.5: $x = \sqrt{a^2+b^2}$.

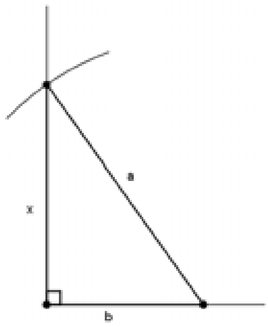

Figura 11.6: $x = \sqrt{a^2-b^2}$.

1. Se $x = \sqrt{a^2+b^2}$, então x é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são a e b.

2. Se $x = \sqrt{a^2-b^2}$, então x é um cateto de um triângulo retângulo de hipotenusa a, onde o outro cateto é igual a b.

3. Se $x = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ faça $m = \sqrt{a^2+b^2}$ e então$x = \sqrt{m^2+c^2}$. (ver figura 11.7).

Para construir a expressão $\sqrt{a^2+b^2}$, construímos um ângulo de 90° com vértice O, e tomamos pontos, A e B, nos lados deste ângulo tais que $\overline{OA} = a$ e $\overline{OB} = b$. Assim, a hipotenusa do

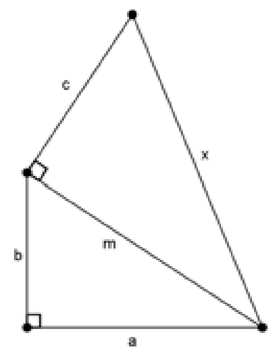

Figura 11.7: $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

triângulo retângulo OAB tem medida exatamente $\sqrt{a^2 + b^2}$. (ver figura 11.5).

Problema 11.20. *Construir* $a\sqrt{n}$ *com* n *natural e* a *um segmento dado.*

A solução está descrita na figura 11.8.

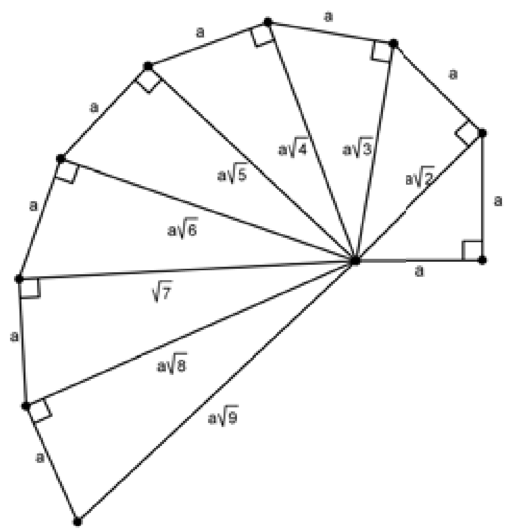

Figura 11.8: $x = a\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Problema 11.21. *Construir um quadrado conhecendo a soma* s *da diagonal com o lado.*

Solução Se a é o lado, então $s = a\sqrt{2}+a$, ou seja, $a = s(\sqrt{2}-1)$.

1. Construa um triângulo retângulo com catetos iquais a s. Assim a diagonal é igual a $s\sqrt{2}$
2. Sobre a diagonal, construa s obtendo a.

□

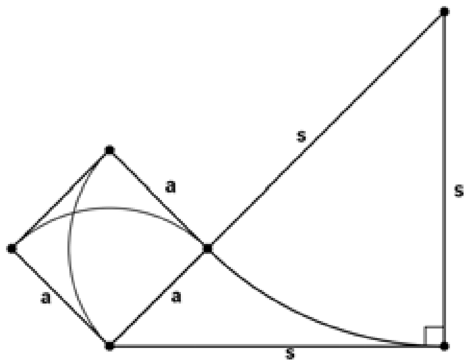

Figura 11.9: Solução do Problema 11.21

Problema 11.22. *Construir a média geométrica de dois segmentos a e b.*

- Solução 1: Veja a figura 11.10.

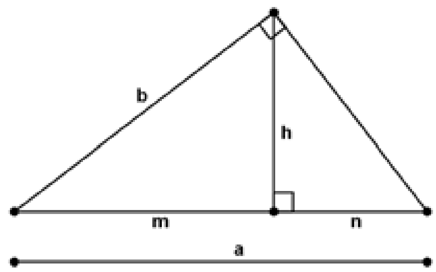

Figura 11.10: $h^2 = mn$ e $b^2 = am$.

- Solução 2:

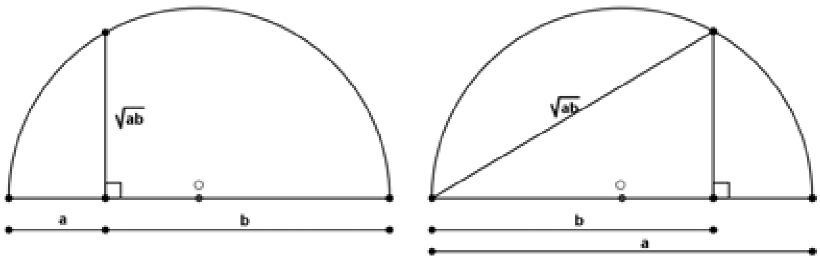

Figura 11.11: Você consegue mostrar que cada segmento é igual a $\sqrt{ab}$?

Na figura 11.12 a secante PA e a tangente PT ao círculo possuem a relação $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$. Este valor é chamado de *potência* do ponto P em relação ao círculo.

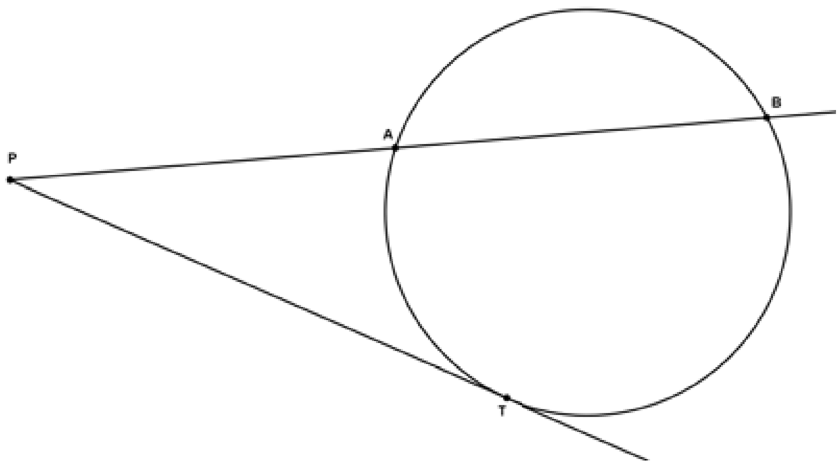

Figura 11.12: $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$.

Para demonstrar que $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ = constante, considere a notação da figura 11.13.
Neste caso, temos

$$\begin{aligned}
\overline{PA} \cdot \overline{PB} &= (\overline{PM} - m)(\overline{PM} + m) = \overline{PM}^2 - m^2 \\
&= \overline{PM}^2 + \overline{OM}^2 - (m^2 + \overline{OM}^2) = d^2 - R^2 \\
&= \text{potência de } P = POT(P)
\end{aligned}$$

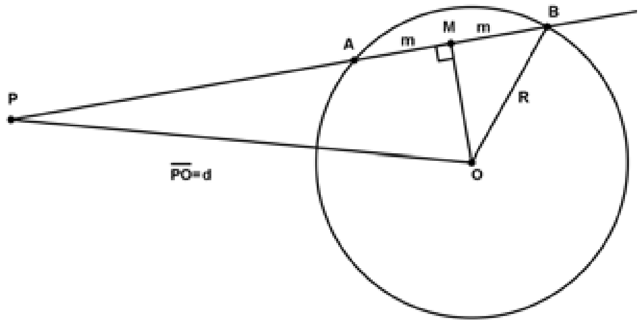

Figura 11.13: $\overline{PA} \cdot \overline{PB} =$ constante.

Problema 11.23. *Dados a e $\sqrt{ab}$, determine b.*

Solução

1. Trace $\overline{PT} = \sqrt{ab}$.

2. Trace um círculo tangente em T a PT.

3. Determine no círculo um ponto A tal que $\overline{PA} = a$.

4. PA determina um ponto B no círculo tal que $\overline{PB} = b$ e $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$.

□

Problema 11.24. *Resolver a equação $x^2 - ax + b^2 = 0$, onde a e b são segmentos dados.*

Solução (Veja figura 11.14). Resolvendo algebricamente essa equação temos

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2} = \frac{a}{2} \pm \frac{r}{2},$$

onde $r = \sqrt{a^2 - (2b)^2}$. Fazemos

$$x_1 = \frac{a}{2} - \frac{r}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{a}{2} + \frac{r}{2}.$$

Se $a > 2b$ a construção pode ser feita seguindo os passos:

1. Construa um triângulo ABC retângulo em A com $\overline{AB} = 2b$ e $\overline{BC} = a$. Daí, $\overline{AC} = r$.

2. Tome P o ponto médio de BC e trace uma paralela a AB passando por P, determinando Q em AC. Daí, $\overline{AQ} = \frac{r}{2}$.

3. Com centro em C e raio $\overline{CQ}$, trace um círculo obtendo M e N em BC, tais que $\overline{PM} = x_1$ e $\overline{PN} = x_2$.

$\square$

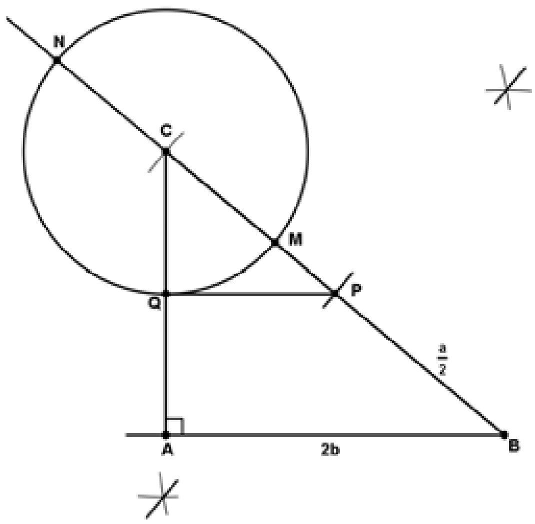

Figura 11.14: Resolvendo a equação $x^2 - ax + b^2 = 0$.

2^a **Solução:** Suponha $2a > b$. (Veja figura 11.15.)
Note que $x_1 + x_2 = a$ e $x_1 x_2 = b^2$.

1. Trace um semi-círculo de diâmetro $\overline{AB} = a$.

2. Trace uma perpendicular a AB e nesta perpendicular tome um ponto D a uma distância igual a b de AB.

3. Trace uma paralela a AB passando por D, determinando um ponto C no semi-círculo.

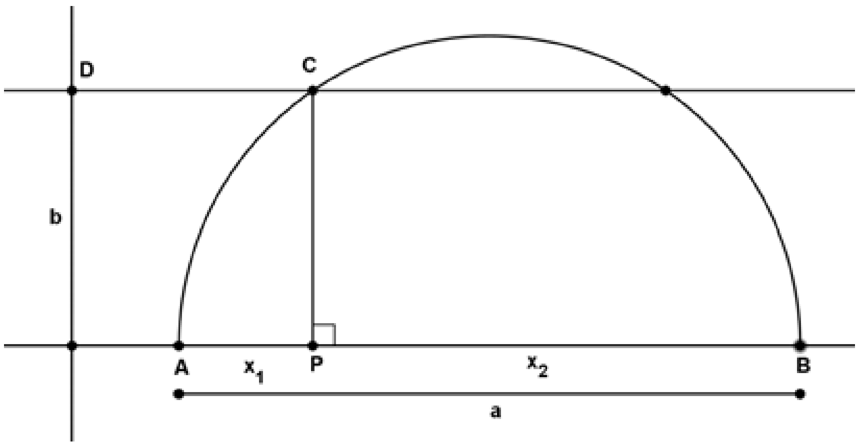

Figura 11.15: Resolvendo a equação $x^2 - ax + b^2 = 0$.

4. Trace uma perpendicular a AB passando por C, determinando P em AB.

Daí, usando o Teorema de Pitágora, mostramos que $\overline{PA} = x_1$ e $\overline{PB} = x_2$. $\square$

Problema 11.25. *Sejam A e B pontos em um mesmo lado de uma reta r. Construir um círculo passando por A e B que seja tangente a r.*

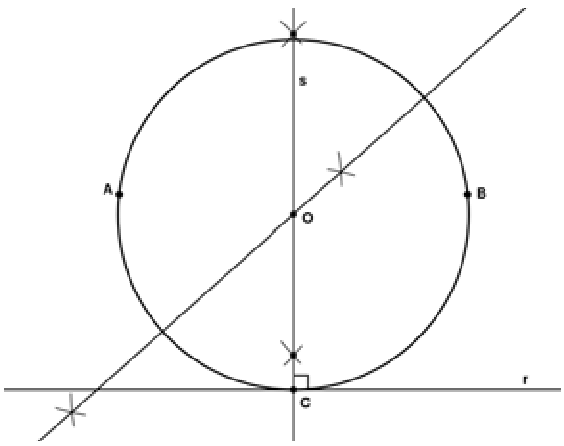

Figura 11.16: Solução do Problema 11.25 com $AB \parallel r$

Solução Suponha que AB seja paralelo a r (Figura 11.16.)

1. Trace a mediatriz s do segmento AB, encontrando o ponto C de interseção com a reta r.

2. Trace a mediatriz do segmento AC, encontrando o ponto O, interseção com s.

3. O ponto O é o centro do círculo que contém os pontos A, B e C, cujo raio é OA.

Note que este círculo é tangente à reta r.

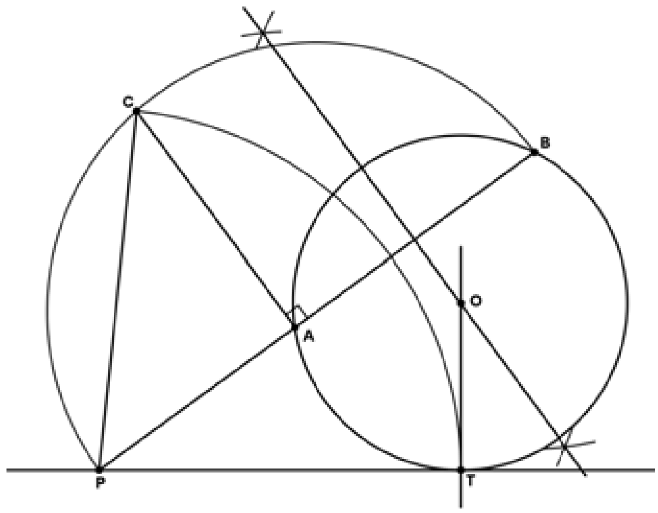

Figura 11.17: Solução do Problema 11.25 com AB arbitrário.

Suponha que AB não seja paralelo a r.

1. Determine o ponto P de interseção entre AB e r.

2. Determine um ponto T em r tal que $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$. Aqui use a solução do Problema 11.22 dada pela figura 11.11.

3. Trace a mediatriz de AB.

4. Trace a perpendicular a r passando por T, obtendo o centro do círculo O, interseção com a mediatriz.

$\square$

A maneira usual de encontrar a solução de um problema, é pensar nele resolvido e analisar um esboço da solução.

11.4 O segmento áureo

Tome um segmento AB e um ponto C em AB tal que a razão entre a menor parte e a maior parte é igual a maior parte e AB, isto é,

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$

Definição 11.2. Este segmento AC é chamado de *segmento áureo interno* de AB.

Se $\overline{AB} = a$, obtemos

$$\overline{AC} = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Esta razão tem fascinado matemáticos por mais de 2 mil anos, surgindo em diversas situações, desde a arquitetura ao corpo humano.
Considere um segmento AC' e um ponto B em AC' com a mesma propriedade do ponto C acima.

$$\frac{\overline{BC'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}}.$$

Definição 11.3. O segmento AC' é chamado segmento áureo externo de AB.

Se $\overline{AB} = a$, obtemos

$$\overline{AC'} = a\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

O lado do decágono regular inscrito em um círculo de raio R é igual a $R\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
Note também que $\overline{AC} \cdot \overline{AC'} = \overline{AB}^2$.

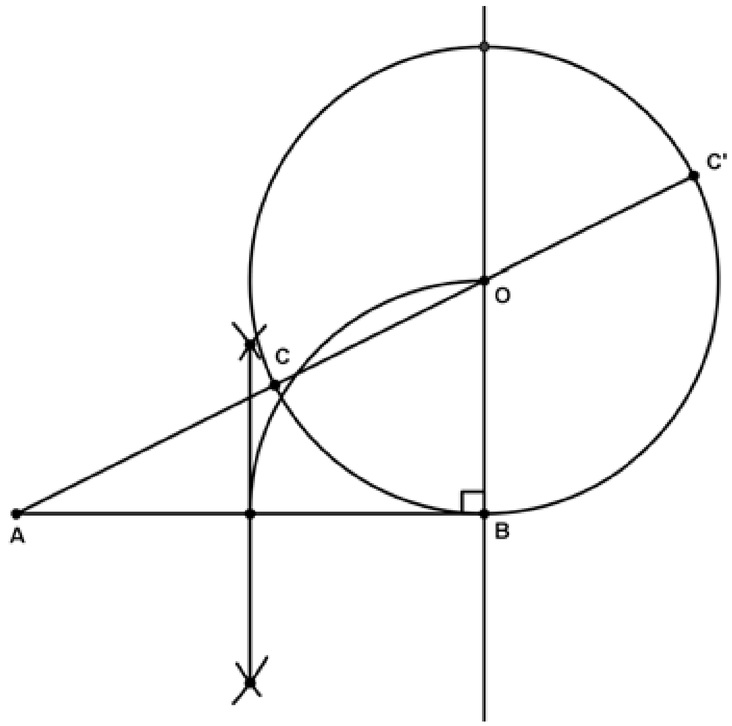

Figura 11.18: AC e AC' são os segmentos áureos de AB.

Problema 11.26. *Construir os segmentos áureos de* $\overline{AB} = a$.

Solução Ver figura 11.18.

1. Trace um círculo de raio $\frac{\overline{AB}}{2}$, tangente a AB em B.

2. A reta que passa por A e pelo centro do círculo corta o círculo em C e C' de modo que

$$\overline{AC} = a\frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ e } \overline{AC'} = a\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

De fato, pelo Teorema de Pitágora, temos $\overline{AO}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BO}^2$. Como $\overline{AB} = a$, $\overline{BO} = \frac{a}{2}$ e $\overline{AC} = \overline{AO} - \frac{a}{2}$, segue o resultado. □

11.5 Expressões construtíveis

Nesta seção daremos uma breve introduções às expressões construtíveis com régua e compasso.

Definição 11.4. Estabelecido um segmento unitário, dizemos que um número x é construtível se podemos obter um segmento de comprimento x a partir do segmento unitário com régua e compasso.

Problema 11.27. *Dados a e b, construir $\frac{a}{b}$, $\frac{1}{a}$, a^2 e $\sqrt{a}$.*

Solução As figuras abaixo mostram as construções dessas expressões. Nelas, aparece uma semi-reta cuja origem está associada o número 0 e um ponto associado ao número 1. Justifique cada construção. □

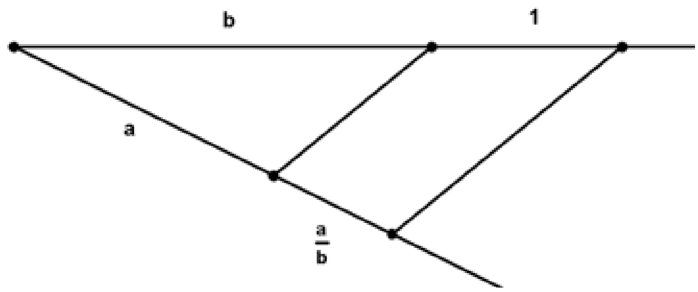

Figura 11.19: $\frac{a}{b}$ é contrutível se a e b o forem.

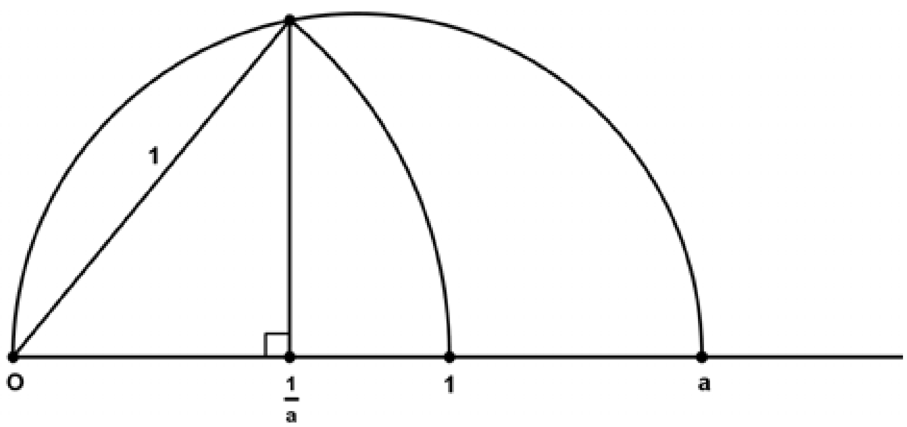

Figura 11.20: $\frac{1}{a}$ é contrutível se a o for.

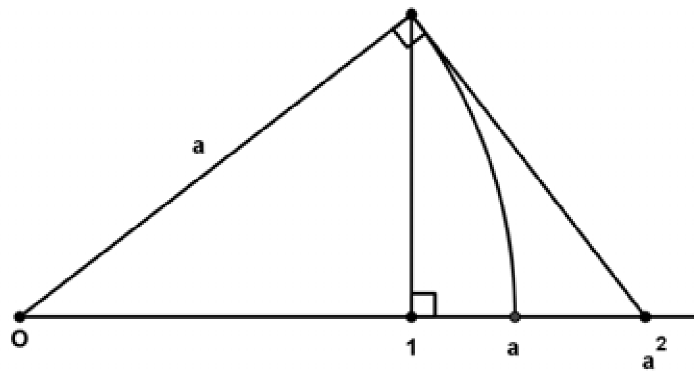

Figura 11.21: a^2 é contrutível se a o for.

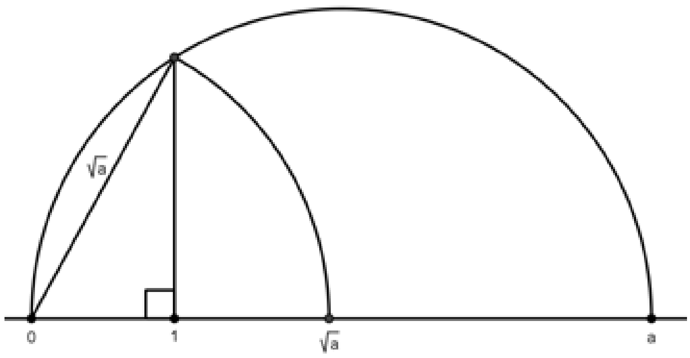

Figura 11.22: $\sqrt{a}$ é contrutível se a o for.

RESUMO

..

Nesta aula definimos a 4^a proporcional e vimos algumas de suas aplicações. Aprendemos sobre potência de um ponto com respeito a um círculo. Estudamos também como construir algumas expressões algébricas usando régua e compasso.

PRÓXIMA AULA

..

Na próxima aula veremos mais sobre construções possíveis e condições necessárias e suficientes para que seja possível construir uma expressão algébrica usando régua e compasso.

ATIVIDADES

Nos exercícios abaixo, construir significa indicar os passos de uma construção com régua e compasso.

1. Construir $x = \dfrac{abc}{de}$ onde a, b, c, d, e são segmentos dados.
2. Construir $x = \sqrt{a^2 + 3b^2}$ onde a e b são segmentos dados.
3. Construir $x = \dfrac{a}{\sqrt{n}}$ onde a é um segmentos dado e n é um número natural.
4. Construir $x = \dfrac{a^3 + a^2 b}{a^2 + b^2}$ onde a e b são segmentos dados.
5. Construir x tal que $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$.
6. Construir um triângulo retângulo conhecendo a soma dos catetos e a altura relativa à hipotenusa.
7. Construir um triângulo conhecendo a hipotenusa e asoma dos catetos.
8. A média harmônica de dois segmentos a e b é o segmento h tal que
$$h = \frac{2ab}{a+b}.$$
Construa a média harmônica de a e b.
9. Construa um pentágono regular conhecendo o seu lado.
10. São dados um círculo C e uma tangente t. Construir um quadrado que tenha dois vértices em C e os outros dois vértices em t.
11. Construir $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$.

12. Dados os segmentos a, b e c construa, utilizando um segmento unitário, $x = \sqrt{abc}$.

13. Construir x que resolve a equação $x^2 - ax - b^2 = 0$, onde a e b são segmentos dados.

14. Resolver o sistema
$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b^2 \end{cases}$$
onde a e b são segmentos dados.

15. Resolver o sistema
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a^2 \\ x + y = b \end{cases}$$
onde a e b são segmentos dados.

LEITURA COMPLEMENTAR

1. BARBOSA, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana.* SBM.
2. CARVALHO, j. p., *Os Três Problemas Clássicos da Matemática Grega.* OBMEP.
3. EUCLIDES, *Os Elementos.* Unesp. Tradução: Irineu Bicudo.
4. GREENBERG, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History.* Third Edition. W. H. Freeman.
5. POGORELOV, A. V., *Geometria Elemental.* MIR.
6. MOISE, E. E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint.* Third edition. Addison-Wesley.
7. WAGNER, E., *Construções Geométricas.* SBM
8. WAGNER, E., *Uma Introdução às Construções Geométricas.* OBMEP.