AULA 12

Construções Possíveis

META:

Identificar construçõs possíveis.

OBJETIVOS:

Dividir o círculo em partes iguais.

Apresentar critérios de construtibilidade.

Entender porque os problemas clássicos não possuem solução.

Construir polígonos regulares.

PRÉ-REQUISITOS

O aluno deverá ter compreendido as duas últimas aulas.

12.1 Introdução

Na aula 10 já falamos um pouco sobre os problemas clássicos, que consistem em resolver três problemas com o uso somente da régua (não graduada) e do compasso.
Embora a regra do jogo seja a utilização somente de régua e copasso, é fato que os gregos utilizaram outros métodos na resolução de problemas de construções geométricas. De suas tentativas para achar soluções para os problemas clássicos, surgiram várias curvas e métodos que enriqueceram a Matemática.
Nesta aula, vamos apresentar as construções geométricas possíveis usando régua e compasso. Muitas das demonstrações sobre construtibilidade faz uso de uma matemática que foge ao escopo deste curso, e desta forma não apresentaremos aqui.

12.2 Divisão do círculo em n parte iguais

Alguns problemas de natureza simples não podem ser resolvidos com régua e compasso. Por exemplo, é impossível retificar o círculo com régua e compasso, simplesmente por que o número π não é construtível, como veremos adiante.
O problema de dividir o círculo em n partes iguais, em geral, é impossível resolvê-lo.
Aqui apresentaremos alguns casos particulares.

Problema 12.28. *Dividir o círculo em n partes iguais.*

Como foi dito anteriormente, este problema em geral não é possível de resolver. Vamos resolvê-lo para alguns casos.
Caso 1: $n = 2^k,\ k \in \mathbb{N}$. Este caso é o mais simples de todos. E a prova é por indução.

1. $n = 2 \rightarrow$ Trace o diâmetro.

2. $n = 2^2 = 4 \rightarrow$ Trace as bissetrizes dos dois ângulos formados pelo diâmetro.

3. $n = 2^3 = 8 \rightarrow$ Trace as mediatrizes dos lados do polígono formado no caso anterior.

4. $n = 2^k \rightarrow$ Trace as mediatrizes dos lados do polígono formado no caso $n = 2^{k-1}$.

Caso 2: $n = 2^k 3,\ k = 0, 1, 2, \ldots$

1. $n = 3 \rightarrow$ Construa um triângulo equilátero inscrito no círculo.

   Se ABC é um triângulo equilátero inscrito no círculo de raio R, então o lado do triângulo é igual $a = R\sqrt{3}$ (Por que?). Então, dado o segmento R, pela construção da aula passada, podemos construir o segmento $R\sqrt{3}$. Com um compasso, construímos um triângulo equilátero de lado $R\sqrt{3}$ inscrito no círculo de raio R.

2. $n = 6 \rightarrow$ Trace as mediatrizes dos lados do triângulo anterior formando um polígono regular de 6 lados.

3. $n = 2^k 3 \rightarrow$ Trace as mediatrizes dos lados do polígono regular formado no caso $2^{k-1}3$.

Caso 3: $n = 2^k 5,\ k = 0, 1, 2, \ldots$

1. $n = 10 = 2 \cdot 5 \rightarrow$ Construir um polígono regular de 10 lados (decágono) inscrito no círculo.

   Se o raio do círculo é R, então o lado mede
   $$R\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$
   Com um compasso encontramos os vértices do decágono no círculo.

2. $n = 5 \rightarrow$ Construir um pentágono regular a partir do decágono regular.

   Construa um decágono com vértices numerados de 1 a 10. O pentágono é o polígono obtido a partir dos vértices pares do decágono.

3. $n = 2^k 5 \rightarrow$ Traçar as mediatrizes dos lados do polígono regular formado no caso $2^{k-1}5$

Caso 4: $n = 2^k \cdot 3 \cdot 5$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

1. $n = 3 \cdot 5 = 15 \rightarrow$ Construir um triângulo equilátero ABC inscrito no círculo e um pentágono regular $ADEFG$ inscrito no círculo. Considere a figura 12.1

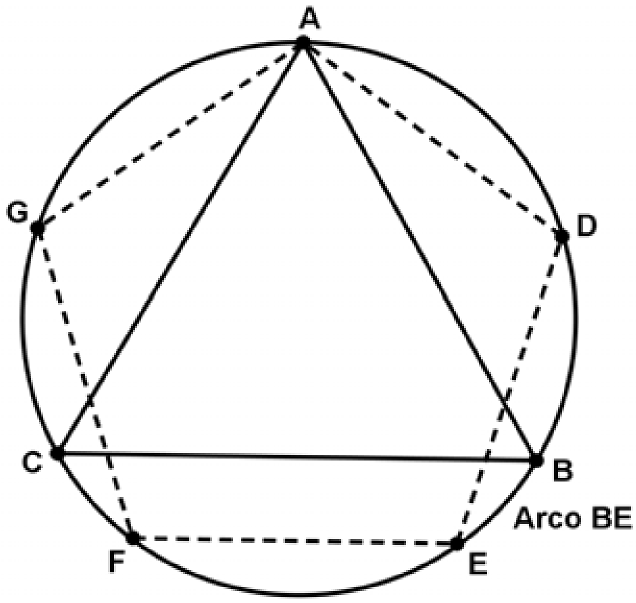

Figura 12.1: O arco BE é 1/5 do círculo

Note que

$$\begin{aligned}\overset{\frown}{AB} &= \frac{1}{3} \text{ do círculo}\\ \overset{\frown}{AE} &= \frac{2}{5} \text{ do círculo,}\end{aligned}$$

o que implica que $\overset{\frown}{BE} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{15}$ do círculo.

2. $n = 2^k \cdot 3 \cdot 5 \rightarrow$ Traçar as mediatrizes dos lados do polígono regular formado no caso $2^{k-1} \cdot 3 \cdot 5$.

Observação: É impossível dividir um círculo em $7, 9, 11, 13, 14, 18, 19$ partes iguais, citando apenas os valores menores que 20.

No final do século 18, Gauss descobriu que é possível dividir um círculo exatamente em 17 partes iguais.

Apresentamos a seguir um método de divisão aproximada do círculo em n partes iguais, para qualquer valor de n. Veja figura 12.2

Solução

1. Trace um diâmetro AB.
2. Determine pontos P e Q tais que ABP e ABQ sejam triângulos equiláteros.
3. Divida AB em n partes iguais pelos pontos 1,2, $\cdots$, n-1.
4. As retas que unem P e Q aos pontos de ordem par, determinam nos semi-círculos opostos os pontos que dividem aproximadamente esse círculo em n partes iguais.

□

12.3 Construções Possíveis Utilizando Régua e Compasso

Relembremos algumas regras para as construções com régua e compasso.

Regras:

1. Traçar uma reta, conhecendo dois de seus pontos
2. traçar um círculo, conhecendo o seu centro e um ponto do círculo
3. Determinar as interseções de retas ou círculos já construídos com retas ou círculos já construídos

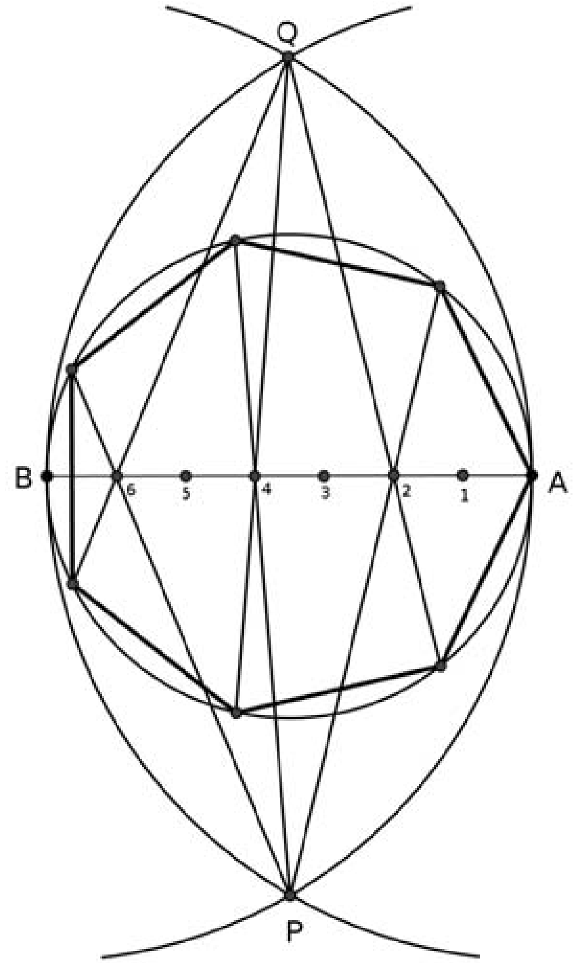

Figura 12.2: Divisão aproximada do círculo em 7 partes iguais.

Pelo que nós vimos até aqui, somente com régua e compasso, é possível construir um ponto (não arbitrário) fora de uma reta, e traçar por este ponto (ou qualquer outro já construído) uma paralela ou uma perpendicular a esta reta.

Problemas: Os famosos problemas clássicos são:

1. Duplicação do cubo

2. Quadratura do círculo

3. Tri-secção de um ângulo arbitrário

4. Construção de polígonos regulares

Esses problemas surgiram na Grécia antiga por volta do ano de 429 a.C. e só foram completamente entendidos na virada do século 18 para o século 19 d.C., com os trabalhos de Gauss (1777 - 1855) e Galois (1811 - 1832).
O último problema acima não é tão famoso quanto os outros, mas o enumeramos, já que assim como os outros ele é bastante interessante.

Definição 12.1. Fixado um segmento com a unidades de comprimento, diremos que um número x é *construtível* se for possível construir com régua e compasso um segmento de comprimento x a partir do segmento de com comprimento a.

Problema 12.29. *Se a e b são construtíveis, então $a + b, -a, ab$ e $\frac{1}{a}$ também o são.*

A figura 12.3 e 12.4 mostram como fazer construção. A construção é feita com retas paralelas. Para justificá-las utilize as propriedades de paralelogramos e o Teorema de Tales.

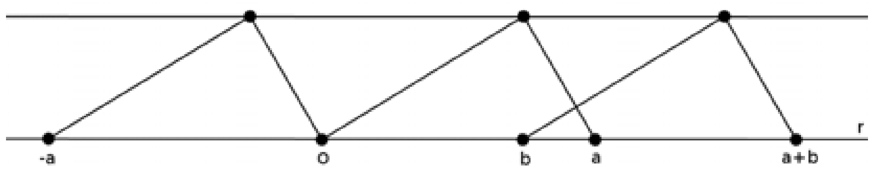

Figura 12.3:

Observação Disto segue que todos os números inteiros e racionais são construtíveis.

A figura 12.5 mostra que, se $a > 0$ for construtível, então $\sqrt{a}$ também será construtível.
De fato, Seja A o ponto da reta r que corresponde ao número 1 e B o ponto que corresponde ao número $\frac{a}{2}$. Assim, $\overline{BA} = \frac{a}{2} - 1$, e

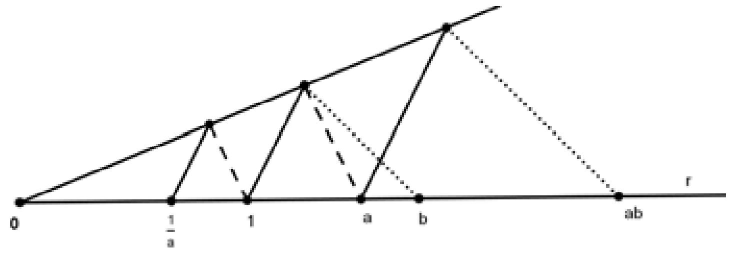

Figura 12.4:

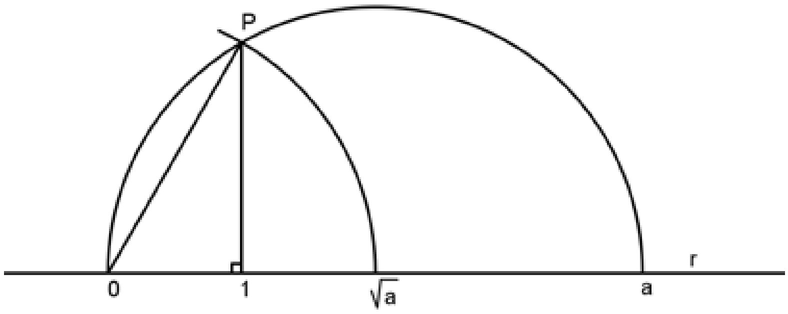

Figura 12.5:

pelo Teorema de Pitágoras, obtemos

$$\overline{AP}^2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a}{2} - 1\right)^2 = a - 1.$$

O que implica que

$$\overline{OP}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{PB} = 1 + a - 1 = a.$$

Disto, segue que existem irracionais construtíveis ($\sqrt{2}$ por exemplo).

Exercício 12.1. Construir os números $-\dfrac{2}{7}, 1,333\cdots$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{3}$ e $\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

Observação O conjunto dos números construtíveis formam um subcorpo dos números reais, isto é, é um subconjunto dos números reais que possui 0 e 1 e é fechado para a adição, multiplicação, e cálculo de simétricos e de inversos (de elementos não nulos).

12.3.1 O Princípio da Solução

Muitas vezes, para determinar se determinado número é construtível com régua e compasso é necessário passar o problema para o plano.

Definição 12.2. Um ponto $P = (a, b)$ do plano é dito construtível se a e b são construtíveis.

Como já sabemos que todos os números racionais são construtíveis, segue que todos os pontos do plano com coordenadas racionais são construtíveis.

Observação: Se uma reta r une dois pontos do plano (α, β) e (γ, δ) com $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}$, a equação de r é da forma $ax+by+c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{Q}$.
Se um círculo tiver centro (α, β) e passa pelo ponto (γ, δ) com $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}$, sua equação é da forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, com $a, b,\ c \in \mathbb{Q}$.
Assim, se queremos encontrar o ponto de interseção entre retas e cículos dos tipos acima, temos 3 casos a considerar:

1. Interseção de duas retas do tipo acima.

   Neste caso, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c &= 0 \end{cases}$$

   com $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{Q}$.

2. Interseção de uma reta com um círculo dos tipos acima.

   Devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0, \end{cases}$$

   com $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{Q}$.

3. Interseção de dois círculos como acima.

   Resolver o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c &= 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' &= 0, \end{cases}$$

   ou, equivalentemente, resolver o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c &= 0 \\ (a - a')x + (b - b')y + c - c' &= 0, \end{cases}$$

   com $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{Q}$.

As soluções destes sistemas são racionais ou do tipo $a + b\sqrt{c}$, com $a, b, c \in \mathbb{Q}, c \geq 0$.

Conclusão:

Sabemos que os números racionais são construtíveis. Em particular, todos os pontos do plano com coordenadas racionais são construtíveis. Partindo destes pontos e fazendo construções com régua e compasso, envolvendo apenas uma interseção de reta com reta, reta com círculo ou círculo com círculo, as coordenadas dos novos pontos obtidos são da forma $a + b\sqrt{c}$ com $a, b, c \in \mathbb{Q}$ e $c \geq 0$. Prosseguindo com uma segunda etapa de construção com régua e compasso, os novos números obtidos serão da forma $a + b\sqrt{c}$, com a, b e c da forma anteriormente indicada.

Exemplo 12.1.

- 1^a Etapa: $1 + \sqrt{2}, \frac{3}{4} + \sqrt{\frac{5}{8}}$
- 2^a Etapa: $4(1 + \sqrt{2}) + 5\sqrt{3(1 + \sqrt{2})}, 1 + \sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{5}{8}}}$

Exercício 12.2. Mostre que os números da forma $a + b\sqrt{2}$, onde $a, b \in \mathbb{Q}$, é um corpo.

Resumo:

- Um número construtível é obtido como primeira coordenada de um ponto que tenha sido obtido a partir dos pontos iniciais 0 e 1 da reta base, através de um número finito de interseções de retas e/ou círculos.

- Um número é contrutível se e somente se pode ser escrito em termos de números racionais, usando somente adições, multiplicações, simétricas, inversos e raízes quadradas.

Exercício 12.3. Verifique que é construtível o número

$$\sqrt[4]{\frac{3-0,2\sqrt[16]{1+\sqrt{2}}}{\frac{2}{11}+\sqrt[32]{6-\sqrt[8]{0,4}}}}.$$

12.3.2 Um critério de não-construtibilidade

O próximo teorema fornece um meio de determinar números não-construtíveis.

Teorema 12.1. *Todo número construtível é raiz de uma equação polinomial (ou algébrica) de coeficientes inteiros.*

Exercício 12.4. Verifique o número construtível $\sqrt{2}+\sqrt{1+\sqrt{3}}$ é raiz de uma equação polinomial.

Definição 12.3. Um número que é raiz de algum polinômio com coeficientes inteiros é dito *algébrico*. Caso contrário é dito *transcendente*.

Exemplo 12.2. Os números racionais e os números $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$ e $\sqrt{2+\sqrt[4]{3}}$ são algébricos. Os números e , π, $\sqrt{\pi}$, e^2 são transcendentes.

Em geral, é muito difícil de determinar se um determinado número é transcendente ou não. O primeiro a exibir números comprovadamente transcendente foi Liouville (1809–1882). Somente em 1873, Hermite mostrou que o famoso número e é transcedente, e em 1882, Lindermann provou que o número π também é transcedente.

Corolário 12.1. *Todo número transcendente não é construtível. Portanto π não é construtível, donde concluímos que o círculo não é quadrável.*

De fato, a área do círculo unitário é 2π. Quadrar o círculo, significa que devemos construir um quadrado com lado a tal que sua área seja exatamente 2π, ou seja, $a^2 = 2\pi$. Mas como π não é construtível, segue que $\sqrt{\pi}$ também não é construtível.

12.3.3 O critério geral de não-construtibilidade

Na seção anterior vimos que todos os números construtíveis são algébricos. Então você pode se perguntar se todos os números algébricos são construtíveis. A resposta é não.

Definição 12.4. O grau de um número α é o grau do polinômio irredutível $p(x)$ com coeficientes inteiros e tal que $p(\alpha) = 0$.

Exemplo 12.3. O grau de $\sqrt[3]{2}$ é três. Basta considerar o polinômio $x^3 - 2$.

Exemplo 12.4. Determine o grau de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Solução Faça $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Então,

$$\sqrt{2} = x - \sqrt{3} \Rightarrow 2 = x^2 + 3 - 2\sqrt{3}x$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3}x = x^2 + 1 \Rightarrow 12x^2 = x^4 + 1 + 2x^2$$

$$\Rightarrow x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

□

Agora podemos dar o critério geral de não construtibilidade.

Teorema 12.2. *Um número é construtível se e somente se é algébrico de grau igual a uma potência de* 2.

A demonstração deste teorema envolve envolve ferramentas da teoria de grupos e da teoria de Galois.

Corolário 12.2. *O cubo não é duplicável.*

Demonstração Considere um cubo de aresta a. A aresta do cubo com o dobro do volume é $a\sqrt[3]{2}$. Então o cubo poderá ser duplicado se $\sqrt[3]{2}$ for construtível, porém o grau de $\sqrt[3]{2}$ é igual a 3 que não é uma potência de 2. □

Corolário 12.3. *É impossível tri-seccionar um ângulo arbitrário.*

Definição 12.5. Um ângulo θ é construtível se seu cosseno for construtível. (Ver figura).

Exemplo 12.5. O ângulo $60°$ é construtível, pois $\cos 60° = 1/2$.

Exemplo 12.6. O ângulo $\theta = 90°$ pode ser tri-seccionado, pois $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ é construtível. De fato $\frac{\sqrt{3}}{2}$ é raiz da equação polinomial $4x^2 - 3 = 0$.

Exemplo 12.7. O ângulo $\theta = 20°$ não pode ser tri-seccionado.
De fato, se $x = \cos 20°$, então da fórmula $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$, obtemos

$$\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x$$

que é equivalente a

$$8x^3 - 6x - 1 = 0,$$

onde $8x^3 - 6x - 1$ é irredutível, pois do contrário

$$8x^3 - 6x - 1 = (ax - b)(cx^2 + dx + e),\ a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$$

e portanto $\frac{b}{a}$ seria uma raiz com $mdc(a, b) = 1$, ou seja,

$$8\left(\frac{b}{a}\right)^3 - 6\frac{b}{a} - 1 = 8\frac{b^3}{a^3} - 6\frac{b}{a} - 1 = 0$$

o que implica que

$$a = 8\frac{b^3}{a^2} - 6b,$$

que é possível somente se $\frac{b}{a}$ for inteiro, mas estamos supondo que $mdc(a, b) = 1$.
Portanto, $8x^3 - 6x - 1 = 0$ é irredutível.

12.3.4 Polígonos regulares construtíveis

Naturalmente, o problema de construir um polígono regular de n lados, ou o que é equivalente, dividir o círculo em n parte iguais, consiste em construir seu ângulo central $\dfrac{360°}{n}$, ou o que é o mesmo, o seu cosseno. Nos Elementos de Euclides, eles fornecem a construção dos polígonos regulares com $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10$ e 15. Construções para os polígonos de 7 e 9 lados, por exemplo, só foram dadas por Gauss em 1796.

De fato, não é díficil verificar que se $p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$ for a decomposição do número n em fatores primos, então o polígono regular de n é construtível se e somente se o polígono regular de $p_i^{k_i}$ lados o for. Mais ainda, como o fator 2 não causa problema, temos que nos preocupar apenas com os primos ímpares.

Teorema 12.3 (Gauss). *Se n for primo, então o polígono regular de n lados será construtível se e somente se n for da forma $2^{2^m}+1$.*

Os números naturais da forma $2^{2^m}+1$ são chamados de números de Fermat, devido a Fermat (1601–1665), que conjecturou que todos eles fossem primos. Na verdade os únicos números primos desta forma conhecidos são 3, 5, 17, 257 e 65537, que são os números correspondentes a $m = 0, 1, 2, 3$ e 4. Para $m = 5$, temos que

$$2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297 = 641 \times 6.700417.$$

Gauss descobriu a construtibilidade do polígono regular de 17 lados um mês antes de completar 19 anos. Fato este que agusou o interesse de alguns almães do século 19 que um certo Richelot publicou, em 194 páginas de uma conhecida revista de Matemática, a construção do polígono de 257 lados. Um matemático amador dedicou dez anos de sua vida escrevendo o método de construção do polígono regular de 65.537 lados.

Para você ter uma idéia da dificuldade de construir estes polígonos, como o próprio Gauss calculou, o problema de construir o polígono regular de 17 lados é equivalente a construir o número:

$$\cos\left(\frac{360°}{17}\right) = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$$

$$+\frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.$$

Resumimos nossa discussão no seguinte teorema.

Teorema 12.4. *É possível construir um polígono regular de n lados se e somente se n se decompuser em fatores primos na forma $2^k p_1 \cdots p_m$, onde os p_i são primos de Fermat.*

RESUMO

Nesta aula vimos que os problemas clássicos não possíveis de resolvidos não somente com régua e compasso. Aprendemos como identificar números construtíveis, polígonos regulares construtíveis e ângulos construtíveis.

ATIVIDADES

1. Construa $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt{1+\sqrt{2}}$.
2. Construa $-\dfrac{4}{5}$ e $1,33333\cdots$
3. Verifique que é construtível o número
$$\sqrt[4]{\frac{3-0,2\sqrt[16]{1+\sqrt{2}}}{\dfrac{2}{11}+\sqrt[32]{6-\sqrt[8]{0,8}}}}.$$
4. Mostre que $1+\sqrt{3}$ é algébrico.

   Considere no plano complexo o círculo unitário, isto é, $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Para $n \in \mathbb{N}$, considere as raízes complexas da equação $x^n = 1$, são elas: $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$, onde $\omega = \cos\theta + i\text{sen }\theta$, com $\theta = 360°/n$. Estas raízes dividem o círculo unitário $\mathbb{S}^1$ em n partes iguais. A construtibilidade do polígono regular de n partes é equivalente à de $\cos\theta$, ou, de modo equivalente, à de $2\cos\theta = \omega + \overline{\omega} = \omega + 1/\omega$.

5. Vamos mostrar que o pentágono é construtível
   (a) Mostre que o polinômio $x^2 + x - 1$ é irredutível.
   (b) Tome $\theta = 360°/5$ e faça $\alpha := \omega + 1/\omega$. Mostre que $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$ e conclua que $\cos(360°/5) = (\sqrt{5} - 1)/2$.

(c) Conclua que o pentágono regular é construtível.

6. Vamos mostrar que heptágono regular é não é construtível.

   (a) Mostre que o polinômio $x^3 + x^2 - 2x - 1$ é irredutível.

   (b) Mostre que $\alpha = \omega + 1/\omega = \cos(360°/7)$ é raiz do polinômio acima.

   (c) Conclua que o heptágono regular não é construtível.

7. Seja P_n é o polígono regular de n lados. Para que valores de $n \leq 50$ P_n é construtível?

8. Seja P_n é o polígono regular de n lados. Para que valores de $n \leq 50$ P_n não é construtível?

LEITURA COMPLEMENTAR

¨

1. BARBOSA, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana.* SBM.

2. CARVALHO, j. p., *Os Três Problemas Clássicos da Matemática Grega.* OBMEP.

3. EUCLIDES, *Os Elementos.* Unesp. Tradução: Irineu Bicudo.

4. GREENBERG, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History.* Third Edition. W. H. Freeman.

5. POGORELOV, A. V., *Geometria Elemental.* MIR.

6. MOISE, E. E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint.* Third edition. Addison-Wesley.

7. WAGNER, E., *Construções Geométricas.* SBM

8. WAGNER, E., *Uma Introdução às Construções Geométricas.* OBMEP.