17 aula

GRANDEZAS ESCALARES E VETORIAIS

META

Apresentar as grandezas vetoriais e seu significado

OBJETIVOS

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:
Diferenciar grandezas escalares e vetoriais;
compreender a notação vetorial.
Representar analiticamente um vetor;
desenvolver operações de composição e decomposição de vetores

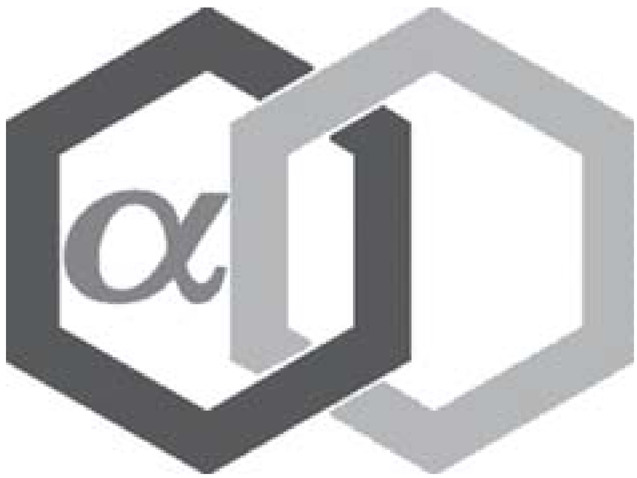
PRÉ-REQUISITOS

Você vai precisar de calculadora e uma régua.

A Física lida com um amplo conjunto de grandezas. Para algumas grandeza basta um único número para representá-las.

Em outros casos, esse número não é suficiente. Então temos dois subgrupos de grandeza que devemos compreender e diferenciar. Isso é o que veremos na aulas de hoje.

INTRODUÇÃO

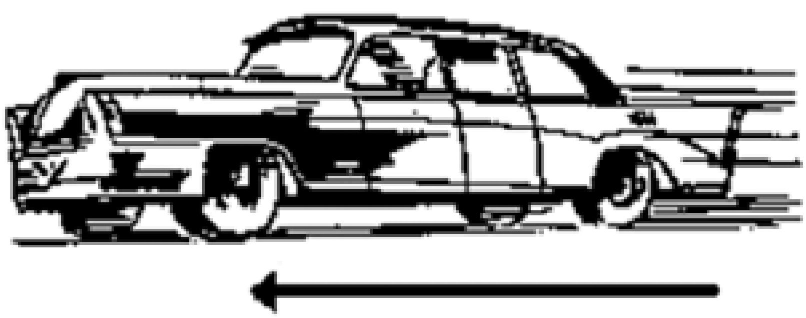


(Fonte: httpalfaconnection.net).

ESCALARES E VETORES

Um único número com uma unidade de medida é ótimo para representar muitas dessas grandezas físicas, como temperatura, tempo, massa, etc. Uma vez especificado que a massa de um corpo é 100 kg ou a temperatura hoje será de 28ºC, não precisamos de mais nada para caracterizá-las. Essas grandezas são denominadas **escalares**.

Mas os escalares são unidimensionais; eles têm somente magnitude e não podem representar várias outras grandezas que tenham uma direção associada com elas. Por exemplo, pense como você poderia descrever com apenas um número o movimento de um carro. Não dá, não é mesmo? Não basta dizer com que velocidade ele se desloca. Você precisa dizer em que direção e sentido ele vai.



Outro exemplo é a posição do carro. Não basta dizer que ele está a 100 m. Existem muitas possíveis localizações desse carro a 100 m. Ele pode estar para cima, para baixo, para os lados, ...Para localizar o carro, é preciso especificar também a direção e o sentido em que ele se encontra. É o que fazemos, por exemplo, quando apontamos com nossas mãos onde está o carro.

Então, para especificarmos bem a velocidade ou a localização do carro precisamos de um outro tipo de representação: um vetor. O vetor representa o módulo, a direção e o sentido, da grandeza física.

Um vetor tem duas propriedades variáveis independentes: magnitude e direção. No caso do movimento do carro, se ele se desloca na direção norte-sul em sentido do sul, temos então seu movimento descrito completamente se dissermos o valor da sua velocidade,

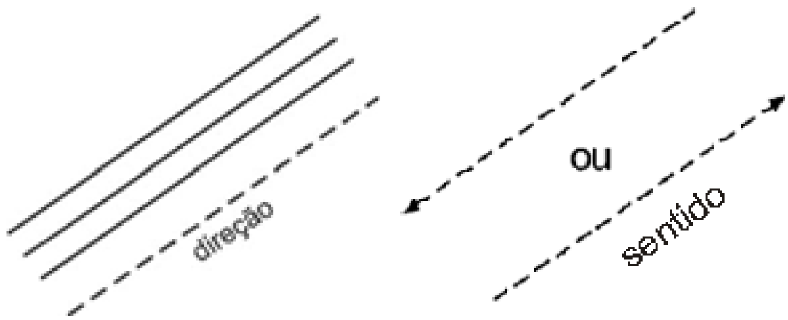
Direção

É aquilo que existe de comum num feixe de retas paralelas.

Sentido

Podemos percorrer uma direção em dois sentidos. Portanto, para cada direção existem dois sentidos.

que corresponde a magnitude do vetor. Assim teremos um vetor velocidade que descreve o movimento do carro. Resumindo: uma grandeza vetorial é tal que sua caracterização completa requer um conjunto de três atributos: o módulo, a direção e o sentido.



Vetores são usados comumente em física para representar fenômenos como posição, força, velocidade e aceleração, que são grandezas vetoriais.

REPRESENTAÇÃO DE UM VETOR

Vetores são frequentemente representados por uma única letra em negrito (**A**) e/ou com uma flecha sobre a letra ($\vec{A}$). Como você não pode fazer o negrito quando faz suas notações manuscritas, represente um vetor com uma flecha sobre uma letr(por exemplo: $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ ...). A flecha serve para lembrar o leitor que se trata de uma grandeza vetorial, e portanto tem módulo, direção e sentido.

Ao longo desse texto vamos estabelecer a distinção entre grandezas vetoriais e escalares, colocando uma flecha sobre as primeiras:

m = escalar massa

T= escalar temperatura

$\vec{r}$ = vetor posição

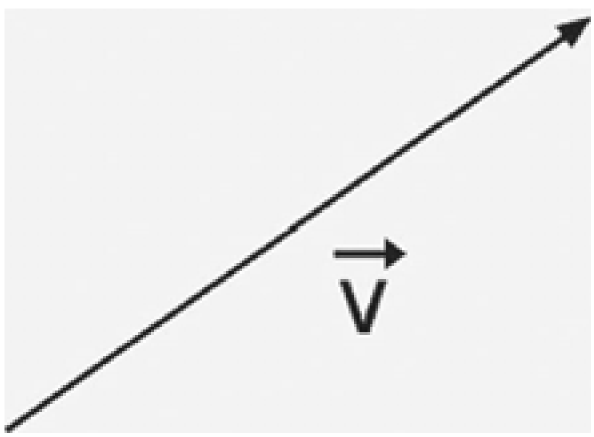
$\vec{F}$ = vetor força

Cuidado, é muito importante representar corretamente uma grandeza vetorial, pois suas propriedades são diferentes de grandezas escalares. Os cálculos envolvendo grandezas escalares são feitos em operações aritméticas usuais. Por exemplo:

$$2\ h + 3\ h = 5\ h \text{ ou } 5\ x10\ kg = 50\ kg$$

Porém os cálculos envolvendo grandezas vetoriais precisam de operações específicas.

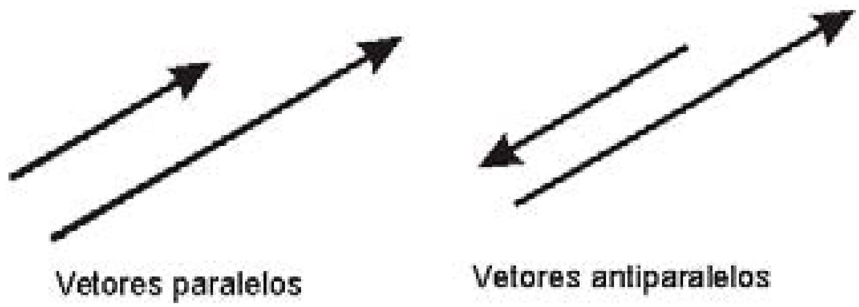
Graficamente, um vetor é representado através de um segmento de reta orientado (uma flecha). A vantagem dessa representação é que ela permite especificar a direção (dada pela reta) e o sentido (especificado pela flecha). Além disso, o seu módulo será especificado pelo “tamanho” do segmento, a partir de alguma convenção para a escala.



VETORES PARALELOS

Caso dois vetores ($\vec{A}$ e $\vec{A}$ ’) tenham a mesma direção e o mesmo sentido eles são ditos *paralelos* ($\vec{A} = \vec{A}$ ’), não importando seu módulo. Caso eles possuam ainda o mesmo módulo, eles serão iguais, independentemente do local onde se encontrem no espaço. Por exemplo, o vetor deslocamento de seu carro desde seu portão até a esquina pode ser igual a outro vetor deslocamento que ele realize em outro ponto de sua cidade. Basta que ambos tenham mesmo módulo, direção e sentido.

Se o sentido for invertido (contrário ao do outro vetor) dois vetores são ditos *antiparalelos*. Assim, digamos que o vetor $\vec{A}$' é um vetor negativo do vetor $\vec{A}$ ($\vec{A} = -\vec{A}$') se ele possui o mesmo módulo e direção de $\vec{A}$, porém com sentido contrário.



VETORES NO PLANO E NO ESPAÇO

Suponha que você está dirigindo um carro e sofra um deslocamento em linha reta de frente da sua casa até a esquina na sua rua. Chamamos este vetor deslocamento de $\vec{A}$. Agora você dobra à direita e sofre outro deslocamento em linha reta até a outra esquina. Este vetor chamaremos de $\vec{B}$. Em relação à sua casa você se deslocou apenas $\vec{C}$ que correspondente ao segmento de reta iniciado no portão de sua casa e o ponto onde você se encontra na segunda esquina, que é diferente da distância total percorrida pelo seu carro. Por exemplo, se o carro fizesse o trajeto de ida e volta, seu vetor deslocamento seria igual a zero, porém ele teria percorrido a distância de ida e volta, que é bem diferente de zero.

Nesses casos até é fácil visualizar o movimento e pensar nos vetores um a um. Mas muitas vezes temos que recorrer a matemática para facilitar nossa vida, pois talvez teremos que somar uma quantidade enorme de vetores ou imaginá-los em mais de duas dimensões. Então tudo pode parecer confuso. Ok, então a melhor maneira de trabalharmos com vetores é compreendendo como eles se comportam matematicamente.

Você se lembra do plano no sistema cartesiano, um sistema com dois eixos ortogonais (simplesmente chamado de plano *xy*)?

Bem, vamos imaginar dois vetores nesse plano. Denomine-os por e $\vec{A}$ e $\vec{B}$. Estes dois vetores podem ser denotados como segmentos de linha reta desde a origem (0, 0) até o ponto final de cada um deles. A direção é denotada por um segmento de reta e uma flecha na sua extremidade serve para denotar seu sentido. O módulo do vetor é correspondente ao comprimento do segmento.

Suponha que o ponto final de $\vec{A}$ tenha valores (x_a, y_a) e o ponto final detenha valores $\vec{B}$ (x_b, y_b). A magnitude (módulo) de $\vec{A}$, escrita como $|\vec{A}|$, é dada por

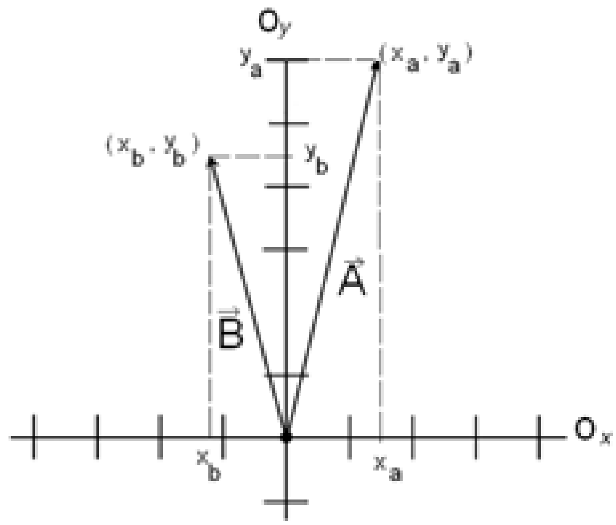
$$|\vec{A}| = (x_a^2 + y_a^2)^{1/2}$$

OBS: Lembre-se que: $x^{1/2} = \sqrt{x}$

Do mesmo modo, a magnitude de $\vec{B}$, $|\vec{B}|$, é dada por

$$|\vec{B}| = (x_b^2 + y_b^2)^{1/2}$$

Normalmente o módulo de um vetor é representado pela mesma letra em *itálico*, mas sem o negrito e sem a flecha. Por exemplo, módulo de $\vec{A}$ = A, mas o melhor mesmo é utilizarmos módulo de , $\vec{A}$ = $|\vec{A}|$ para evitar confusão.



Vetores no plano *xy*. As coordenadas (x_a, y_a) do ponto correspondente a extremidade do vetor e (x_b, y_b) do vetor são marcadas nos eixos O_x e O_y.

Agora expanda sua mente para três dimensões. Escolhendo um sistema de coordenadas comum com eixos *xyz*, também chamado de *sistema cartesiano* (composto de um conjunto de três eixos ortogonais), dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ e podem ser denotados como segmentos de reta desde a origem (0, 0, 0) até um ponto final deles no espaço.

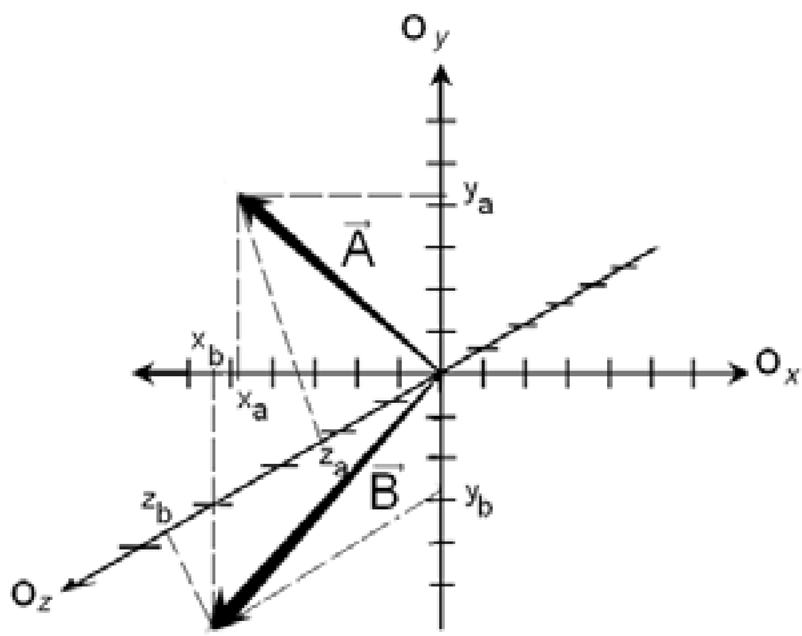
Suponha que o ponto final de $\vec{A}$ tenha os valores (x_a, y_a, z_a) e o ponto final de $\vec{B}$ tenha os valores (x_b, y_b, z_b). A magnitude de $\vec{A}$, escrita como $|\vec{A}|$, é

$$|\vec{A}| = (x_a^2 + y_a^2 + z_a^2)^{1/2}$$

De modo análogo, a magnitude de , descrita como $|\vec{B}|$, é

$$|\vec{B}| = (x_b^2 + y_b^2 + z_b^2)^{1/2}$$

Por definição, o módulo de um vetor é sempre um número (escalar) positivo. Se você escrever $\vec{A}$= 2 h estará fazendo uma bobagem. Você não pode dizer que um vetor é igual a um escalar, somente seu módulo pode.



Vetores no espaço tri-dimensional *xyz*. As coordenadas (x_a, y_a, z_a) do ponto correspondente a extremidade do vetor $\vec{A}$ e (x_b, y_b, z_b) do vetor são marcadas nos eixos O_x, O_y e O_z.

COMPONENTES VETORIAIS

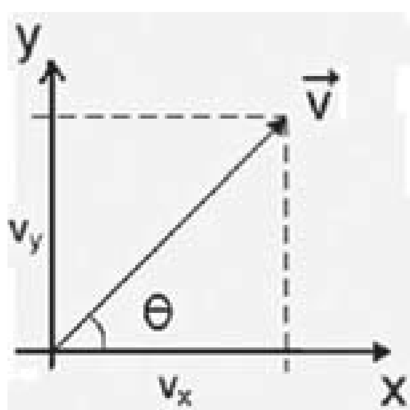
Existe um método simples de trabalhar com os vetores, que é o de separarmos suas componentes no sistema cartesiano, isto é, podemos definir as componentes de um vetor nesse sistema de eixos tomando-se as projeções do vetor nesses eixos.

Você pode desenhar o vetor num plano cartesiano colocando seu início na origem do sistema de $\vec{A}$ coordenadas. O vetor $\vec{A}$ será a soma de um vetor paralelo ao eixo O_x com um vetor paralelo ao eixo O_y., designados $\vec{A}$ e $\vec{A}_y$, que são os vetores componentes do vetor $\vec{A}$.

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

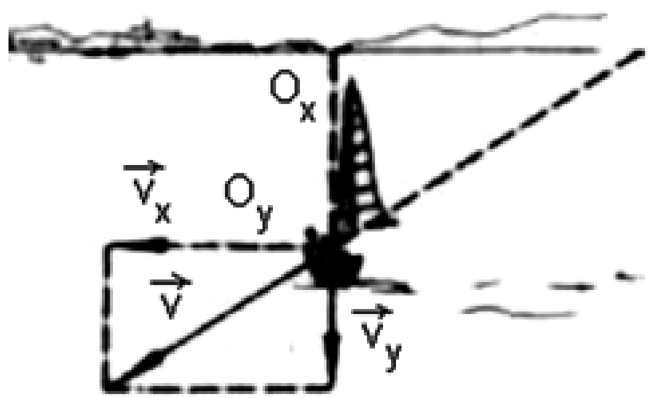
Por definição, a direção de cada componente do vetor corresponde a direção do eixo de coordenadas. Quando $\vec{A}_x$ aponta no sentido positivo de O_x, A_x (módulo de $\vec{A}_x$) é um número positivo. Quando $\vec{A}_x$ aponta no sentido negativo de O_x, A_x é um número negativo. Segue o mesmo para A_y (módulo de $\vec{A}_y$). Os números A_x e A_y são os componentes do vetor $\vec{A}$.

Para determinarmos a projeção do vetor ao longo de qualquer eixo, consideramos as extremidades do vetor e por elas traçamos linhas perpendiculares ao eixo até encontrá-lo. Tomamos então a distância entre as interseções como a projeção se a flecha estiver na mesma direção do eixo (isto é, se o ângulo entre o vetor e o sentido positivo do eixo for um ângulo agudo). Caso contrário, a projeção será essa distância, mas com sinal negativo.



Por exemplo um barco viaja com velocidade v aproximado-se da orla e em direção ao porto, deslocando-se também lateralmente em relação a orla. Considere a velocidade como um vetor no plano *xy*. Se usarmos a direção da orla como eixo O_x e se O_y estiver perpendicularmente a ela, podemos separar as componentes do vetor velocidade $\vec{v}$($\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$). A componente x do vetor $\vec{v}$ (designada por v_x) é dada pela projeção do vetor no eixo x. Analogamente, a componente y é a projeção do vetor $\vec{v}$ ao longo do eixo y.

Conhecendo o módulo e direção de podemos calcular suas componentes. Sua direção é descrita através do ângulo que ele faz com alguma direção de referência, e que pode ser o eixo cartesiano O_x. Imagine que a esteja sobre o eixo O_x. Agora, gire-o até sua posição normal. o corresponde a esse ângulo descrito na rotação. Mas cuidado com ele. Se ele for medido com uma rotação no sentido de O_x para O_y θ é positivo. No caso dessa rotação acontecer de O_x para - O_y, θ será negativo.



No caso do barco viajar com velocidade v distanciando-se da orla da praia e movimentando-se também para a esquerda do porto as projeções terão o mesmo módulo, mas com sinal negativo.

Se o ângulo entre o vetor e o eixo O_x é igual a (letra teta do alfabeto grego) e com sentido positivo podemos usar as funções trigonométricas e chegar a:

$$\frac{v_x}{v} = \cos\theta \text{ e } \frac{v_y}{v} = sen\theta$$

E portanto

$$v_x = v\cos\theta \text{ e } v_y = vsen\theta$$

Da mesma forma, se conhecemos as componentes de um vetor podemos calcular o seu módulo. No nosso exemplo, o módulo do vetor velocidade é:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Se medirmos θ supondo sempre uma rotação do eixo O_x para o eixo O_y, podemos obter a direção e o sentido de $\vec{v}$.

$$tg\theta = \frac{v_y}{v_x} \quad \text{e portanto} \quad \theta = tg^{-1}\frac{v_y}{v_x}$$

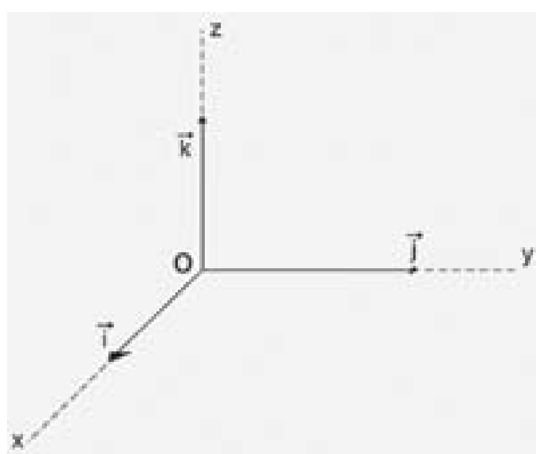
OBS: tg^{-1} corresponde à função inversa da função tangente, ou arco tangente.

O uso das componentes de um vetor facilita especialmente na adição e subtração de vetores, que veremos na próxima aula.

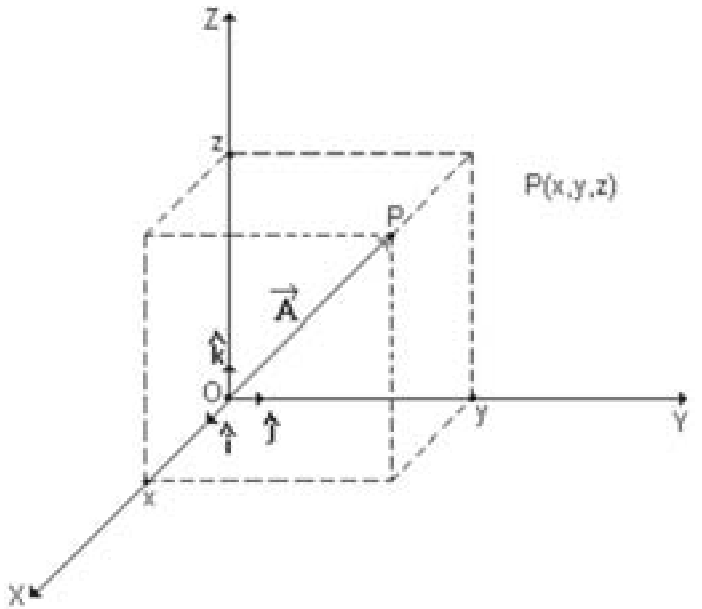
VETORES UNITÁRIOS

Um vetor unitário é aquele que possui módulo igual a 1, sem unidade anexa. Ele é usado para descrever uma direção e um sentido no espaço. Os vetores unitários são representados por um símbolo com um acento circunflexo ou "chapéu" (^), o que o diferencia do vetor comum que pode ter qualquer módulo. Os vetores de módulo igual a 1 são denominados versores.

No sistema cartesiano de coordenadas utilizamos três versores para apontar as direções e sentidos. O versor aponta no sentido positivo do eixo x, o vesor aponta no sentido positivo do eixo y, e o vesor aponta no sentido positivo do eixo z.



Então os vetores componentes do vetor $\vec{A}$ são:



$$\vec{A}_x = A_x\hat{i}$$

$$\vec{A}_y = A_y\hat{j}$$

$$\vec{A}_z = A_z\hat{k}$$

E podemos também representar o vetor a com seus componentes como:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

O módulo do vetor será dado por:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

ATIVIDADES

1. Os controladores de tráfego aéreo fornecem instruções para os pilotos informando em que direção e sentido eles devem voar. Estas instruções são chamadas de “vetores”. Se estas forem as únicas informações dada aos pilotos, o nome “vetor” está sendo usado corretamente ou não? Explique sua resposta.

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Para termos a correta definição de um vetor precisamos, além da direção e sentido, de seu módulo. Esse último não foi dito aos pilotos, e, portanto a informação não está sendo corretamente chamada de "vetor".

Da mesma forma, se fosse dada apenas a velocidade que eles deveriam seguir, sem determinar a direção e o sentido a informação não seria um vetor, mas apenas seu módulo.

2. Suponha dois vetores no plano *xy* como se segue:

$\vec{A} = (x_a, y_a) = (3,0)$

$\vec{B} = (x_b, y_b) = (3,4)$

Qual é o comprimento de cada um desses vetores?

(a) 3 e 4 unidades

(b) 3 e 5 unidades

(c) 0 e 3 unidades

(d) Não há informação suficiente para dizer.

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Vimos que a magnitude (comprimento) de um vetor $\vec{A}$ é dada por

$|\vec{A}| = (x_a^{\,2} + y_a^{\,2})^{1/2}$

Portanto, para os casos desse problema:

$|\vec{A}| = (3^2 + 0^2)^{1/2} = 3$

e

$|\vec{A}| = (3^2 + 4^2)^{1/2} = 5$

Que corresponde a resposta b

3. Quais são as componentes do vetor $\vec{A}$ a) com $|\vec{A}|$ = 3,0 m e a = 45º e b) com $|\vec{B}|$ = 4,50 m e *b* = 37,0º, apresentados na figura abaixo?

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

a) O ângulo entre o vetor e o eixo O_x é a, mas este ângulo foi medido no sentido negativo do eixo O_y. Logo, o ângulo que devemos usar é Logo:

A_x = A cos q = (3,0 m) (cos (-45º)) = 2,1 m

A_y = A sen q = (3,0 m) (sen (-45º)) = - 2,1 m

Veja que o vetor possui componente x positiva e y negativa. Caso você usasse o *q* errado encontraria um sentido errado para A_y e consequentemente para o vetor .

b) Nesse caso o eixo O_x não é horizontal como costumamos representa-lo. Mas é claro que podemos supor qualquer orientação para o eixo O_x colocando o eixo O_y ortogonalmente (perpendicularmente).

Nesse caso, o ângulo entre o vetor e o sentido positivo do eixo O_y é *b*. Preste atenção que esse ângulo não está medido a partir de O_x, e assim, portanto, não poderemos utilizá-lo. Podemos tomar seu ângulo complementar q = (90º - b)= (90º - 37,0º) = 53,0º, que será tomado no sentido positivo de O_y.

B_x = B cos q = (4,50 m) (cos (53º)) = 2,71 m

B_y = B sen q = (4,50 m) (sen (53º)) = 3,59 m

Se você tivesse utilizado b diretamente teria obtido a resposta invertida. Portanto tenha muito cuidado em verificar o ângulo.

Grandezas escalares são representadas por números que devem ser combinados utilizando as regras normais de aritmética. As grandezas vetoriais possuem módulo, direção e sentido e devem ser representadas por vetores obedecendo a regras diferenciadas.

CONCLUSÃO

RESUMO

Grandezas escalares são unidimensionais; têm somente magnitude e não podem representar outras grandezas que tenham uma direção associada a elas.

Outras grandezas, denominadas vetoriais, requerem mais atributos para a sua completa especificação e devem ser descritas por vetores. Uma grandeza vetorial é tal que sua caracterização completa requer um conjunto de três atributos: *o módulo***,** *a direção* e *o sentido*.

Os vetores são geralmente representados por uma letra em negrito (**A**) ou por uma letra com uma flecha sobre ela $\vec{A}$.

Se dois vetores têm a mesma direção e o mesmo sentido eles são *paralelos*, com sentido contrário eles são *antiparalelos*. Um vetor é dito igual a outro caso possua mesmo módulo, direção e sentido, não importando o lugar no espaço onde esteja.

Para representarmos adequadamente as grandezas vetoriais utilizando o sistema de eixos cartesianos, fazemos uso de um conjunto de vetores de módulo igual a 1. Eles são chamados de versores por terem módulo unitário. Sempre designamos os versores $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ mediante um acento circunflexo. São especialmente úteis os versores que coincidem com os eixos x, y e z de um sistema de coordenadas retangulares.

Sempre podemos descrever um vetor através de suas componentes cartesianas. No espaço tridimensional, o vetor pode ser escrito como .

Conhecendo o módulo e a direção de um vetor, podemos calcular suas componentes. E vice-versa, se conhecemos as componentes de um vetor podemos calcular o seu módulo, direção e sentido.

PRÓXIMA AULA

Vamos aprender como realizar operações com vetores? Adição, subtração, multiplicação. Será que eles obedecem as mesmas regras das grandezas escalares. Isso nós vamos ver na próxima aula. Até lá!

REFERÊNCIAS

ALONSO, M. S.; Finn, E. J., **Física**. Edgard Blücher Editora, São Paulo, 1999.

GIBILISCO, S. **Physics Demystified**, Mcgraw-Hill, New York, 2002

<http://pt.wikipedia.org/> Consultado em 06/04/2008.

Portal de ensino de Física da USP. Disponível em <http://efisica.if.usp.br/> Consultado em 06/04/2008

SEARS, F. W.; Zemansky, M. W., **Física I - Mecânica** 10 ed., Addison Wesley, 2003

TIPLER, P.A. **Física Ia**. 2 ed., Guanabara, 1982.