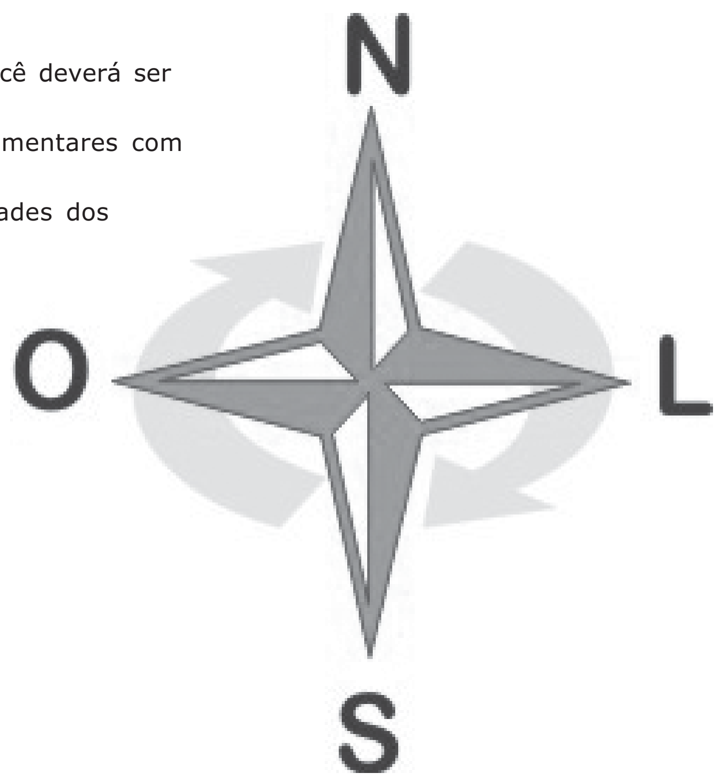
ÁLGEBRA VETORIAL

META

Familiarizar os alunos com formalização matemática dada pela álgebra vetorial

OBJETIVOS

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:
Realizar operações elementares com vetores;
identificar as propriedades dos vetores.



(Fonte :http://www.novafisica.net).

Na aula passada você viu o que são grandezas vetoriais. Viu que para representá-las utilizamos vetores. Hoje nós vamos discutir como você vai fazer operações com esses vetores.

INTRODUÇÃO

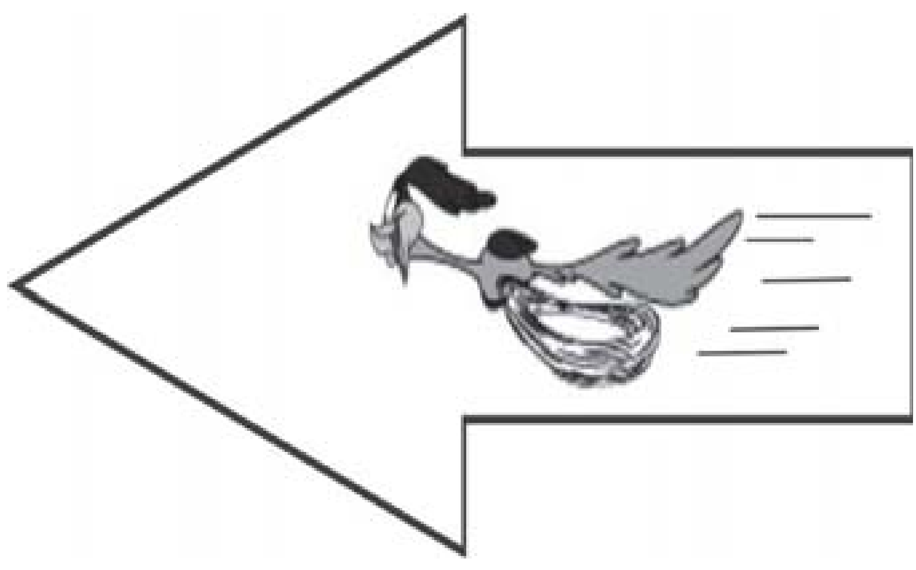
Realizar operações com grandezas escalares é muito fácil. Funciona da mesma forma como aprendemos a fazer contas em matemática. Por exemplo, fazer adição de duas grandezas escalares é simples:

10 kg acrescidos de 5 kg dá 15 kg.

Como já sabíamos fazer 10 + 5 =15 e, nesse caso, só acrescentamos a unidade.

Mas trabalhar com grandezas vetoriais não é tão simples. Veja por que: considere o caso da adição de dois deslocamentos (duas grandezas vetoriais). Como é possível adicionar grandezas que, além dos respectivos módulos, têm direções e sentidos diferentes? Mais ainda, imagine como efetuar subtrações e multiplicações dessas grandezas vetoriais?

Não sabe como? Se você nunca aprendeu isso, mesmo sendo mais complicado do que trabalhar com grandezas escalares, hoje você vai ver que não é tão difícil assim.



Vamos começar pela operação mais simples: adição.

Somar grandezas vetoriais, bem como realizar as demais operações, é fundamental em Física. Se aplicarmos duas forças a um corpo, qual será o resultado da adição dessas duas forças?

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE VETORES

Você pode pensar inicialmente que é só somar o módulo de uma com o módulo da outra. Mas imagine que você tem uma força que empurra o corpo e outra que puxa o corpo na mesma direção, mas em sentido contrário. Qual será o resultado da ação dessas duas forças sobre o corpo?

Certamente não podemos simplesmente somar os módulos. Devemos levar em conta a direção e o sentido.

Vejamos o seguinte exemplo: se um carro se deslocou do ponto de partida (0,0) até o ponto (x_a, y_a), podemos usar um vetor $\vec{A}$ para representar bem esse deslocamento. Caso ele se desloque de (x_a, y_a), para (x_b, y_b), temos um novo vetor deslocamento $\vec{B}$. O vetor deslocamento total $\vec{C}$, desde a origem até (x_b, y_b), corresponderá a soma dos dois vetores dada por:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

e que pode ser encontrada geometricamente através da construção de um paralelogramo com $\vec{A}$ e $\vec{B}$ como lados adjacentes; então $\vec{C}$ é a diagonal deste paralelogramo.

Outra maneira de somarmos vetores é desenhando o início do segundo vetor a partir da extremidade do primeiro, respeitando o módulo, a direção e o sentido de cada vetor. O vetor deslocamento total $\vec{C}$ irá começar no início de $\vec{A}$ e terminará na extremidade de $\vec{A}$. Se você desenhar primeiro $\vec{A}$ e depois $\vec{B}$ rá obter o mesmo resultado se desenhar primeiro $\vec{B}$ e depois. $\vec{A}$ Tanto faz a ordem em que você desenha esses vetores.

Mas cuidado, a soma dos dois vetores não é igual a soma dos dois módulos

$$|\vec{A}| + |\vec{B}| \neq \vec{A} + \vec{B}$$

pois o módulo de $\vec{C}$ depende do ângulo formado entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

É correto escrever o vetor $\vec{C}$ como:

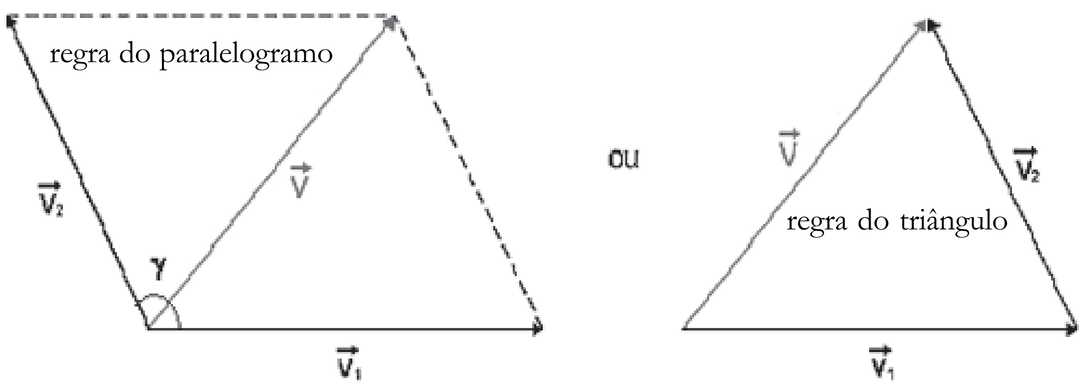
$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = [(x_a + x_b), (y_a + y_b)]$$

Ih, parece complicado? Vamos ver isso graficamente?

Ok, vamos supor uma grandeza vetorial: o *deslocamento* de um carro. Se um carro sofrer um deslocamento $\vec{v}_1$e logo a seguir sofrer um deslocamento $\vec{v}_2$, a soma desses vetores é um terceiro vetor resultante $\vec{v}$

. $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

Geometricamente, a soma pode ser dada através da construção da regra do paralelogramo ou do triângulo. Pela primeira, desenhamos o paralelogramo definido a partir dos vetores $\vec{v}_1$ e , isto é, colocamos as origens dos dois vetores coincidentes e construímos um paralelogramo; o vetor soma (ou vetor resultante) será dado



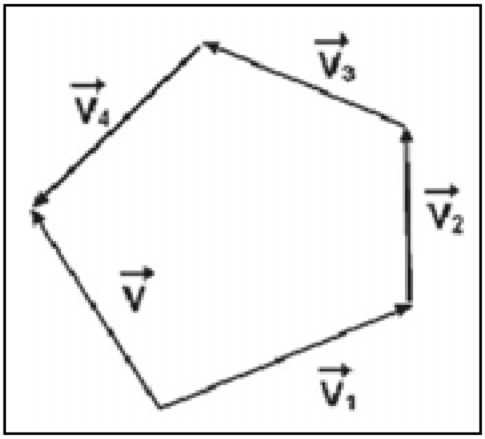
pela diagonal do paralelogramo cuja origem coincide com a dos dois vetores (a outra diagonal será o vetor diferença).

O módulo do vetor resultante é dado pelo comprimento da diagonal do paralelogramo (indicada na figura). Portanto, $v^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos p$, onde p é o ângulo entre os dois vetores.

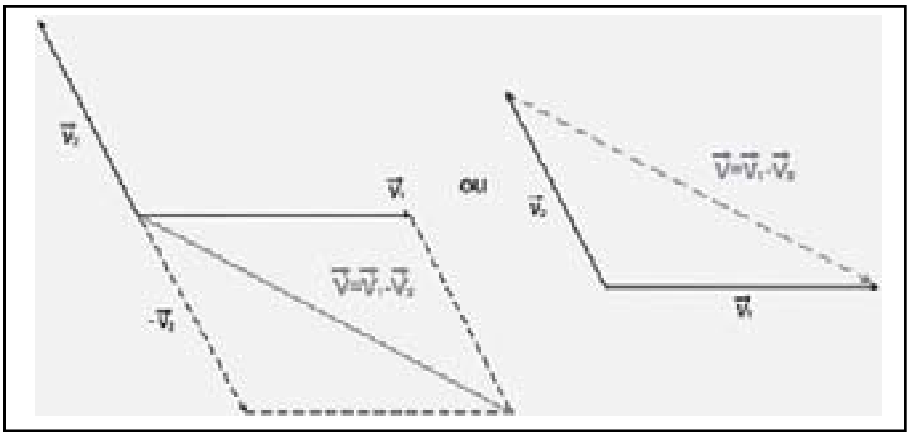
A **direção** é aquela da reta que contém a diagonal.

O sentido é dado a partir do vértice formado pelos dois vetores.

Pela regra do triângulo, desenhamos o início de $\vec{v}_2$ a partir da extremidade de $\vec{v}_1$. O vetor soma $\vec{v}$ começa no início de $\vec{v}_1$ e termina na extremidade de $\vec{v}_2$.



resulta em um terceiro vetor (resultante), cujas propriedades são inferidas a partir da soma dos vetores $\vec{v}_1$ e $(-\vec{v}_2)$. Esse último tem módulo e direção iguais ao do vetor $\vec{v}_2$, mas tem sentido oposto. Reduzimos o problema da subtração de dois vetores ao problema da soma de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.



Para facilitar suas contas, você também pode fazer uso das componentes de um vetor, especialmente na adição e subtração de vetores. Por exemplo, na soma de vetores,

$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$,

o vetor resultante $\vec{v}$ é tal que suas componentes são dadas pela soma das componentes de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Isto é,

$v_x = v_{1x} + v_{2x}$,

$v_y = v_{1y} + v_{2y}$.

No caso da subtração,

$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$,

o vetor resultante tem suas componentes dadas pela subtração das componentes

$v_x = v_{1x} - v_{2x}$,
$v_y = v_{1y} - v_{2y}$.

A extensão das regras de adição para muitos vetores é muito simples. Se tivermos, por exemplo, 4 vetores $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ e $\vec{V}_4$, o vetor resultante:

será obtido utilizando-se a representação gráfica pelo lado do polígono que é necessário para fechá-lo, uma vez colocados todos os vetores a serem somados, começando sempre pela extremidade da flecha.

Utilizando-se a representação em termos de componentes, escrevemos para as componentes do vetor resultante:

$v_x = v_{1x} + v_{2x} + v_{3x} + v_{4x}$
$v_y = v_{1y} + v_{2y} + v_{3y} + v_{4y}$

OBS: No espaço tridimensional, devemos também levar em conta a componente z dos vetores. A soma de dois vetores e $\vec{A}$ é $\vec{B}$

$$\mathbf{A + B} = [(x_a + x_b), (y_a + y_b), (z_a + z_b)]$$

Existem algumas regras básicas sobre a adição de vetores que você deve saber. Quando você adiciona dois vetores, como já dissemos, não importa em qual ordem você faz esta soma. Se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são vetores, então

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

E também quando você adiciona três vetores, não importa em como a soma é agrupada. Se , e são vetores, então

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$

MULTIPLICAÇÃO DE UM VETOR POR UM ESCALAR

Podemos multiplicar um vetor $\overline{A}$ por um escalar, ou seja, um número *k*. Dessa operação resulta um novo vetor: $\overline{A}$

com as seguintes características: $\vec{R} = \vec{K}a$

a) O módulo do novo vetor é o resultado da multiplicação do valor absoluto de *k* pelo módulo de. $\overline{A}$

b) A direção do novo vetor é a mesma de .

c) O sentido de é o mesmo de se $\vec{k}$ for *positivo* e oposto ao de $\overline{A}$ se *k* for *negativo*.

Quando um vetor é multiplicado por um escalar, não importa a ordem do produto realizado, ou seja, o produto é comutativo. Se $\overline{A}$ é um vetor e *k* é um número real, então

$$\vec{K}A = \vec{A}K$$

No caso da multiplicação por dois escalares, você também pode primeiro multiplicar o vetor por um dos escalares e o resultado multiplicar pelo outro ou multiplicar os dois escalares e esse resultado multiplicar pelo vetor. Ou seja, se é um vetor, e k_1 e k_2 números escalares reais, então a seguinte equação é válida:

$$k_1\,(\,k_2\overline{A}\,) = (k_1k_2\,\overline{A}\,)$$

Também vale a distributividade da multiplicação de um escalar sobre a adição de um escalar. Veja o que isso significa:

São válidas as seguintes equações

$$(k_1 + k_2\overline{A}) = k_1A + k_2\overline{A}$$

$$\overline{A}\,(k_1 + k_2\,) = A\overline{k_1} + \overline{A}k_2 = \overline{k_1}A + \overline{k_2}A$$

No caso de uma soma de dois vetores e , juntamente com a multiplicação por um número escalar real *k*, as seguintes equações são válidas:

$$k\,(\overline{A} + \overline{B}) = k\overline{A} + k\overline{B}$$

$$(\overline{A} + \overline{B})\,k = A\overline{k} + B\overline{k} = k\overline{A} + k\overline{B}$$

PRODUTO DE VETORES

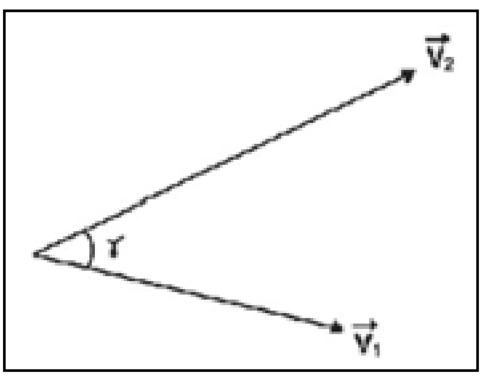
Muitas grandezas físicas podem ser expressas concisamente usando o produto de vetores. Como os vetores não são números comuns, seu produto também não é um produto comum. Existem duas definições de um produto entre vetores: o *produto escalar* e o *produto vetorial*.

PRODUTO ESCALAR

O nome *produto escalar* decorre do fato de o resultado desse produto ser uma grandeza escalar. Muitas vezes este produto é também denominado *produto interno*. O produto escalar, escrito como , $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ dos vetores v_1 e terá como resultado um número real dado pela fórmula:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 \cdot v_2 \cos\gamma$$

Ou seja, é dado pelo produto dos módulos de cada um dos vetores multiplicado pelo cosseno do ângulo ã formado pelos dois vetores (medimos ãcomo sendo o menor ângulo entre os dois vetores).



Isso implica que *o produto escalar de dois vetores ortogonais é igual a zero.*

Claro que se você conhece o resultado do produto escalar entre dois vetores pode encontrar o ângulo formado entre os dois.

Uma outra definição do produto escalar, inteiramente equivalente, em termos das componentes dos vetores, é dada por:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_{1x} \cdot v_{2x} + v_{1y} \cdot v_{2y} + v_{1z} \cdot v_{2z}$$

Logo o produto escalar entre dois vetores é igual a soma dos produtos escalares entre seus respectivos componentes.

Em física, utilizamos o produto escalar para diversas finalidades, como o cálculo de um potencial elétrico ou o trabalho realizado por uma força constante sobre um corpo.

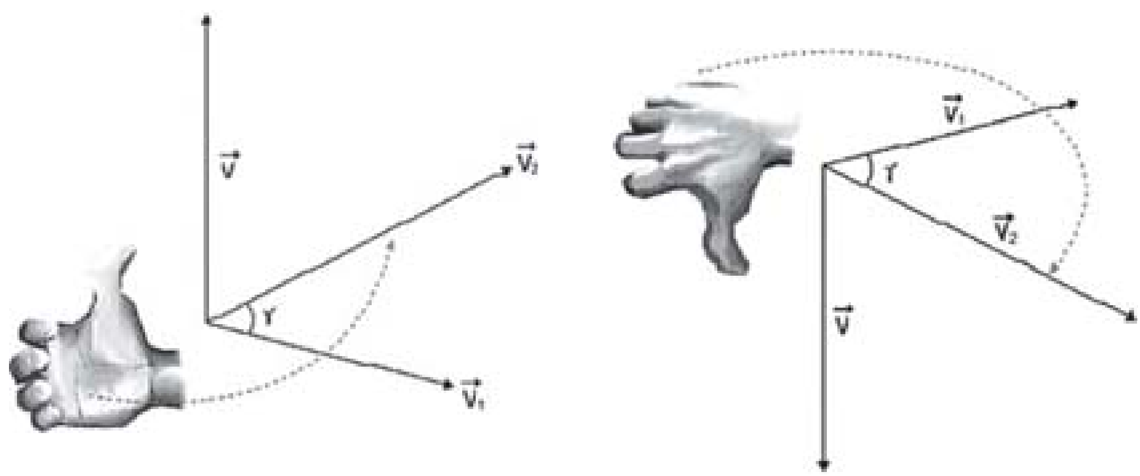
PRODUTO VETORIAL

O *produto vetorial*, também denominado *produto externo*, fornece outra grandeza vetorial. Quando fazemos o produto vetorial de dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, representamos por $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$. O resultado é um vetor $\vec{v}$ perpendicular ao plano contendo $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, cujas características são:

a) Direção - do eixo perpendicular ao plano formado pelos vetores e .

b) Sentido - para determinar o sentido, use sua mão direita (essa regra é conhecida como regra da mão direita). Com os dedos da mão procure levar o vetor , para o vetor . O sentido será dado pelo polegar da mão direita.

REGRA DA MÃO DIREITA



c) Módulo - O módulo de v é dado pela expressão

$|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| = |\vec{v}_1|\ |\vec{v}_2|$ sen ã

ou seja, o módulo de $\vec{v}$ é dado pelo produto dos módulos vezes o seno do ângulo entre os dois vetores (novamente medimos ã como sendo o menor ângulo entre os dois vetores). Isso implica que o produto vetorial de dois vetores paralelos ou antiparalelos é sempre igual a zero. Em particular, o produto vetorial de um vetor por ele mesmo é igual a zero

Para os versores $\hat{i}\hat{j}$ e $\hat{k}$ valem as regras

$\hat{i}\times\hat{j}=-\hat{j}\times\hat{i}=\hat{k}$

$\hat{j}\times\hat{k}=-\hat{k}\times\hat{j}=\hat{i}$

$\hat{k}\times\hat{i}=-\hat{i}\times\hat{k}=\hat{j}$

Como o produto vetorial de um vetor por ele mesmo é igual a zero

$\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=\mathbf{0}$

Estes são apenas alguns exemplos de regras universais que os vetores obedecem. Se você tem dificuldade em visualizar como funcionam essas regras você não é o único. Vários conceitos sobre vetores parecessem impossíveis de serem visualizados mesmo. Ainda bem que temos a matemática para nos ajudar a resolver muitos problemas de física sem poder ver exatamente como ficam esses vetores!

O zero está em negrito para lembrar que este produto fornece um vetor nulo, isto é, aquele que possui componentes nulos e não possui direção definida.

REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DO PRODUTO VETORIAL

Utilizando os versores $\hat{i},\hat{j}$ e $\hat{k}$, podemos definir o produto vetorial de dois vetores $\vec{A}\times\vec{B}$, formalmente, como o determinante da matriz constituída pelos versores e pelas componentes dos vetores. Isto é,

$$\vec{A}\times\vec{B} = \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix}$$

$$= \vec{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \vec{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \vec{k}(A_x B_y - A_y B_x)$$

Portanto, as componentes do vetor são:

$$(\vec{A}\times\vec{B})_x = A_y B_z - A_z B_y.$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})_y = A_z B_x - A_x B_z$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})_z = A_x B_y - A_y B_x.$$

PROPRIEDADES GERAIS

A partir das definições anteriores, podemos verificar as propriedades gerais que se seguem.

Se e são vetores, valem as propriedades de comutatividade e associatividade. Vejamos quais são elas:

Quando fazemos o produto escalar de dois vetores, não importa em qual ordem os vetores são colocados. Se e são vetores, então:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$

São válidas também as seguintes equações:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$$

$$(\vec{B}+\vec{C})\cdot\vec{A} = \vec{B}\cdot\vec{A}+\vec{C}\cdot\vec{A} = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$$

A direção do produto vetorial de dois vetores é revertida quando a ordem dos vetores "multiplicados" é revertida. Isto é

$$\vec{B}\times\vec{A} = -\left(\vec{B}\times\vec{A}\right)$$

Sejam $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ e $\vec{D}$ vetores. Então as seguintes equações são válidas:

$$(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\times\vec{C}).(\vec{B}\times\vec{D}) - (\vec{A}\times\vec{D}).(\vec{B}\times\vec{C})$$

As seguintes identidades são muito úteis

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$$

Estes são apenas alguns exemplos de regras universais que os vetores obedecem. Se você tem dificuldade em visualizar como funcionam essas regras você não é o único. Vários conceitos sobre vetores parecem impossíveis de serem visualizados mesmo. Ainda bem que temos a matemática para nos ajudar a resolver muitos problemas de física mesmo sem poder ver exatamente como ficam esses vetores!

ATIVIDADES

1. Considere dois vetores $\overrightarrow{A}$ e $\overrightarrow{B}$, onde aponta para leste e aponta para norte. Em qual direção aponta $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$?

(a) Nordeste

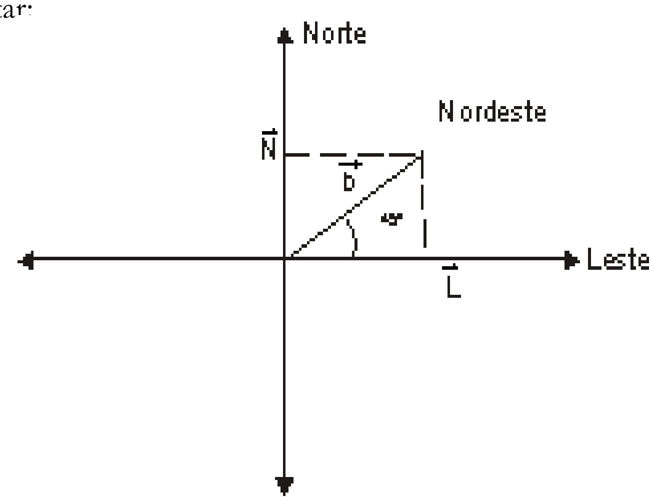
(b) Diretamente para cima

(c) Diretamente para baixo

(d) Questão irrelevante, pois o produto não é um vetor.

Resposta comentada

Vamos analisar utilizando vetores. Temos dois vetores, e o resultado deve ser a soma deles. Portanto, graficamente podemos representar:



Como são dois vetores perpendiculares, que teriam mesmo módulo, portanto a direção apontada é a nordeste, resposta (a).

2. Quando dois vetores $\overrightarrow{A}$ e $\overrightarrow{B}$ são adicionados, qual afirmação é sempre verdadeira em todas as situações?

(a) O vetor resultante é sempre maior tanto do que $\overrightarrow{A}$ como do que $\overrightarrow{B}$

(b) O vetor resultante aponta na direção média entre $\overrightarrow{A}$ e $\overrightarrow{B}$.

(c) O vetor resultante é perpendicular ao plano contendo $\overrightarrow{A}$ e $\overrightarrow{B}$.

(d) Nenhuma das afirmativas anteriores.

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Vamos analisar cada resposta:

A afirmativa (a) é falsa. O vetor resultante pode até ser maior do que $\vec{A}$ ou $\vec{B}$. Mas na verdade, quando somamos dois vetores podemos inclusive encontrar um vetor nulo, como quando somamos $\vec{A}$ com $\vec{A}$, o que daria um vetor menor que ambos. E há outros vários exemplos de negação dessa afirmativa.

A afirmativa (b) também é falsa, pois o vetor resultante deve apontar na direção que leva em conta também o módulo dos vetores. Somente no caso de dois vetores com módulos iguais é que o resultante irá apontar na direção média.

A afirmativa (c) também é falsa, pois o vetor resultante da soma nunca é perpendicular ao plano contendo e , mas deve estar nesse plano.

Portanto a resposta correta é a (d)

3. Dados os vetores $\vec{u} = -\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ e $\vec{v} = 3\hat{i} + 3\hat{k}$ determine:

a) o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$

b) o módulo do vetor $\vec{u} + \vec{v}$

c) o vetor diferença $\vec{u} - \vec{v}$

d) o vetor $3\vec{u} - 2\vec{v}$

e) o produto escalar $\vec{u}.\vec{v}$

f) o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$

g) o produto vetorial $\vec{u}.\vec{v}$

h) Calcule e interprete geometricamente o módulo do produto vetorial $\vec{u}.\vec{v}$

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

a) O vetor soma $\vec{m}$ pode ser encontrado adicionando-se as componentes de ambos os vetores:

$$\vec{m} = \vec{u} + \vec{v} = (-1+3)\,\hat{i}\,(-2+0)\,\hat{j} + (1+3)\,\hat{k}$$
$$\vec{m} = 2\hat{i} - 2\,\hat{j} + 4\,\hat{k}$$

b) O módulo de um vetor é simplesmente tomar a raiz quadrada da soma de cada uma de suas componentes ao quadrado. Portanto:

$$|\vec{m}| = \sqrt{(2)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

c) O vetor diferença não é nada mais do que a soma. $\vec{u} + (-\vec{v})$

Então
$$\vec{d} = \vec{u} + (-\vec{v}) = (-1-3)\,\hat{i}\,(-2-0)\,\hat{j} + (1-3)\,\hat{k}$$
$$\vec{d} = -4\hat{i} - 2\,\hat{j} - 2\,\hat{k}$$

d) A multiplicação por um escalar é simplesmente multiplicar cada componente pelo número desejado. Depois procedemos com a soma como já fizemos:

$$\vec{c} = 3\vec{u} - 2\vec{v} = 3(\hat{j} + \hat{k}) - 2(3\,\hat{i} + 3\,\hat{k})$$
$$\vec{c} = (-3\hat{i} - 6\,\hat{j} + 3\,\hat{k}) - (6\hat{i} - 6\,\hat{k})$$
$$\vec{c} = (-3-6)\,\hat{i}(-6-0)\,\hat{j} + (3-6)\,\hat{k}$$
$$\vec{c} = -9\hat{i} - 6\hat{j} - 3\,\hat{k}$$

e) O produto escalar entre dois vetores é dado por:

$e = \vec{u}.\vec{v} = uv\cos\beta$ (âé o ângulo formado entre eles). Como não temos esse ângulo, podemos usar outra forma de encontrar o produto escalar, que é multiplicando cada uma das componentes de ambos os vetores e depois somá-las.

$$e = \vec{u} \cdot \vec{v} = (-1 \cdot 3) + (-2 \cdot 0) + (1 \cdot 3)$$
$$e = -3 - 2 + 3 = -2$$

f) Agora, como já sabemos o valor do produto escalar, podemos usar a equação $e = \vec{u}.\vec{v} = uv\cos\beta$ para encontramos(â

$$e = -2 = \vec{u}\cdot v = uv\cos\beta$$
$$|\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$
$$e = -2 = uv\cos\beta$$
$$= -2 = \sqrt{6}\cdot 3\sqrt{2}\cos\beta$$
$$\cos\beta = \frac{-2}{6\sqrt{3}} = \frac{-1}{9}\sqrt{3}$$
$$\beta = \arccos\frac{-1}{9}\sqrt{3}$$

g) Quaisquer dados vetores:

$$\vec{u} = (a,b,c) = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k} \text{ e } \vec{v} = (d,e,f) = d\hat{i} + e\hat{j} + f\hat{k}$$

O produto vetorial $\vec{u}\times\vec{v}$ será o vetor $\vec{w} = (x,y,z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, em que x, y e z são dados pelo determinante

$$\hat{w} = \vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

Que leva às relações:

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = (b.f - c.e)\hat{i} + (c.d - a.f)\hat{j} + (a.e - b.d)\hat{k}$$

Ou seja

x = b.f - c.e y = c.d – a.f z = a.e – b.d

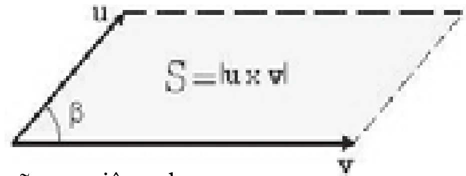
Então, substituindo os valores de u e v do nosso exercício: temos:

$$\hat{w} = \vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6\hat{i} + 0\hat{j} + 6\hat{k}$$

h) O módulo do produto vetorial é

$$|\vec{w}| = \sqrt{(-6)^2 + 0^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

Considere o paralelogramo da figura:



o ângulo ß formado entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Então, o triângulo limitado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. terá uma área dada por

$$A = \frac{1}{2}\ u.v.sen\ \hat{a}$$

A área S do paralelogramo será evidentemente igual ao dobro a área deste triângulo, ou seja: S = 2.A = u.v.sen ß
Ora, u.v.sen ß é, exatamente, o módulo do produto vetorial , conforme já vimos, a conclusão é que a área do paralelogramo construído a partir dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$,
é igual ao módulo do produto vetorial $\vec{u}.\vec{v}$
Assim,

$$s = |u \times \vec{v}|$$

CONCLUSÃO

A melhor forma de se lidar com grandezas vetoriais é introduzir um ente conhecido como **vetor.** Utilizando a representação através de vetores poderemos definir a soma, a subtração e as multiplicações de grandezas vetoriais.

A representação gráfica permite-nos executar uma série de operações com vetores. Além da representação geométrica (ou gráfica), a representação analítica, em que utilizamos as componentes do vetor, também nos permite executar operações com vetores. Devemos escolher a forma mais adequada para realizarmos as operações com vetores facilitando nossos cálculos.

RESUMO

Dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são somados graficamente através do paralelogramo definido a partir dos vetores e . O módulo do vetor resultante é dado pelo comprimento da diagonal do paralelogramo, e é dado por $v^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos$ã, onde ã é o ângulo entre os dois vetores. A direção é aquela da reta que contém a diagonal. O sentido é dado a partir do vértice formado pelos dois vetores.

Essa mesma adição pode ser feita desenhando o início de $\vec{v}_1$ a partir da extremidade de. $\vec{v}_2$O vetor soma $\vec{v}$ liga o início de $\vec{v}_1$ com a extremidade

.

A soma vetorial pode ser feita utilizando-se as componentes dos vetores. Na soma de $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, o vetor resultante é tal que suas componentes são dadas pela soma das componentes de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$:

$v_x = v_{1x} + v_{2x}$,

$v_y = v_{1y} + v_{2y}$.

$v_z = v_{1z} + v_{2z}$,

O produto escalar, $v = \vec{v}_1\vec{v}_2$, de dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ é uma grandeza escalar, definida por: $v = \vec{v}_1\vec{v}_2 = (\vec{v}_1)\ (\vec{v}_2)\ \cos$ ã

O produto escalar de dois vetores ortogonais é igual a zero.

O produto escalar também pode ser expresso em termos das componentes dos dois vetores: $v = \vec{v}_1 . \vec{v}_2 = v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y} + v_{1z}v_{2z}$

$\vec{v}_1\vec{v}_2$

O produto escalar para dois vetores e é comutativo: $\vec{v}_1 . \vec{v}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$

O *produto vetorial* de dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ é um vetor cujo módulo é dado por: ã

A direção do produto vetorial é perpendicular ao plano formado pelos dois vetores que estão sendo multiplicados, e o sentido deste produto é dado pela regra da mão direita.

Em termos das componentes, o produto vetorial é dado por:

O produto vetorial não é comutativo:

$$v_x = v_{1y}v_{2z} - v_{1z}v_{2y}$$
$$v_y = v_{1z}v_{2x} - v_{1x}v_{2z}$$
$$v_z = v_{1x}v_{2y} - v_{1y}v_{2x}$$

O produto vetorial de dois vetores paralelos ou antiparalelos é igual a zero.

$$\vec{v}_1 x\ \vec{v}_2 = -\ \vec{v}_2\ \vec{v}_1$$

PRÓXIMA AULA

Você sabe o que é uma força? Como elas atuam sobre um corpo? Que tipo de grandeza é uma força? Bem, vamos analisar essas informações na próxima aula. Até mais.

REFERÊNCIAS

ALONSO, M. S; FINN, E. J. **Física**. Edgard Blücher, São Paulo, Editora; 1999.

GIBILISCO, S. **Physics Demystified**, Mcgraw-Hill, New York, 2002.

<http://pt.wikipedia.org/> consultado em 22/03/2008.

Portal de ensino de Física da USP. Disponível em <http://efisica.if.usp.br/> Consultado em 06/03/2008.

SEARS, F. W. e ZEMANSKY, M. W., **Física I - Mecânica**, 10 ed., Addison Wesley, 2003.

TIPLER, P. A., **Física Ia**, 2ª ed. Guanabara, 1982.