

## A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

### **META**

Apresentar a resolução de problemas como uma tendência metodológica da Educação Matemática.

### **OBJETIVOS**

Ao final da aula, o aluno deverá:

identificar a resolução de problemas como uma tendência metodológica da Educação Matemática que pode ser utilizada para orientar o professor de Matemática a organizar suas atividades didáticas.

### **PRÉ-REQUISITOS**

Temas abordados na aula sobre Laboratório de Ensino de Matemática.



George Polya foi um matemático húngaro que dedicou os últimos anos de sua vida caracterizando o modo como a maioria das pessoas resolvia os problemas matemáticos, e tentou descrever como devia ser ensinada a resolução destes. Sobre esse tema, Polya escreveu três livros: *How to Solve It*, *Mathematics and plausible reasoning volume I: induction and analogy in mathematics*, e *mathematics and plausible reasoning volume II: patterns of plausible reasoning*.

(Fonte: <http://www.foylearts.net>).

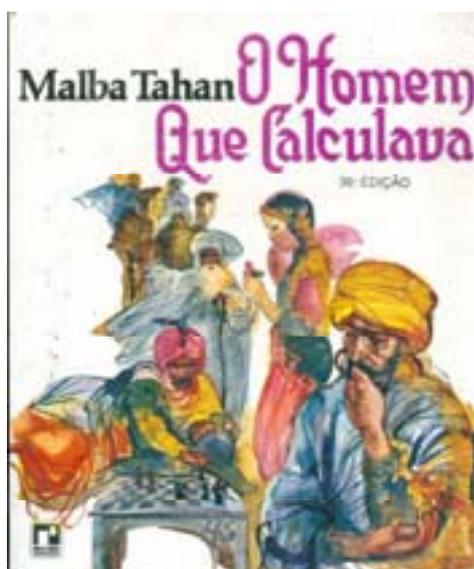
### INTRODUÇÃO

Durante a disciplina Metodologia do Ensino da Matemática você identificou algumas metodologias de ensino como alternativas que contribuem para modificar a típica aula de Matemática que, na maioria das vezes, ainda:

[...] é uma aula expositiva, em que o professor passa para o quadro negro aquilo que ele julga importante. O aluno, por sua vez, copia para o seu caderno e em seguida procura fazer exercícios de aplicação, que nada mais são do que uma repetição na aplicação de um modelo de matemática através de um processo de transmissão de conhecimento. Mais ainda, de que a resolução de problemas reduz-se a procedimentos determinados pelo professor. (D'AMBRÓSIO, 1989, p.15).

A partir desta aula, vamos buscar elementos para relacionar as tendências metodológicas da Educação Matemática: resolução de problemas, modelagem-modelação matemática, história da Matemática, Etnomatemática, tecnologias e jogos, com as escolhas e os encaminhamentos do professor de Matemática que opta por abandonar a aula transmissiva e passa a atuar como um mediador e orientador de atividades didáticas que contam com a participação ativa do aluno e com o emprego de diferentes materiais didáticos.

Nesta aula, em específico, trataremos da resolução de problemas que se caracteriza por um processo dinâmico e participativo e, deste modo, supera a resolução de exercícios que representam apenas um “treino” de técnicas de solução cujo conteúdo já tenha sido trabalhado anteriormente.



O livro de Malba Tahan, heterônimo do professor brasileiro Júlio César de Mello e Souza, narra de uma maneira divertida as peripécias de um matemático persa que ensina de maneira extraordinária problemas, quebra-cabeças e curiosidades matemáticas.  
(Fonte: <http://images.quebarato.com.br>)

## UMA AULA DO SÉCULO XIII

Para melhor ilustrar a necessidade de uma alteração na dinâmica das aulas de Matemática, inicialmente, cito uma passagem do livro “O homem que calculava”, de autoria de Malba Tahan, publicado pela Editora Record.

Antes de você iniciar a leitura do episódio extraído do livro “O homem que calculava”, destaco que, como selecionei um trecho específico no qual Beremiz daria a primeira aula de Matemática para a filha do Xeique Lezid. É imprescindível evidenciar que a palavra xeique é grafada com “x”, no entanto, na obra é apresentada com “ch”. Como estou realizando uma transcrição direta optei por não alterar o texto do autor.

Este relato encontra-se no capítulo XI e narra mais uma das aventuras de Beremiz Samir, personagem central das histórias e eventos que se desenrolaram no século XIII.

- A vossa filha já se acha presente? – perguntou Beremiz ao cheique.  
- Decerto que sim – respondeu Iezid. – Mandei-a estar na outra parte deste aposento atrás do reposteiro, de onde poderá ver e ouvir; estará, porém, invisível para os que aqui se acham.

Realmente. As coisas eram dispostas de tal forma que nem mesmo se distinguia o vulto da jovem que ia ser discípula de Beremiz. Era bem possível que ela estivesse a observar-nos por algum pequenino orifício feito na peça de veludo, e, para nós imperceptível.

- Penso que já é oportuno dar início à primeira lição – advertiu o cheique. E indagou com meiguice:

- Estás atenta Telassim, minha filha?  
- Sim meu pai – respondeu bem timbrada voz feminina do outro lado do aposento.

Diante disso preparou-se Beremiz para a aula: cruzou as pernas e sentou-se sobre uma almofada, no centro da sala; coloquei-me discretamente a um canto e acomodei-me como pude. A meu lado veio sentar-se o cheique Iezid.

Toda pesquisa de ciência é precedida pela prece. Foi, pois, com a prece que Beremiz iniciou:

Em nome de Allah, Clemente e Misericordioso! Louvado seja o Onipotente criador de todos os mundos! A misericórdia é em Deus o atributo supremo! Nós Te adoramos, Senhor, e imploramos a Tua assistência! Conduze-nos pelo caminho certo! Pelo caminho dos esclarecidos e abençoados por Ti.

Finda a prece, o calculista assim falou:

- Quando olhamos, senhora, para o céu em noite calma e límpida, sentimos que a nossa inteligência é franzina para conceber a obra maravilhosa do Criador. Diante dos nossos olhos pasmados, as estrelas são uma caravana luminosa a desfilarem pelo deserto insondável do infinito, as nebulosas imensas e

os planetas rolam, segundo leis eternas, pelos abismos do espaço! Uma noção, entretanto, surge logo, bem nítida, em nosso espírito: a noção de número.

Viveu outrora, na Grécia, quando esse país era dominado pelo paganismo, um filósofo notável chamado Pitágoras (Allah, porém, é mais sábio!). Consultado por um discípulo sobre as forças dominantes dos destinos dos homens, o grande sábio respondeu: “Os números governam o mundo!”

Realmente. O pensamento mais simples não pode ser formulado sem nele se envolver, sob múltiplos aspectos, o conceito fundamental do número. O beduíno que no meio do deserto, no momento da prece, murmura o nome de Deus tem o espírito dominado por um número: a Unidade! Sim, Deus, segundo a verdade expressa nas páginas do Livro Santo e repetida pelos lábios do Profeta, é Um, Eterno e Imutável! Logo, o número aparece no quadro da nossa inteligência como símbolo do Criador.

Do número, senhora, que é à base da razão e do entendimento, surge outra noção de indiscutível importância: é a noção de medida.

Medir, senhora, é comparar. Só são, entretanto, suscetíveis de medida as grandezas que admitem um elemento como base de comparação. Será possível medir-se a extensão do espaço? De modo nenhum. O espaço é infinito, e sendo assim, não admite termo de comparação. Será possível avaliar a Eternidade? De modo nenhum. Dentro das possibilidades humanas o tempo é sempre infinito, e no cálculo da Eternidade não pode o efêmero servir de unidade a avaliações.

Em muitos casos, entretanto, ser-nos-á possível representar uma grandeza que não se adapta aos sistemas de medidas por outra que pode ser avaliada com segurança e vigor. Essa permuta de grandeza, visando a simplificar os processos de medida, constitui o objeto principal de uma ciência que os homens denominam Matemática.

Para atingir o seu objetivo, precisa a Matemática estudar os números, suas propriedades e transformações. Nessa parte ela toma o nome de Aritmética. Conhecidos os números é possível aplicá-los na avaliação das grandezas que variam ou que são desconhecidas, mas que se apresentam expressas por meio de relações e fórmulas. Temos assim a Álgebra. Os valores que medimos no campo da realidade são representados por corpos materiais ou por símbolos; em qualquer caso, entretanto, esses corpos ou símbolos são dotados de três atributos: forma, tamanho e posição. Importa, pois, que estudemos tais atributos. E esse estudo vai constituir o objeto da Geometria.

Interessa-se, ainda, a Matemática, pelas leis que regem os movimentos e as forças, leis que vão aparecer na admirável ciência que se denomina Mecânica.

A Matemática põe todos os seus preciosos recursos a serviço de uma ciência que eleva a alma e engrandece o homem. Essa ciência é a Astronomia.

Falam alguns nas Ciências Matemáticas, como se a Aritmética, a Álgebra e a Geometria formassem partes inteiramente distintas. Puro engano!

Todas se auxiliam mutuamente, se apoiam umas nas outras, e, em certos pontos se confundem.

A Matemática, senhora, que ensina o homem a ser simples e modesto, é a base de todas as ciências e de todas as artes. (TAHAN, p. 52-54).

Por meio deste episódio é possível perceber uma descrição detalhada de alguns temas relacionados à Matemática tais como número, medida, aritmética, álgebra, geometria. Essa descrição só foi possível de ser realizada devido ao amplo conhecimento que o professor Beremiz possui em relação à Matemática e às outras áreas do saber. Observe, por exemplo, que este professor define número como a base da razão e do entendimento, a partir da unidade, que é o criador (Deus). Além disso, recorreu ao espaço e ao tempo para definir o infinito e as grandezas incomensuráveis e, ainda, utilizou elementos da natureza para apresentar exemplos, tais como o céu, as estrelas, as nebulosas, os planetas, o beduíno.

### ATIVIDADES

A falta de acesso à jovem Telassim, que ficava oculta por meio de um espesso reposteiro com a face coberta e vigiada por escravas, impedia que o professor Beremiz desenvolvesse qualquer atividade que envolvesse a movimentação e a manipulação de objetos durante sua “aula”, e fez com que o conhecimento sobre importantes conceitos matemáticos fossem “transmitidos” por meio de uma exposição que utilizou apenas a oralidade e a imaginação. Será que uma aula nesse formato é adequada para os dias atuais?

Conforme o que você já observou, uma “típica aula de Matemática” do século XXI, infelizmente, se diferencia da aula ministrada pelo professor Beremiz no século XIII apenas porque hoje os alunos registram a aula e realizam atividades no caderno. Diante deste fato, elabore um texto indicando as possibilidades ou caminhos que o professor de Matemática possui para modificar esse quadro.



## COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Na maioria das vezes, as aulas de Matemática seguem modelos clássicos com base na exposição oral, por parte do professor, cabendo aos alunos o acúmulo de informações e a reprodução de procedimentos e técnicas. Como uma alternativa para alterar a dinâmica da aula de Matemática, as orientações curriculares para os diferentes níveis de ensino (BRASIL, 1998; BRASIL, 1999; BRASIL, 2002) indicam alguns caminhos que o professor pode tomar para organização de atividades didáticas. Em qual desses caminhos você se sente mais confortável para atuar como professor de Matemática?

## A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO UMA TENDÊNCIA METODOLÓGICA

Seguindo as orientações curriculares (BRASIL, 1998; BRASIL, 1999; BRASIL, 2002) um ponto de partida pode ocorrer por meio da resolução de problemas. Mas como a resolução de problemas pode contribuir na organização de atividades didáticas que não preservem a sistemática das aulas transmissivas?

Para responder a questão apresentada, inicialmente retomo o entendimento sobre o que é um problema matemático e quais são as concepções vigentes sobre a resolução de problemas.

Neste sentido, de acordo com Dante (1989) um problema matemático é “qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la” (DANTE, 1989, p. 10).

A partir desse entendimento sobre o que é um problema matemático é possível identificar que existem concepções distintas em relação à resolução de problemas no ensino da Matemática. Para Schroeder & Lester (1989 apud ONUCHIC, 1999) os estudos sobre a resolução de problemas apresentam três enfoques:

- ensinar sobre resolução de problemas: neste enfoque o professor considera a resolução de problemas como um novo conteúdo a ser ensinado, por exemplo, enfatiza o modelo de resolução de problemas apresentado por Polya (1978) que descreve um roteiro composto por quatro fases interdependentes no processo de resolver problemas matemáticos: compreender o problema, elaborar um plano, executar o plano e fazer o retrospecto ou verificação;
- ensinar a resolver problemas: neste ponto de vista a ênfase está na “maneira como a matemática é ensinada e o que dela pode ser aplicado na solução de problemas rotineiros e não rotineiros” (p. 206), ou seja, os problemas matemáticos são utilizados para apresentar aplicações de certos conteúdos;

- ensinar Matemática através da resolução de problemas: nesta perspectiva, os problemas são importantes pois, por meio deles, é possível aprender Matemática, mas, também, tomá-los como o primeiro passo para organizar atividades didáticas que promovam a investigação e exploração de novos conceitos, possibilitando o aluno a levantar hipóteses, testá-las, estabelecer conclusões e discuti-las com seus pares.

Tipificação	Características de acordo com Borasi (1986 apud MATOS; SERRAZINA, 1996)	Exemplo
O exercício	Formulação explícita e descontextualizada, com estratégias de resolução que se restringem à aplicação de regras e algoritmos conhecidos que acarretam à única solução.	Determine a solução de $9x+4=13$ .
Os problemas de palavras	São distintos dos exercícios na medida em que é evidenciada a presença do contexto do problema.	Um feirante vendeu num dia 20 kg de tomate. No outro dia, vendeu mais 17 kg do mesmo produto. Quantos quilos de tomate o feirante vendeu no total?
Os problemas para descobrir	Formulação e contexto explícitos, que remete ao uso de estratégias e regra geral para determinar a solução que, geralmente, é única.	Usando apenas 6 palitos de fósforos, forme 4 triângulos equiláteros congruentes.
Os problemas de provar uma conjectura	Formulação explícita com uma solução obtida por meio de uma regra geral única.	“Usando os casos de semelhança de triângulos, mostre que a altura relativa à hipotenusa divide um triângulo retângulo em dois triângulos semelhantes.” (p. 141).
Os problemas da vida real	Formulação e contexto não são totalmente explícitos no enunciado e exigem a busca de dados complementares para interpretar e solucionar o problema. Este tipo de problema, geralmente, remete à elaboração de um “modelo matemático que traduza a situação apresentada, a aplicação de técnicas matemáticas na exploração do modelo e a tradução dos resultados obtidos para a situação da vida real a fim de confirmar a validade da situação encontrada” (p. 141).	Construir uma planta da escola.

As situações problemáticas	Contexto apenas parcialmente explícito com estratégias de resolução que demandam a exploração do contexto, implicam na reformulação do problema e na exploração de novos problemas que podem surgir durante a determinação da solução do problema inicial.	“O produto de três números inteiros consecutivos é sempre um número par múltiplo de 3. Comentar a situação se substituirmos produto por soma.” (p. 141).
As situações ainda não problemáticas	Situações “em que não há qualquer formulação do problema e em que apenas é feito um convite à exploração do contexto.” (p. 142).	“Considere uma página cheia de números (p. 142)



### ATIVIDADES

1. De acordo com seu entendimento sobre resolução de problemas, você está de acordo com o fato de que os sete tipos de problema indicados na classificação de Borasi (1986 apud MATOS; SERRAZINA, 1996) podem ser considerados problemas? Justifique.
2. Compare a classificação de Borasi (1986 apud MATOS; SERRAZINA, 1996) com a apresentada por Dante (1989), que você estudou na disciplina Metodologia para o Ensino da Matemática, e informe quais são os aspectos comuns nas duas tipificações? Quais são as diferenças?

### COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Então, você provavelmente resolveu esta atividade com facilidade, afinal estamos revisitando conceitos que já foram trabalhados.

Com esta atividade objetivei promover uma reflexão sobre as concepções que você já possui em relação à resolução de problemas, por meio da comparação da tipificação que já lhe é familiar apresentada por Dante (1989) e a organizada por Borasi (1986 apud MATOS; SERRAZINA, 1996).

Você vai perceber que algumas vezes a única alteração será a denominação atribuída pelos autores, mas o significado de determinada categoria é o mesmo como, por exemplo, a definição do problema do tipo “exercício de algoritmo” apresentado por Dante (1989) e o “exercício” exposto por Borasi (1986 apud MATOS; SERRAZINA, 1996).

## A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM UMA AULA DO SÉCULO XXI

Defende-se nesta aula que para trabalhar na perspectiva de “ensinar matemática através da resolução de problemas” o professor deve propor atividades didáticas que sejam baseadas em questionamentos, criando um ambiente de pesquisa, de elaboração e experimentação de estratégias, de determinação e verificação de soluções e, também, organização de novos problemas.

Mas, para que isso ocorra, o professor deve romper com a perspectiva de expositor. Ele necessita assumir o papel de organizador da aprendizagem e mediador do debate uma vez que “as idéias devem partir da mente do aluno” (POLYA, 1985, p. 15).

Para auxiliar nessa discussão o professor pode lançar questões de acordo com as etapas indicadas por Polya (1978). Você está lembrado das questões que podem orientar cada uma das quatro etapas?

Certamente essas etapas não precisam ser rigorosamente seguidas à risca, mas podem nortear, segundo Polya (1978), a determinação da solução. Para tanto, é preciso: compreender o problema, estabelecer um plano, executar o plano, fazer o retrospecto ou a verificação do plano.

Neste sentido, cabe ressaltar que ao optar por esta abordagem metodológica, dinâmica e aberta, o professor deve estar preparado para aceitar os diversos procedimentos dos alunos no decorrer da resolução, os quais podem ser diferentes daqueles que ele julga mais adequados.

Além disso, é fundamental o domínio do conhecimento matemático, ou seja, é preciso que o professor se aproprie dos conteúdos matemáticos e desenvolva uma concepção de Matemática ampla e relacionada a outras áreas do conhecimento, assim como o professor Beremiz.

### ATIVIDADES

Seguindo a mesma temática apresentada na “aula” do professor Beremiz, proponho que você busque identificar as etapas da resolução de problemas indicadas por Polya (1978), a partir de um desafio lógico do campo da aritmética que envolve conceito de adição de números naturais, vinculado ao bloco de conteúdos Números e Operações (BRASIL, 1998). O problema é o seguinte:

Como podemos colocar números de 1 a 9, sem repeti-los, de modo que a soma de todas as linhas, colunas e diagonais seja 15? (figura 1).



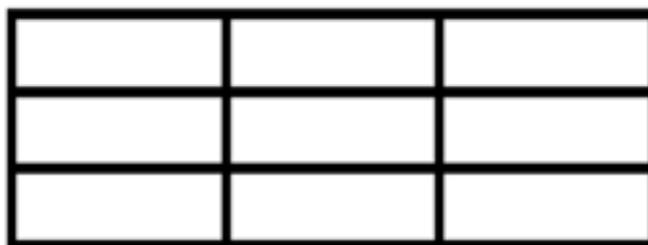


Figura 1

A partir da resolução desta atividade reflita sobre quais procedimentos você tomaria, como um professor mediador. Indique o modo como você apresentaria este desafio lógico aos seus alunos. Para que ano escolar? Em que momento da aula? Destaque que tipo de questionamentos você iria promover em sua aula. Quais artifícios que você adotaria para incentivar os alunos a resolver esta atividade, a partir das etapas da resolução de problemas, de acordo com Polya (1978)?

E mais, investigue outros desafios relacionados a quadrados mágicos de ordem superior a  $3 \times 3$ .

### COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Você observou que nesta atividade o recurso didático utilizado pelo professor caracterizava-se por um quadro com três linhas e três colunas?

Destaco este aspecto, pois gostaria de ressaltar que ao optar pela resolução de problemas como uma tendência metodológica a ênfase não está no tipo de material didático que está sendo utilizado, mas sim na discussão, no estabelecimento de hipóteses, na análise e na verificação de tais hipóteses que devem ser relacionadas à situação-problema motivadora, que permita desenvolver um raciocínio mais abstrato como é o caso desta atividade.

## CONCLUSÃO

Nesta aula você retomou algumas ideias relacionadas à resolução de problemas como uma tendência metodológica da Educação Matemática, para, posteriormente, orientar as escolhas e os encaminhamentos que você, como professor de Matemática, vai realizar durante a organização de atividades que empregam diferentes recursos didáticos.

A relevância da elaboração de tais atividades se refere ao fato de que para explorar conceitos importantes e para envolver e desafiar intelectualmente os alunos é necessário selecionar questões que despertem a curiosidade e os envolvam. Para tanto, as atividades didáticas poderão conter temas relacionados com experiências da realidade dos alunos, ou emergir de contextos puramente matemáticos. Independentemente do contexto é essencial que as decisões tomadas pelo professor provoquem interrogações, possuindo um nível de desafio que motive a investigação, a discussão e o estabelecimento de conclusões.

Considerando os documentos oficiais como, por exemplo, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática BRASIL (1998), observa-se que o papel social da Matemática refere-se à “construção do exercício da cidadania”. Esta forma de se pensar a Matemática exige que o aluno deva ter uma relação positiva com a disciplina, exigindo uma ruptura com o modelo que formou a escola centrada na aula expositiva e na memorização e repetição do conteúdo matemático.

## RESUMO

Para “ensinar matemática através da resolução de problemas”, o professor de Matemática deve considerar um problema matemático como o ponto de partida para a organização das atividades didáticas. Sob este ponto de vista, o professor atua como um orientador e mediador que propõe problemas a partir do interesse do aluno, de modo a contribuir para a apreensão dos conceitos, sendo que o foco está na ação por parte do estudante. Desta forma, a resolução de problemas caracteriza-se por ser um processo dinâmico e participativo em que o aluno necessita mobilizar todo o conhecimento já adquirido, resgatando as suas experiências e as suas concepções prévias.





### PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, vamos continuar revisitando as tendências metodológicas da Educação Matemática, para tanto, vamos debater sobre a modelagem-modelação matemática e a história da Matemática.



### AUTOAVALIAÇÃO

Será que no dia a dia, em sala de aula, serei capaz de adotar outra postura, deixando de assumir o papel de professor expositor e organizar atividades didáticas nas quais o meu aluno tenha a possibilidade de compreender, elaborar um plano, executar e verificar a solução encontrada?

Saberei eu atuar como um mediador nesse processo?

### REFERÊNCIAS

- BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares do Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/Semtec, 1999.
- BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/Semtec, 2002.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- D'AMBROSIO, B. S. **Como ensinar matemática hoje?** Temas e Debates. SBEM. ano II. n.2. Brasília. 1989.
- DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática**. São Paulo: Editora Ática, 1989.
- MATOS, J. M.; SERRAZINA, M. L. **Didáctica da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.
- ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (org). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999.
- POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Tradução Heitor Lisboa de Araujo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.
- POLYA, G. O ensino por meio de problemas. **Revista do Professor de Matemática**. n.7, São Paulo, SBM: 1985.
- TAHAN, M. **O homem que Calculava**. 32 ed. Rio de Janeiro: Record, 1986.