Aula

12

A TORRE DE HANÓI

META

Apresentar a Torre de Hanói como um material didático que pode ser utilizado na aula de Matemática.

OBJETIVOS

Ao estudar esta lição, o aluno deverá:
identificar as características do jogo Torre de Hanói
e determinar um modelo matemático que representa o número mínimo de jogadas ( ) para descolar discos de um pino da Torre de Hanói para outro;
organizar atividades didáticas utilizando a Torre de Hanói como um material didático que pode subsidiar o ensino de conteúdos de Matemática no ensino médio.

PRÉ-REQUISITOS

Aulas sobre as tendências metodológicas da Educação Matemática e sobre os materiais didáticos.

(Fontes: http://1.bp.blogspot.com).

INTRODUÇÃO

Nesta aula, iremos analisar as potencialidades da Torre de Hanói como um material didático que permite abordar conteúdos matemáticos. Mas o que é a Torre de Hanói? Como ela pode ser utilizada como um recurso para ensinar conteúdos matemáticos no ensino médio?

Para responder a essas indagações, vamos identificar a Torre de Hanói, por meio da manipulação do referido material didático com apoio de um software; realizar algumas atividades com a Torre de Hanói de acordo com as orientações da modelagem-modelação matemática como uma metodologia de ensino e, a seguir, elaborar atividades didáticas envolvendo conteúdos matemáticos do tema estruturador Álgebra (BRASIL, 1999).

François Édouard Anatole Lucas foi um matemático francês criador do famoso jogo A Torre de Hanói.
(Fonte: http://faculty.evansville.edu).

TORRE DE HANÓI: QUE MATERIAL DIDÁTICO É ESSE?

Para responder a questão recorro a Machado (1992) que afirma que o jogo Torre de Hanói foi inventado, no mundo ocidental, pelo matemático francês Edouard Lucas (1842-1891). Inicialmente era comercializado como um brinquedo relacionado a uma lenda, como segue:

Este jogo tem origem em um mito indiano segundo o qual o centro do mundo encontra-se sob a cúpula de um templo situado em Benares, na Índia. Neste centro, haveria uma placa de latão onde estariam fixados três pinos de diamante. Ao criar o mundo, Brahma teria colocado em um desses pinos sessenta e quatro discos de ouro, apoiados um sobre o outro, de diâmetros decrescentes, estando o maior junto à placa e o menor no topo da pilha. Esta seria a Torre do Brahma. Segundo as leis imutáveis por ele criadas, os sacerdotes do templo teriam sido incumbidos de transferir a pilha de discos para um dos outros dois pinos, trabalhando, desde então, dia e noite, sem cessar, seguindo apenas duas regras básicas: deve-se mover apenas um disco por vez e nunca se deve colocar um disco sobre outro menor do que ele. Segundo o mito, a vida decorrerá durante a realização de tal tarefa de transferência, e, antes que os sacerdotes consigam levar a cabo a missão que receberam, o templo transformar-se- á em pó e o mundo desaparecerá com o estrondo de um grande trovão. (MACHADO, 1992, p. 44).

Qual é a sua opinião sobre este "problema"? Como você pode determinar a resposta para a indagação que acompanha a lenda da Torre de Hanói? Como é possível determinar o número mínimo de jogadas que os sacerdotes irão executar para mover os discos de um pino para outro?

Sugiro que comece a investigar quanto tempo ainda resta, pois se os sacerdotes estão, ininterruptamente, transferindo um disco de cada vez podemos supor que eles movem um disco por segundo. Assim, é preciso saber quantos dias, minutos ou segundos ainda tem, tendo em vista que já se passaram 4 bilhões de anos.

Mas como você fará para determinar o tempo restante? Inicialmente é preciso entender as normas desse jogo. De acordo com o que conta a lenda, o objetivo do jogo é transportar as peças que se encontram no primeiro pino para o outro, por exemplo, para o terceiro pino, de maneira que não se coloque uma peça maior sobre a menor, podendo-se usar todos os pinos para jogar.

Mas que tipo de pinos são esses? Como eles estão distribuídos?

Para auxiliá-lo esclareço que dentre os modelos de Torre de Hanói mais utilizados estão os construídos a partir de bases de madeira (figura 1 e 2):

Figura 1 – Torre de Hanói
(http://www.iep.uminho.pt).

Figura 2– Torre de Hanói
(http://www.shopnewzealand.co.nz).

Cabe destacar que existem outras versões da Torre de Hanói confeccionadas com material reciclável ou de baixo custo como isopor, E.V.A. (emborrachado) sendo que, no caso da base ser um material mais leve que a madeira, é possível utilizar pinos de espetos de churrasco em altura proporcional à base. Além dos jogos produzidos artesanalmente, existem casas especializadas que comercializam a Torre de Hanói confeccionada pela indústria.

Assim como ocorre com outros materiais didáticos, a construção da Torre de Hanói pode transformar-se em uma atividade motivadora em sala de aula e, além disso, permite uma discussão sobre vários conceitos matemáticos. Em especial, os relacionados aos blocos de conteúdos Espaço e Forma e Grandezas e Medidas (BRASIL, 1998), por meio, por exemplo, do cálculo de área de alguns elementos que constituem a Torre de Hanói, como a base e os discos. No entanto, é preciso estar atento a este processo de confecção para que não ocorram acidentes durante o recorte e perfuração dos discos e nem mesmo na fixação dos pinos.

Neste momento você deve estar curioso e se questionando. Afinal, como se joga com a Torre de Hanói? Como é que "eu" vou jogar com a Torre de Hanói?

Para responder a tais inquietações proponho, como atividade inicial, que você recorra a softwares livres disponíveis na rede mundial de computadores.

Reafirmo que é importante ter acesso à versão física da Torre de Hanói. Por este motivo, o Laboratório de Ensino de Matemática de seu polo possui alguns exemplares deste recurso. No entanto, justifico que na versão digital desse jogo existem alguns aspectos que podem ser positivos em relação à atividade que você vai desenvolver e, posteriormente analisar. Investigue quais são os aspectos mencionados?

ATIVIDADES

Utilize a rede mundial de computadores para localizar softwares livre do jogo Torre de Hanói. A seguir, observe quais são as características dos jogos que você localizou. Estabeleça conjecturas sobre como ele deve ser jogado.

Por fim, selecione dois destes softwares e produza um texto estabelecendo uma comparação sobre as características, não se esqueça de registrar o endereço eletrônico e os créditos de cada programa analisado.

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Para localizar os softwares e realizar a atividade basta acessar um sítio de busca e digitar o nome do material didático. No entanto, na segunda etapa da atividade você deve elencar alguns critérios de seleção para escolher dois desses jogos e então compará-los, assim, gostaria de deixar alguns pontos para sua análise, que certamente serão complementados com sua experiência e suas hipóteses em relação à utilização da Torre de Hanói como um material didático que pode ser empregado nas aulas de Matemática.
Aconselho que você verifique se no software são apresentados links com regras, sugestões de atividades, desafios, instruções para efetuar as jogadas ou "ajuda". Investigue se os softwares possuem contadores sobre o número de jogadas, tempo de jogo, se permitem variar a quantidade de discos antes de iniciar a partida, se possuem um limite mínimo ou máximo de discos, se apresentam possibilidades de alteração do idioma.

Agora que já identificou as características de alguns jogos Torre de Hanói gostaria que conhecesse um jogo, em específico: o software livre denominado "Torre de Hanói", disponível no sítio http://www6.ufrgs.br/psicoeduc/hanoi/, em uma versão em português. Este software permite alterar o número de discos e variá-los entre 3 a 7, em cada nova jogada. E, inicialmente, os discos estão empilhados no pino de uma das extremidades que será chamado de pino A. O objetivo é transportar a torre para o pino C, usando a intermediária B. Assim, de acordo com a lenda as regras do jogo Torre de Hanói são:

- Movimentar um só disco de cada vez;
- Um disco maior não pode ficar acima de um disco menor;
- Não é permitido movimentar um disco que esteja abaixo de outro.

Essas regras estão de acordo com as que você havia localizado nos softwares que selecionou anteriormente? Quais são as semelhanças e as diferenças entre tais regras?

Assim, como nas aulas anteriores, o objetivo de elencar as características de um material didático e, posteriormente, desenvolver atividades didáticas com o recurso em tela é de identificar possibilidades de ampliação, tendo em vista a sua utilização como um meio auxiliar que o professor de Matemática pode dispor para realizar as escolhas e os encaminhamentos de seu planejamento.

Portanto, você já estabeleceu algumas hipóteses sobre como utilizar a Torre de Hanói nas aulas de Matemática?

De pronto, proponho que a partir da busca da solução ao desafio proposto pela lenda indiana que acompanha o jogo Torre de Hanói, você, como professor de Matemática, busque a comprovação para suas conjecturas.

Momento 1: Identificando o problema

Neste sentido, para determinar a solução da lenda da Torre de Hanói é preciso determinar os movimentos mínimos feitos para transportar uma torre de 64 discos de um pino para outro. Mas como é possível determinar os movimentos de 64 discos, se a maioria dos softwares disponíveis possui um limite muito inferior de discos? Qual é sua sugestão?

Além disso, você já observou que à medida que aumenta a quantidade de discos o jogo vai se tornando mais complexo?

Assim, será que é possível iniciar com um número reduzido de discos, observar o que ocorre e, posteriormente, repetir as observações para outras quantidades de discos? Deste modo, você pode utilizar inicialmente apenas três discos, depois quatro, cinco, seis.

Mas, como organizar as informações que estão sendo obtidas por meio das observações? Quais informações são relevantes?

O que realmente você deseja identificar transportando discos do pino A para o pino C?

A seguir, apresento algumas sugestões de questionamentos, mas com certeza você terá outras:

a) Será que existe uma relação ente o número de discos e o número de jogadas?

b) Será que o número de jogadas depende do número de discos?

Convido você a colocar em prática sua estratégia e buscar respostas a estas indagações e, de pronto, deixo como sugestão que você inicie por um número reduzido de discos e, com a conclusão de cada jogada, aumente um disco e recomece o jogo. Assim será mais adequado responder as questões.

Momento 2: Matematizando o problema

Para deslocar 3 discos (figura 3) são necessários quantos movimentos?

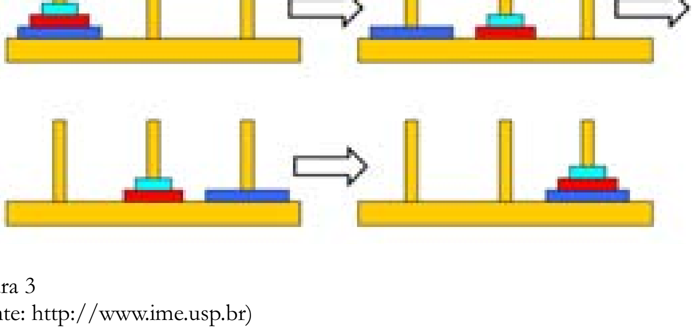

Figura 3
(Fonte: http://www.ime.usp.br)

a) Que tipo de movimentos foram realizados?
b) É possível obter indícios sobre o número mínimo de jogadas para mover uma quantidade de discos do pino A para o pino C?
c) Será que existe uma relação ente o número de discos e o número de jogadas?
d) Será que o número de jogadas depende do número de discos?

Você observou que para deslocar 3 discos do pino A para o pino C são necessários 7 jogadas?

Primeiro, foram realizados 3 movimentos para transportar 2 discos para o pino B, depois foi efetuado mais um movimento levando o disco maior para o pino C, por fim, novamente, foram transferidos os 2 discos do pino B para o pino C.

e) Mas, quando você for deslocar 4 discos do pino A para o pino C, será que é possível proceder de modo análogo?
f) E para 5 discos? Para 6 discos?

Verifique se este procedimento pode ser repetido. Em caso afirmativo complete a tabela 1, sendo que:

- na primeira coluna da tabela 1 consta o número de discos ( ) que serão transportados;
- na segunda coluna da tabela 1 você pode registrar o número de jogadas para movimentar discos do pino A para o pino B (intermediário);
- na terceira coluna da tabela 1, você pode anotar o movimento do n-ésimo disco, do pino A para o pino C;
- na quarta coluna da tabela 1, novamente, registra-se o número de movimentos dos discos do pino B (intermediário) para o pino A;
- na quinta coluna da tabela 1, destacamos o número mínimo total de jogadas ( ) para movimentar os discos do pino A para o pino C.

Número de discos n	**Número mínimo de jogadas** $J(n)$			
3	**7**			
4	**7**	**1**	**7**	**15**
5				
6				

Tabela 1

Com a tabela 1, foram organizadas as informações obtidas durante a transferência dos discos para observar se é possível estabelecer uma relação entre o número de discos e o número de jogadas. É possível estabelecer se o número de jogadas depende do número de discos? Isso porque é preciso determinar o número mínimo de jogadas para movimentar 64 discos.

Do modo como os dados foram apresentados, aparentemente, não o auxilia a responder qual a quantidade de movimentos mínimos para transportar 64 discos do pino A para o pino C, pois seria preciso saber quantos movimentos foram necessários para mover 63 discos. Mas, e se você reorganizar os dados da tabela?

Você tem alguma sugestão sobre essa reogarnização? Como alternativa, é possível destacar o número de discos e o número total de jogadas. como na tabela 2?

Número de discos (n)	**Número de jogadas J(n)**	**+1**
3	**7**	**$8=2^3$**
4	**15**	**$16=2^4$**
5	**31**	**$32=2^5$**
6		
⋮	**⋮**	**⋮**
N		

Tabela 2

Com estes dados pode-se estabelecer uma expressão matemática (modelo matemático) para calcular o número mínimo de jogadas ($J(n)$) necessárias para um número qualquer de peças ? Mas que expressão é essa?

$J(n)=2^n-1$

Agora você tem como responder ao desafio proposto pela lenda do Brahma. Com 64 discos o número de movimentos necessários é $2^{64}-1=18446744073709551615$, nossa, tudo isso?!

Se os monges movessem um disco por segundo, seriam necessários 6 bilhões de séculos para completar o jogo e, como as estimativas para a existência de vida na Terra não ultrapassam poucos milhões de anos, a profecia contida no mito que deu origem ao jogo não deve preocupar a nenhum mortal. (MACHADO, 1992).

Cabe então um questionamento: como testar, avaliar ou verificar a validade desse modelo?

Infelizmente não é possível fazer esse tipo de análise a partir do movimento de 64 discos. Mas você pode obter a resposta por meio de uma demonstração embasada no Princípio da Indução Matemática. Realize uma pesquisa sobre o tema apresentado!

Na plataforma você encontra alguns artigos sobre essa demonstração, mas pode investigar e localizar outros, pois agora, chegou o momento de refletirmos sobre essa experiência com a Torre de Hanói.

ATIVIDADES

Gostaria que você analisasse as atividades que foram propostas com a Torre de Hanói, assumindo o seu papel de professor de Matemática que objetiva utilizar este recurso didático, e concluísse esta sequência elaborando mais uma atividade didática. Considere que até então foi determinado o modelo matemático para calcular o número mínimo de jogadas ($J(n)$) necessárias para um número qualquer de peças n.

A atividade didática que você vai elaborar para, aproximadamente, 2 horas-aula deverá partir da determinação do modelo matemático que representa o número mínimo de jogadas ($J(n)$) para descolar n discos de um pino da Torre de Hanói para outro, a saber, $J(n)+2^n-1$ e explorar o tema estruturador Álgebra, abordando-o por meio do conteúdo função exponencial, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 1999).

A referida atividade deverá ser composta por: Título, Conteúdo(s) explorado(s), Ano/série, Objetivo(s), Recurso(s), Procedimentos, Referências Bibliográficas.

No entanto, antes de elaborar a atividade didática solicito que aponte aspectos positivos e negativos em relação à sequência de atividades que foi proposta, tendo em vista que ela foi organizada pela orientação metodológica da modelagem-modelação matemática (BIEMBENGUT; HEIN, 2000). Indique sugestões para aprimorar essa proposta.

CONCLUSÃO

Para orientar a experiência com a Torre de Hanói, optei por utilizar a modelagem-modelação matemática como um princípio metodológico, pois este pode contribuir para a apreensão dos conceitos matemáticos, o desenvolvimento de habilidades para resolver problemas e instigar a criatividade do aluno, sendo importante a obtenção do modelo matemático (produto), mas, ainda mais relevante, o processo pelas etapas de onde vão sendo organizados os conteúdos matemáticos.

Deste modo, a partir da lenda que acompanha a Torre de Hanói foi possível perpassar pelas etapas e subetapas do processo de modelagem, a saber: interação com o tema escolhido, matematização e determinação do modelo matemático, lembrando que um modelo é resultado de aproximações realizadas para se poder entender melhor um fenômeno e, nem sempre, tais aproximações estão de acordo com a realidade. (BIEMBENGUT; HEIN, 2000).

A depender do ano escolar dos alunos é possível buscar elementos para validar o número mínimo de movimentos que devem ser realizados para mover n discos do pino A para o pino C, para tanto, é preciso recorrer ao método de demonstração denominado Princípio da Indução Matemática.

RESUMO

Nesta aula, inicialmente, foi apresentado o desafio referente a lenda que acompanha o jogo Torre de Hanói. Em seguida, por meio do software Torre de Hanói identificou-se a característica e ampliaram-se as possibilidades de utilização deste material didático nas aulas de Matemática, para além do "jogar com a Torre de Hanói". Para tanto, por meio de uma atividade embasada na modelagem-modelação matemática foi possível determinar um modelo que descrevesse a quantidade mínima de jogadas necessárias para mover n discos do pino A para o pino C de uma Torre de Hanói e, desse modo, elaborar atividades didáticas com o tema estruturador Álgebra por meio da abordagem da função exponencial, associando-a ao modelo obtido.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, vamos iniciar uma discussão sobre os elementos formais que compõem um projeto didático para que, ao final da disciplina, você conclua a elaboração de um projeto didático sobre uma unidade de ensino da disciplina de Matemática, do ensino fundamental ou médio.

AUTOAVALIAÇÃO

Será que a partir da utilização da Torre de Hanói como um recurso didático poderei organizar atividades didáticas voltadas para a abordagem e compreensão dos conteúdos matemáticos referentes ao ensino médio?

REFERÊNCIAS

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no ensino**. Blumenau/SC: Contexto, 2000.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares do Ensino Médio**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

MACHADO, N. J. M**atemática e Educação**: alegorias tecnologias e temas afins. 2. ed. São Paulo: Cortez, 1992.

WATANABE, R. Uma Lenda: Torre de Hanói. In: HELLMEISTER, A. C. P. (et al). **Explorando o Ensino da Matemática.** v. 2. Brasília: MEC/SEB, 2004.