AULA **2**

Oscilações Simples e Oscilações Forçadas

META:

Estudar um sistema massa-mola como um oscilador simples concidereando e desconsiderando um forçador externo.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Saber definir movimento harmônico simples

Determinar a dependência do período de oscilação de um sistema massa-mola com a massa.

Determinar a dependência do período de oscilação de um sistema massa-mola com a constante elástica da mola.

Obter a curva de ressonância de um oscilador mecânico e determinar a freqüência em que ela ocorre.

PRÉ-REQUISITOS

Conhecer a solução de equações diferencias e ter a experiência montada.

2.1 Introdução

Caros alunos iniciamos aqui a primeira aula experimental do curso de laboratório de física C com o tema "Oscilações Harmônico". O oscilador simples é um protótipo do movimento periódico que ocorre quando a força qua atua sobre um corpo é proporcional ao deslocamento deste corpo a partir da posição de equilíbrio. Este movimento normalmente para pois existe uma força de atrito que discipa energia. Para manter o movimento podemos acrescentar ao sistema um forçador externo para compensar a perda de energia por atrito. Em nossa vida cotidiana temos vários exemplos de movimentos harmônicos como o movimento de um balanço, um pêndulo de relógio, a vibração de uma corda de violão. As ondas de radio e demais ondas eletromagnéticas também podem ser idealizadas com oscilações simples sendo o resultado do movimento de cargas elétricas tiradas do equilíbrio por uma força eletromagnética.

Neste experimento vamos estudas o sistema massa-mola.

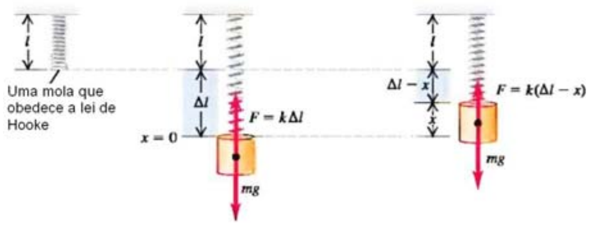

Figura 2.1: Em a) é mostrado a mola que obedece a Lei de Hooke. ($F = -k$). Em b) o sistema massa-mola em sua posição de equilíbrio. Em c) o sistema fora do equilíbrio descrevendo um movimento harmônico simples

Biografia

Robert Hooke, nasceu em 1635 na Ilha de Wight, Inglaterra. Em 1653, Hooke conquistou um lugar na Universidade de Oxford. Em 1660, descobriu a Lei de Hooke da elasticidade, a qual descreve a variação linear da tensão com a extensão de uma mola elástica. Em 1665 publicou um livro intitulado Micrographia, que consta de descrições de observações microscópicas e telescópicas e de alguma biologia original. Com efeito, o termo "célula"é atribuído a Hooke.

2.2 O sistema massa-mola

Quando um corpo de massa m é suspenso por uma mola de constante elástica k como mostrado na (**Fig. 2.1**), as forças que atuam sobre o corpo serão a força peso $P = mg$ feita pela Terra e a força de restituição elástica F feita pela mola, dadas por $F = -kx$, onde o sinal de menos indica que F aponta na direção contrária ao deslocamento x. Se deslocarmos a massa m da sua posição de equílibrio o soltarmos com indicado no item c da (**Fig. 2.1**), o corpo passará a oscilar com uma certa frequência característica.

Em cada instante do movimento sempre poderemos escrever que a força resultante R que atua sobre a massa m é dada por (desprezando o efeito do atrito):

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{F} = (mg - kx)\vec{i} \tag{2.8}$$

onde $\vec{i}$ é o vetor unitário na direção do movimento.

Aplicando a 2^a Lei de Newton, temos:

$$\vec{R} = m\vec{a} = m\ddot{x}\vec{i} = (mg - kx)\vec{i} \tag{2.9}$$

Portanto:

$$m\ddot{x} + kx = mg \tag{2.10}$$

A solução desta equação diferencial é dada por:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{mg}{k} \tag{2.11}$$

onde A é a aplitude do movimento oscilatório e a freqüência angular do movimento ω_0 é dado por:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{2.12}$$

Biografia

Isasc Newton fez quatro de suas principais descobertas em sua casa, porque no ano de 1665, a Universidade de Cambridge foi obrigada a fechar suas portas por causa da peste que se alastrava pela Europa. O teorema binomial, o cálculo, a lei da gravitação e a natureza das cores. Escreveu também sobre química, alquimia e sempre esteve envolvido com questões filosóficas, religiosas e teológicas. Devido a sua modéstia, não foi fácil convencê-lo a escrever o livro Principia, considerado uma das obras científicas mais importantes do mundo.

O período T_0 do movimento pode ser associado a freqüência angular por :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{2.13}$$

Numa situação mais realista, temos que considerar que o movimento tem atrito com o ar. Esta força de atrito $\vec{f_a}$ pode ser dada por uma força proporcional a velocidade (atrito viscoso). A equação da força resultante deve então ser alterada para:

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{f_a} = (mg - kx - \lambda\dot{x})\vec{i} \tag{2.14}$$

onde λ é o coeficiente de atrito viscoso o sinal negativo indica que a força de atrito é sempre contrária ao movimento. Aplicando a 2^a Lei de Newton fica então:

$$\vec{R} = m\vec{a} = m\ddot{x}\vec{i} = (mg - kx - \lambda\dot{x})\vec{i} \tag{2.15}$$

cuja solução da equação diferencial é dada por:

$$x(t) = Be^{(-\lambda/2m)}\cos(\omega t + \phi) + \frac{mg}{k} \tag{2.16}$$

onde

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + (\lambda/2m)^2} \tag{2.17}$$

ou seja, quando o atrito é pequeno o suficiente para que o objeto oscile várias vezes até parar, a freqüência de oscilação, e portanto o período de oscilação deste movimento é similar ao do movimento não amortecido. Quando:

$$\frac{\lambda}{2m} << \frac{k}{m} \tag{2.18}$$

podemo fazer uma aproximação e obter $\omega \approx \omega_0$ e consequentemente $T \approx T_0$.

Agora vamos acresentar um forçador externo ao sistema massa-mola. Em termos da teoria isso é feito acrescentando um termo de força externa $F(t)$ a equação (2.15):

$$\vec{R} = m\vec{a} = m\ddot{x}\vec{i} = (mg - kx - \lambda\dot{x} + F(t))\vec{i} \tag{2.19}$$

onde o forçador externo pode ser uma força periódica de frequência ω_f dada por $F(t) = F_0 \cos(\omega_f t)$. A equação diferencial pode ser escrita com:

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_f t) \tag{2.20}$$

A solução geral desta equação diferencial pode ser obtida pela adição de duas partes. A 1ª parte é composta pela solução geral da equação diferencial homogênea (considerando o termo do lado direito da igualdade igual a zero) dada pela equação (2.16). E a segunda parte da solução é composta por uma solução particular que pode ser escrita como:

$$x_p(t) = A\sin(\omega_f t - \alpha) \tag{2.21}$$

Substituindo (2.21) em (2.20), obteremos os parâmetros A e α:

$$A(\omega_f) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2) + \omega_f^2(\lambda/m)^2}} \tag{2.22}$$

$$\tan\alpha(\omega_f) = \frac{\omega_f^2 - \omega_0^2}{\lambda\omega_f/m} \tag{2.23}$$

A solução geral da equação (2.15) será a soma $x(t) = x_p(t) + x_h()t$. Contudo, como $x_h(t)$ representa uma oscilação amortecida, após algum tempo este termo vai a zero e o movimento da massa m será governado somente pela força $F(t)$. Assim, para t grande:

$$x(t) \approx x_p(t) = A\sin(\omega_f t - \alpha) + \frac{mg}{k} \tag{2.24}$$

Esta solução representa o fato de que, após certo intervalo de tempo o corpo passa a oscilar de acordo com a freqüência f da força aplicada, com uma amplitude que depende desta freqüência, $A(\omega_f)$. A velocidade do corpo será dada por:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \omega_f A(\omega_f)\cos(\omega_f t - \alpha) = v_0(\omega_f)\cos(\omega_f t - \alpha) \quad (2.25)$$

onde $v_0(\omega_f)$ é a amplitude de velocidade dada por:

$$v(t) = \frac{\omega_f F_0/m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2) + \omega_f^2(\lambda/m)^2}} \quad (2.26)$$

A amplitude da velocidade v_0 varia com ω_f e atinge valor máximo quando o denominador da expressão (2.26) é mínimo, e este será mínimo quando a quantidade entre parênteses no radical se anular, isto é:

$$\omega_f^2 - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \omega_f = \omega_0 \quad (2.27)$$

Ou seja, a amplitude de velocidade será máxima quando a fre-

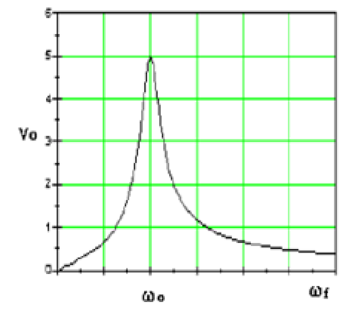

Figura 2.2: O comportamento de v_0 com ω_f que apresenta a forma típica de uma curva de ressonância.

qüência da força aplicada ω_f coincidir com a freqüência natural de vibração do sistema ω_0 caracterizando o fenômeno conhecido como ressonância. Lembrando que a amplitude da velocidade elevada ao quadrado é proporcional à energia cinética do sistema, conclui-se que a transferência de energia da força externa para o sistema massa-mola será máxima quando a freqüência da força externa é a mesma da freqüência própria de vibração do sistema.

2.3 Material

Molas diversas, porta-pesos e pesos aferidos, haste e grampo de sustentação, régua, cronômetro, pêndulo, régua graduada.

Atenção

Ao realizar as experiências a seguir tome sempre o cuidado para não deformar definitivamente as molas, evitando pendurar pesos excessivos e/ou distende-las em demasia!

2.4 Procedimento Experimental - Oscilações Simples

1ª parte: Estática: Determinação da constante k da mola.

1. Escolha uma das molas. Pendure-a ao suporte.

2. Coloque 10 gramas e meça o valor da posição x. Acrescente sucessivamante mais 10 gramas e anote o valor de x. Faça pelo menos cinco medidas.

3. Repita este procedimento para outras duas molas.

Tabela 1.

x									
m									
x									
m									
x									
m									

2ª parte: Dinâmica: Dependência do período T de oscilação com a massa m.

4. Escolha uma das molas. Pendure-a ao suporte. Anote a mola escolhida.

5. Pendure uma determinada quantidade de massa a esta mola. Distenda a mola de uma certa distância e depois solte a massa colocando o sistema massa-mola para oscilar. Verifique o que ocorre com a freqüência quando voce distende a mola por diferentes comprimentos.

6. Com o auxílio do cronômetro meça o tempo t para o corpo completar 10 oscilações. Repita esta medida pelo menos 5 vezes. Anote o valor de massa do corpo em cada linha da tabela 2. Não esqueça das incertezas!

7. Repita a operação do item 6 para, pelo menos, outros 3 valores de massa.

Tabela 2.

	T								
	T								
	T								
	T								

3ª parte: Dinâmica: Dependência do período T de oscilação com a constante k da mola.

8. Na parte anterior, você estudou a dependência do período T com a massa m , mantendo k fixo. Nesta parte, m deverá ser fixo para que se possa estudar a dependência de T com k. Escolha, então, um certo valor de m e anote-o.

9. Pendure esta massa m a uma das molas e meça, ao menos 5

vezes, o tempo t para que o sistema complete 10 oscilações. Anote o valor do k da mola escolhida em cada linha da tabela 3. Não esqueça das incertezas.

10. Repita o procedimento do item 9 para outra duas molas completando a tabela. Lembre que o primeiro valor pode ser aproveitada da tabela anterior!

Tabela 3.

	T								
	T								
	T								

2.5 Análise dos dados

1ª parte : Cálculo do valor de k

1. A partir dos dados da Tabela 1 usando o método dos mínimos quadrados, calcule o valor da constante k de cada mola e sua respectiva incerteza.

2ª parte : Dependência de T com m

3. A partir dos dados da Tabela 2, calcule o valor médio do tempo das oscilações e, a partir deste, obtenha o período T para cada valor de massa escolhido. Não esqueça das incertezas!

4. Faça, em papel di-log, um gráfico de T x m ou linearize o gráfico. Qual deve ser o formato da curva? Por que? Calcule, a partir do seu gráfico os coeficientes linear e angular da reta, com suas respectivas incertezas, e compare com os valores esperados. Discuta a exatidão dos resultados.

3ª parte : Dependência do T com k

5. A partir dos dados da Tabela 3, calcule o valor médio do tempo das oscilações e, a partir deste, obtenha o período T para cada valor de k escolhido. Não esqueça das incertezas!

6. Faça, em papel di-log, um gráfico de T x k, ou linearize o gráfico. Qual deve ser o formato da curva? Por que?

7. Quais são os valores esperados para o coeficiente angular e coeficiente linear para a curva do item anterior? Por que? Calcule, a partir do seu gráfico estes dois coeficientes, com suas respectivas incertezas, e compare com os valores esperados. Discuta a exatidão dos resultados.

2.6 Procedimento Experimental - Oscilações Forçadas

1. Identifique o material no arranjo experimental.

2. Escolha um certo valor de massa e acrescente ao porta pesos do sistema massa mola.

3. Desloque a massa da posição de equilíbrio e solte-a. Com o auxílio do cronômetro determine, pelo menos 5 vezes, o tempo para o sistema completar 10 oscilações.

Tabela 4.

	T								

4. Escolha um determinado comprimento do pêndulo e coloque-o para oscilar. Observe o que acontece com o sistema massa-mola. Varie o comprimento do pêndulo e descreva o que você observa.

5. Usando as observações do item anterior, determine experimentalmente o comprimento do pêndulo que induz a ressonância no

Perguntas

Quem faz o papel da "força externa oscilante"no sistema massa-mola? Qual é a relação entre a freqüência ou o período do pêndulo e o seu comprimento? Qual a relação existente entre o período do pêndulo e o período da "força oscilante"?

sistema massa-mola.

6. Meça a amplitude de oscilação do sistema massa-mola para 10 diferentes valores do comprimento do pêndulo. Escolha valores igualmente distribuídos para comprimentos L menores e maiores do que o comprimento onde a ressonância ocorre. Próximo da região de ressonância, utilize intervalos de comprimentos menores para definir melhor o ponto de amplitude máxima.

Tabela 5.

L									
A									

L									
A									

2.7 Análise dos dados

1. Calcule, com os valores medidos da Tabela 4, o período próprio de oscilação, T_0, e a freqüência própria ou característica, ω_0, do sistema massa-molas em estudo, com suas respectivas incertezas. Lembre-se que $\omega_0 = 2\pi/T_0$.

2. Utilizando os valores da Tabela 5, faça em papel milimetrado um gráfico de A versus ω_f. Qual é o formato da curva obtida? Determine a freqüência de ressonância do sistema a partir do gráfico e compare com o valor obtido no item 1, acima, e com o valor teórico de ω_0 calculado para o sistema equivalente.

3. Discuta qual a influência do aumento do coeficiente de atrito λ nas curvas de ressonância do sistema.

2.8 Conclusão

Agora você deve começar a analisar os dados e responder discussões. Neste processo você irá verificar onde erros nas medidas podem interferir na compraração entre teoria e prática.

RESUMO

Nesta segunda aula você realizou o experimento de oscilações simples com um sistema massa-mola desprezando o atrito. Nele você pode ver a aplicação das Lei de Newton ao movimento oscilatório e comprovar na prática a teoria apresentada. No experimento de oscilações forçadas, vimos como uma força externa pode induzir a ressonância no sistema massa-mola quando a frequência se aproxima da frequência caracteristica do sistema.

PRÓXIMA AULA

Em nossa próxima aula iremos estudas a propagação de ondas num meio material e veremos também o fenômeno físico da ressonância e quando ela ocorre.

ATIVIDADES

Deixamos como atividades as seguintes questões.

ATIV. 2.1. Faça a demonstração de que $\omega \approx \omega_0$ **Comentário:** Utilize a expressão da expanssão binomial

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-1)}{3!}x^3 + ...$$

LEITURA COMPLEMENTAR

YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A.; SEARS, Francis W.; ZEMANSKY, Mark W. Fisica. 10ª São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2005. v.2 e v.3

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. Fundamentos de física. 7ª Rio de Janeiro: LTC, 2006. v.2 e v.4

TIPLER, Paul A. Fisica para cientistas e engenheiro. 3ª Rio de Janeiro, RJ: Livros Técnicos e Científicos, 1995. v.2, v.3 e v.4

ALONSO, Marcelo; FINN, Edward J. Física: um curso universitário. 2ª rev. São Paulo: Edgard Blücher, 2005. v.1 e v.2