Matemática Básica

Fábio dos Santos

CESAD
CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA - UFS

São Cristóvão/SE
2009

Matemática Básica

Elaboração de Conteúdo
Fábio dos Santos

Capa
Hermeson Alves de Menezes

Diagramação
Fábio dos Santos

Reimpressão

Ficha catalográfica produzida pela Biblioteca Central
Universidade Federal de Sergipe

S237m	Santos, Fábio dos. Matemática Básica / Fábio dos Santos -- São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2009. 1. Microscopia. I. Título CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
Cidade Universitária Prof. "José Aloísio de Campos"
Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze
CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE
Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474

Sumário

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA
PROGRAMA UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

PLANO DA PRIMEIRA AULA

Nº da aula	Título da aula	Metas	Objetivos
01	Limites	Apresentar ao aluno noções básicas e propriedades dos linites.	Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de calcular limites de funções de uma variável real, usando a definição ou propriedades.

PRIMEIRA AULA

Curso:LICENCIATURA EM BIOLOGIA **Professor-autor**: FÁBIO DOS SANTOS

Disciplina: MATEMÁTICA BÁSICA

Número da unidade: 01 **Número da aula:** 01

Título da aula: Limites

Meta: Apresentar ao aluno noções básicas e propriedades dos limites.

Objetivos: Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de calcular limites de funções de uma variável real, usando a definição ou propriedades.

Pré-requisito: Vestibular

1.1 Introdução

Caro aluno, seja bem vindo a nossa primeira aula de Matemática Básica! Nela conheceremos o conceito de limite de funções de uma variável real e algumas propriedades importantes que facilitarão seu cálculo. A abordagem dada nela e em todo o curso será bem elementar, enfatizaremos apenas o aspecto computacional do cálculo diferencial e integral; assim, não nos deteremos em provas complicadas que tomam muito tempo.

Noções intuitivas sobre limites surgiram ainda na antiguidade, por exemplo, Arquimedes de Siracusa (287-212 a.c.) usou tais noções para calcular áreas, mas apenas no século XIX essas noções tornaram-se precisas, através de Cauchy[1] e Weierstrass[2]

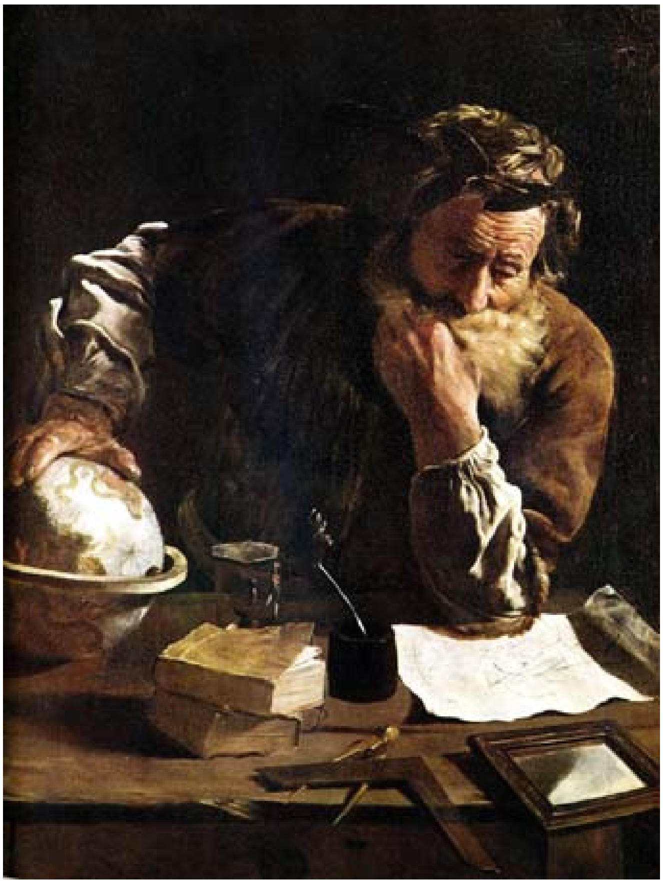

Figura 1: Foto de Arquimedes.

(1. Augustin Louis Cauchy (1989-1857) em 1821 introduziu uma notação aperfeiçoada de limites. Usando tais noções formalizou a definição de derivadas de uma função)

(2. Karl Weirstrass (1815-1897) definiu elegantemente a notação de limites usando épsilons e deltas. Suas notações perduram até os dias de hoje e é totalmente adequada no curso de análise matemática).

Nesta aula, vamos entender os limites e suas propriedades sem muito rigor e de modo conveniente para um curso de matemática básica. Apesar de definirmos limites usando épsilons e deltas, que é a maneira mais exata e elegante de fazer isso, não exploraremos

Figura 2: Foto de Cauchy.

muito esta definição, apenas enfatizaremos suas noções intuitivas. Não faremos as provas das propriedades dos limites apresentadas aqui, pois elas exigem manipulação da definição formal de limites.

1.2 Definição de Limite

Antes da definição formal de limite, considere a função

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

definida para todo $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 1$. Se $x \neq 1$, podemos dividir o numerador (observe que $x^2 - 1 = (x+1).(x-1)$) e o denominador por $x - 1$, obtendo $f(x) = x + 1$. Estudemos os valores de f quando x assume valores próximos e distintos de 1.

Atribuindo a x valores próximos de 1, porém menores, obtemos:

Figura 3: Foto de Weirstrass.

x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999
$f(x)$	1	1,5	1,75	1,9	1,99	1,999

Se atribuirmos a x valores próximos de 1, porém maiores, obtemos:

x	2	1,5	1,1	1,01	1,001
$f(x)$	3	2,5	2,1	2,01	2,001

Observemos que, em ambas tabelas, quando x se aproxima de 1, $f(x)$ se aproxima cada vez mais de 2, isto é, quanto mais próximo de 1 estiver x, tanto mais próximo de 2 estará $f(x)$.

Olhando para as tabelas nota-se que:

$$\begin{array}{lcl} |x-1| = 0,1 & \rightarrow & |f(x)-2| = 0,1 \\ |x-1| = 0,01 & \rightarrow & |f(x)-2| = 0,01 \\ |x-1| = 0,001 & \rightarrow & |f(x)-2| = 0,001 \end{array}$$

A matemática usa símbolos para indicar essas diferenças. Os símbolos usualmente são as letras gregas ϵ (épsilon) e δ (delta). Assim, dado um número positivo ϵ, se desejarmos $|f(x)-L|$ menor que ϵ, devemos tomar $|x-a|$ suficientemente pequeno, isto é, devemos encontrar um número positivo δ (que depende do ϵ considerado) suficientemente pequeno, tal que:

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(a)-L| < \epsilon.$$

A condição $|x-a|>0$ é, neste caso, equivalente a $x \neq a$, porque estamos interessados nos valores de $f(x)$, quando x está próximo de a, não necessariamente $x=a$.

Após tais considerações, vamos a uma definição precisa de limites:

Definição: Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $a \in I$ e f uma função real definida em $I - \{a\}$. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L e, escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se dado $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(a)-L| < \epsilon.$$

A definição acima foi dada inicialmente por Weierstrass e a notação por Leathem em 1905.

Exemplo 1.2.1. Usando a definição acima mostraremos que

$$\lim_{x \to 1}(3x+2) = 5.$$

Com efeito, devemos mostrar que para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |(3x+2)-5| < \epsilon$$

Notemos que

$$|(3x+2)-5| < \epsilon \Leftrightarrow |3x-3| < \epsilon \Leftrightarrow 3\,|x-1| < \epsilon \Leftrightarrow |x-1| < \frac{\epsilon}{3};$$

assim, se escolhermos $\delta = \dfrac{\epsilon}{3}$, teremos

$$0 < |x-1| < \delta = \frac{\epsilon}{3} \Rightarrow 3\,|x-1| < \epsilon \Rightarrow |3x-3| < \epsilon \Rightarrow |(3x+2)-5| < \epsilon$$

mostrando que

$$\lim_{x \to 1}(3x+2) = 5,$$

como queríamos.

Atividade 1.2.1: Usando a definição, prove que:

(a) $\lim\limits_{x \to 2}(4x-1) = 7;$

(b) $\lim_{x \to 3}(4-2x) = -2$;

(c) $\lim_{x \to 1} x^2 = 1$.

Se você aluno, não conseguiu resolver a letra (c), não se preocupe, tal exercício possui passos distintos dos dois primeiros. Vamos prová-lo agora.

Devemos provar que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left|x^2 - 1\right| < \epsilon.$$

Notemos que

$$\left|x^2 - 1\right| < \epsilon \Rightarrow -\epsilon < x^2 - 1 < \epsilon \Rightarrow 1 - \epsilon < x^2 < 1 + \epsilon.$$

Suponhamos que o valor de δ que queremos encontrar seja menor ou igual a 1, isto é,

$$0 < |x-1| < \delta < 1 \Rightarrow |x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x - 1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$$

e sendo $\epsilon' > 0$ tal que $\epsilon' = \epsilon$ se $0 < \epsilon < 1$ ou $0 < \epsilon' < 1$, se $\epsilon \geq 1$, temos

$$1 - \epsilon \leq 1 - \epsilon' < x^2 < 1 + \epsilon' \leq 1 + \epsilon$$

$$\Rightarrow 0 < 1 - \epsilon' < x^2 < 1 + \epsilon'$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-\epsilon'} < |x| < \sqrt{1+\epsilon'}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-\epsilon'} < x < \sqrt{1+\epsilon'}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-\epsilon'} - 1 < x - 1 < \sqrt{1+\epsilon'} - 1$$

$$\Rightarrow |x-1| < \sqrt{1+\epsilon'} - 1$$

$$|x-1| < 1 - \sqrt{1-\epsilon'}$$

Notando que $0 < 1 - \sqrt{1-\epsilon'} < \sqrt{1+\epsilon'} - 1 < \epsilon$, temos que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = 1 - \sqrt{1-\epsilon'} > 0$ onde $\epsilon' = \epsilon$ se $0 < \epsilon < 1$ ou $0 < \epsilon' < 1$ se $\epsilon \geq 1$, tal que

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left|x^2 - 1\right| < \epsilon,$$

e, portanto,

$$\lim_{x \to 1} x^2 = 1.$$

Atividade 1.2.2. Prove, usando a definição, que

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$$

1.3 Propriedades dos Limites

A fim de facilitar o cálculo de limites, apresentaremos algumas propriedades que poderão ser usadas sempre que necessário. Não faremos suas demonstrações, pois isto não está nos objetivos deste curso, que fornece o primeiro contato com o cálculo.

Propriedades: Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$ e c é uma constante real , então valem as propriedades:

(1) $\lim_{x\to a} c = c$;
(2) $\lim_{x\to a}[c.f(x)] = c.L$;
(3) $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = L + M$;
(4) $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = L - M$;
(5) $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = L.M$;
(6) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, seM \neq 0$;
(7) se $p(x)$ é uma função polinomial, então

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a);$$

(8) $\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$ (se $n \in \mathbb{N}$ e $L \geq 0$ ou se n é ímpar e $L \leq 0$).

Em palavras, as propriedades acima dizem que:

1. limite de uma constante é a própria constante;
2. limite de uma constante vezes uma função é igual a constante vezes o limite da função;
3. limite da soma é a soma dos limites;
4. limite da diferença é a diferença dos limites;
5. limite do produto é o produto dos limites;
6. limite do quociente é o quociente dos limites;
7. limite de uma função polinomial quando x tende a a é a função avaliado em a.

Vejamos agora algumas aplicações das propriedades acima ao cálculo de limites:

Exemplo 1.3.1 Calcularemos o limite

$$\lim_{x\to 2} x^2 + 4x - 3.$$

Solução: Como a função $p(x) = x^2 + 4x - 3$ é polinomial, pela propriedade (7) temos que

$$\lim_{x\to 2} p(x) = p(2) = 2^2 + 4.2 - 3 = 4 + 8 - 3 = 9.$$

Exemplo 1.3.2. Vamos calcular

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x}{x - 3}.$$

Solução: Como, pela propriedade (7)

$$\lim_{x\to 2} x^2 - 3x = 2^2 - 3.2 = 4 - 6 = -2$$

e

$$\lim_{x\to 2} x - 3 = 2 - 3 = -1 \neq 0,$$

por (6), temos que

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x}{x - 3} = \frac{-2}{-1} = 2.$$

Exemplo 1.3.3. Calcule

$$\lim_{x\to -1} \left(\frac{3x^3 - 2x^2}{x - 1}\right)^2.$$

Solução: Pela propriedade (7)

$$\lim_{x\to -1} 3x^3 - 2x^2 = 3.(-1)^3 - 2.(-1)^2 = -3 - 2 = -5$$

e

$$\lim_{x\to -1} x - 1 = -1 - 1 = -2,$$

por (5)

$$\lim_{x\to -1} \left(\frac{3x^3 - 2x^2}{x - 1}\right)^2 = \left(\lim_{x\to -1} \frac{3x^3 - 2x^2}{x - 1}\right)^2$$

e, por (6)

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^3 - 2x^2}{x - 1} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2};$$

assim,

$$\lim_{x\to -1} \left(\frac{3x^3 - 2x^2}{x - 1}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}.$$

Exemplo 1.3.4. Calcule

$$\lim_{x\to 5} \sqrt{\frac{x^2 - 5}{x - 3}}.$$

Solução: Pela propriedade (7)

$$\lim_{x\to 5} x^2 - 5 = 5^2 - 5 = 20$$

e

$$\lim_{x\to 5} x - 3 = 5 - 3 = 2.$$

Por (6)

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-5}{x-3} = \frac{20}{2} = 10 > 0.$$

Pela propriedade (8)

$$\lim_{x\to 5} \sqrt{\frac{x^2-5}{x-3}} = \sqrt{10}.$$

Exemplo 1.3.5. Calcule

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}.$$

Solução: Como

$$\lim_{x\to 3} x-3 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 3} x^2-9 = 0,$$

não podemos usar a propriedade (6) para concluir algo. Neste caso, como

$$\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x+3).(x-3)}{x-3} = x+3 \quad se \quad x \neq 3,$$

temos que

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} x+3 = 3+3 = 6.$$

Neste caso, usamos o fato que no cálculo do limite de uma função, quando x tende a a, interessa o valor da função próximo de a e não, necessariamente, em a.

Exemplo 1.3.6. Calcule

$$\lim_{x\to 1} f(x),$$

onde

$$f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-1}$$

se $x \neq 1$ e $f(x) = 10$ quando $x = 1$.

Solução: Note que

$$\frac{x^2-2x+1}{x-1} = x-1$$

se $x \neq 1$, assim,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x-1 = 1-1 = 0.$$

Exemplo 1.3.7. Calcularemos

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}.$$

Solução: Como $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{3+x}-2 = 0$ e $\lim\limits_{x\to 1} x-1 = 1$ não podemos aplicar a propriedade (6). Neste caso, multiplicando o numerador e o denominador da fração pelo "conjugado" do denominador, temos:

$$\frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1} = \frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1} \times \frac{\sqrt{3+x}+2}{\sqrt{3+x}+2} = \frac{3+x-4}{(x-1).(\sqrt{3+x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{3+x}+2}$$

e, portanto,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{3+x}+2} = \frac{1}{4}.$$

1.4 O Teorema do Confronto dos Limites

Na continuação, enunciaremos o Teorema do confronto dos limites:

Teorema do confronto dos limites: Se $\lim_{x\to a} q(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b$ e se f é tal que

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

para todo $x \in I - \{a\}$, onde I é um intervalo aberto que contém a, então

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

Algum livros apresentam este teorema com o nome de Teorema do Sanduíche. Nesse curso, usaremos o nome Teorema do Confronto.

Veremos agora alguns cálculo de limites usando o teorema acima:

Exemplo 1.4.1. Calcule

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x^3}.$$

Solução: Note que

$$\frac{-1}{x^3} \leq \frac{sinx}{x^3} \leq \frac{1}{x^3}$$

pois $-1 \leq sinx \leq 1$. Como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

pelo Teorema do Confronto dos Limites, temos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{sinx}{x^3} = 0.$$

Usando argumentos análogos aos usados no exemplo anterior, mostra-se que:

$$\lim_{x\to\infty} \sin^m \frac{(x)}{x^n} = 0$$

se $n, m \geq 1$. Prove isso!!

Exemplo 1.4.2. Calcule

$$\lim_{x\to 0} xcos(\frac{1}{x}).$$

Solução: Note que

$$-x \leq xcos(\frac{1}{x}) \leq x$$

pois,

$$-1 \leq \cos(\frac{1}{x}) \leq 1.$$

Como

$$\lim_{x \to 0}(-x) = 0 = \lim_{x \to 0} x$$

Pelo Teorema do Confronto, temos que

$$\lim_{x \to 0} xcos(\frac{1}{x}) = 0.$$

Tente resolver os exercícios acima sem usar o Teorema do Confronto dos Limites. Vocês perceberão a dificuldade e darão valor a esse teorema.

1.5 Conclusão

Para entender as funções de uma variável real, a noção de limite é fundamental, pois fornece o comportamento da função na vizinhança de um dado número do domínio. Na computação de limites é importante conhecer algumas de suas propriedades. Nesta aula, entendemos bem o conceito e algumas propriedades, os quais serão utilizados como linguagem de base para a definição de derivadas e integrais, assuntos que serão vistos posteriormente.

1.6 Resumo

Nesta aula, vimos que dado um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, $a \in I$ e f uma função real definida no intervalo I ou $I - \{a\}$, a notação

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

(lê-se: "o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L ") significa que quando x se aproxima de a, $f(x)$ se aproxima de L ou, mais precisamente e em linguagem matemática, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(a) - L| < \epsilon.$$

Vimos também que tal conceito goza das seguintes propriedades:

-limite de uma constante é a própria constante;

-limite de uma constante vezes uma função é igual a constante vezes o limite da função;

-limite da soma é a soma dos limites;

-limite da diferença é a diferença dos limites;

-limite do produto é o produto dos limites;

-limite do quociente é o quociente dos limites;

-limite de uma função polinomial quando x tende a a é a função avaliada em a.

Usando tais propriedades, aprendemos a calcular limites de algumas funções.

O Teorema do confronto dos limites foi dado, o qual diz que se $\lim_{x\to a} g(x) = b$, $\lim_{x\to a} h(x) = b$ e f é tal que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo $x \in I - \{a\}$, onde I é um intervalo aberto que contém a, então $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

1.7 Atividades

Atividade 1.7.1. Prove, usando a definição que

(a) $\lim_{x\to 1} 2x + 1 = 3$;

(b) $\lim_{x\to -2} x^2 = 4$;

(c) $\lim_{x\to 100} \pi = \pi$.

Atividade 1.7.2. Usando propriedades dos limites, calcule

(a) $\lim_{x\to \pi} \frac{x^2}{\pi}$;

(b) $\lim_{x\to 7} 10$;

(c) $\lim_{x\to 3} x^5 - 3x^4$;

(d) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$;

(e) $\lim_{x\to -2} \sqrt{\frac{x^2 + x}{-x^3}}$;

(f) $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$.

Atividade 1.7.3. Calcule, usando o Teorema do Confronto dos Limites,

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{cosx - 1}{x^4}.$$

Caro aluno, entenda bem os exemplos resolvidos na aula antes de iniciarem a resolução das atividades propostas.

1.8 Próxima aula

Na próxima aula aprenderemos outros tipos de limites. Um deles ocorre quando a função cresce ou decresce ilimitadamente e o outro diz respeito ao comportamento da função quando a variável independente cresce ou decresce ilimitadamente.

1.9 Referências Bibliográficas

- STEWART, James. Cálculo. Editora Pioneira, $5^{\underline{o}}$ edição, volume 1;

- IEZZI, Gerson; MURAKAM, Carlos; MACHADO, Nilson José. Fundamentos de Matemática Elementar 8. Editora Atual, $3^{\underline{o}}$ edição, 1985.