UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA
PROGRAMA UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

## PLANO DA SEGUNDA AULA

| Nº da aula | Título da aula | Metas | Objetivos |
|---|---|---|---|
| 02 | Limites envolvendo o infinito | Apresentar ao aluno noções e propriedades de limites envolvendo o infinito. | Ao final da aula, o aluno deverá ser capaz de calcular, usando a definição ou propriedades, limites envolvendo o infinito. |

## SEGUNDA AULA

**Curso:** LICENCIATURA EM BIOLOGIA **Professor-autor:** FÁBIO DOS SANTOS

**Disciplina:** MATEMÁTICA BÁSICA

**Número da unidade:** 01 **Número da aula:** 02

**Título da aula**: Limites envolvendo o infinito

**Meta**: Apresentar ao aluno noções e propriedades de limites envolvendo o infinito.

**Objetivos**: Ao final da aula, o aluno deverá ser capaz de calcular, usando a definição ou propriedades, limites envolvendo o infinito.

**Pré-requisito**: Vestibular e primeira aula.

## 2.1 Introdução

Na aula passada, vimos que a notação

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

significa que quando $x$ se aproxima de $a$, $f(x)$ tende a $L$, onde $L$ é um número real dado. A negação desta expressão tem alguns sub casos interessantes, os quais têm aplicações importantes. Nessa aula veremos alguns casos úteis.

Nesta aula introduziremos algumas notações envolvendo o conceito de infinito, são elas:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to a} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L,$$

as quais, dizem respeito ao comportamento de uma dada função $f$ próximo de um ponto no qual a função cresce ou decresce ilimitadamente, ou quando $x$ cresce ou decresce ilimitadamente. As informações passadas por tais limites serão importantes futuramente na determinação das assintotas horizontais e verticais do gráfico da função. Essas assintotas são importantes no esboço de gráficos de funções, assunto de interesse em várias áreas de conhecimento.

## 2.2 Limites Infinitos

Considere a seguinte função

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Quanto vale

$$\lim_{x \to 0} f(x)?$$

Para responder tal pergunta, observe nas tabelas abaixo ou no gráfico acima que quando $x$ se aproxima de zero, por valores maiores e menores que zero, a função assume valores positivos cada vez maior; assim não pode existir $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = L,$$

ou seja, o limite em questão não existe de acordo com a definição dada na primeira aula.

| $x$ | -0,5 | -0,1 | -0,01 | -0,001 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 4 | 100 | 10.000 | 1.000.000 |

| $x$ | 0,5 | 0,1 | 0,01 | 0,001 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 4 | 100 | 10.000 | 1.000.000 |

Mas isso sugere uma nova definição. Quando isso ocorre diremos que o limite de $f(x)$ quando $x$ se aproxima de zero é infinito, e denotamos isso pela notação

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty.$$

Se tomássemos inicialmente

$$f(x) = -\frac{1}{x^2}$$

teríamos que quando $x$ se aproxima de zero, $f(x)$ assume valores negativos cada vez menor.

Nesse caso, dizemos que o limite de $f(x)$ quando $x$ tende a zero é menos infinito e usamos a notação:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty.$$

Em geral, dados um intervalo que contém $a$ e $f$ uma função definida em $I - \{a\}$, dizemos o limite de $f(x)$ quando $x$ se aproxima de $a$ é infinito se quando $x$ se aproxima de $a$, $f(x)$ cresce ilimitadamente. Mais precisamente e em linguagem matemática, se dado um número real $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Para exprimir isso, usamos a notação

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

De modo análogo, se dado $M < 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < M$$

dizemos que o limite de $f(x)$ quando $x$ tende a $a$ é menos infinito e, denotamos isso por

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

**Exemplo 2.2.1.** Mostraremos agora que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

usando a definição formal. Com efeito dado $M > 0$, escolha $\delta = \dfrac{\sqrt{M}}{M}$ e temos

$$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow x^2 < \delta^2 \Rightarrow x^2 < \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{x^2} > M \Rightarrow f(x) > M.$$

Não nos deteremos no cálculo de limites infinitos usando a definição, enunciaremos logo algumas propriedades que facilitarão seu cálculo.

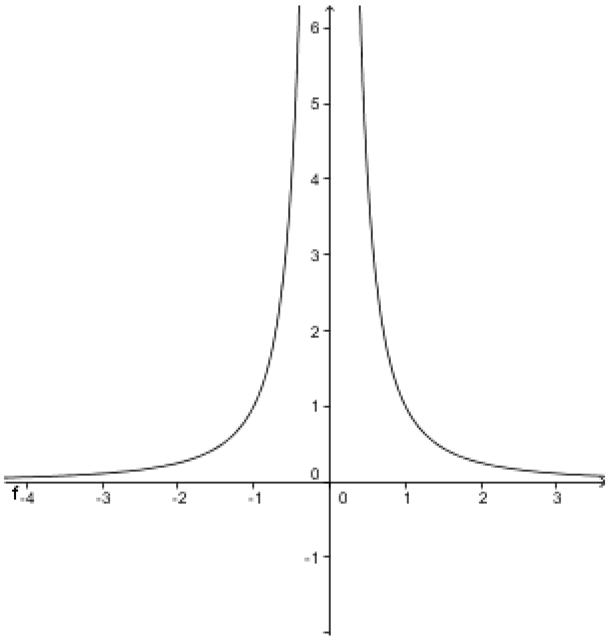


Figura 1: Gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$..

## 2.3 Propriedades dos Limites Infinitos

A fim de facilitar o cálculo dos limites infinitos, apresentaremos algumas propriedades que poderão ser usadas sempre que necessário. Não faremos suas demonstrações, pois isto não está nos objetivos deste curso, que fornece o primeiro contato com o cálculo.

**Propriedades.** Sejam $I$ um intervalo contendo $a$ e $f$, $g$ funções reais definidas em $I - \{a\}$. Então:

(1) se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ então $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} (f(x).g(x)) = +\infty$;

(2) se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ então $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} (f(x).g(x)) = +\infty$;

(3) se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b \neq o$ então

$$\lim_{x \to a} (f(x).g(x)) = +\infty, \quad \text{se} \quad b > 0; -\infty, \quad \text{se} \quad b < 0;$$

(4) se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b \neq o$ então

$$\lim_{x \to a} (f(x).g(x)) = \infty, seb < 0; -\infty, seb > 0;$$

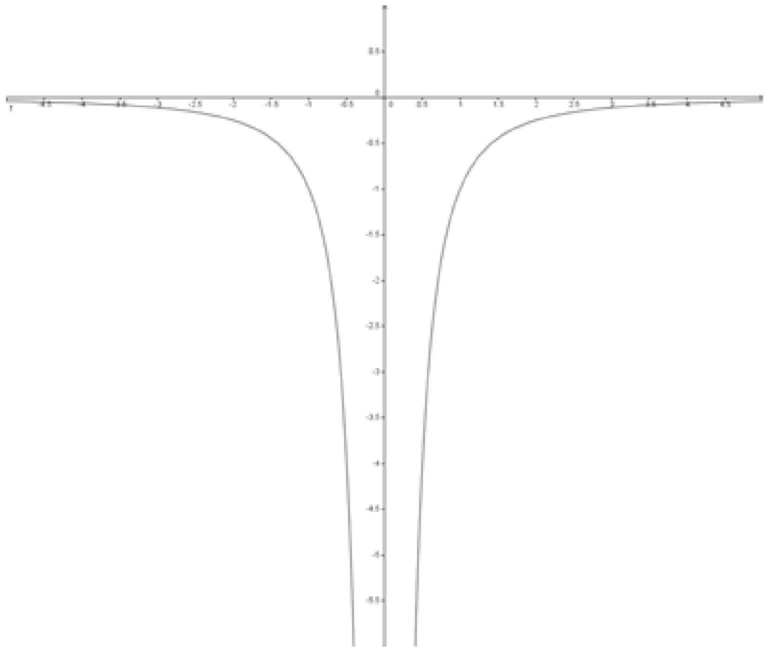

Figura 2: Gráfico de $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$..

(5) se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ então $\lim\limits_{x\to a} (f(x).g(x)) = -\infty$;

(6) se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c \neq 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ então $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ se $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ quando $x$ está próximo de $a$ e $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ se $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$ quando $x$ está próxima de $a$.

(7) se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ então $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$;

(8) se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ então $\lim\limits_{x\to a} \left|\dfrac{1}{f(x)}\right| = +\infty$.

Vamos agora usar essas propriedades para calcular alguns limites.

**Exemplo 2.3.1.** Calcule

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{(x-1)^2}.$$

*Solução:* Como

$$\lim_{x\to 1}(x+1) = x \neq 0, \qquad \lim_{x\to 1}(x^2-1) = 0 \quad \text{ e } \quad \frac{x+1}{(x^2-1)} > 0$$

para $x$ próximo de 1, pela propriedade (6)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-3}{(x-2)^2} = +\infty.$$

Veja isso no gráfico.

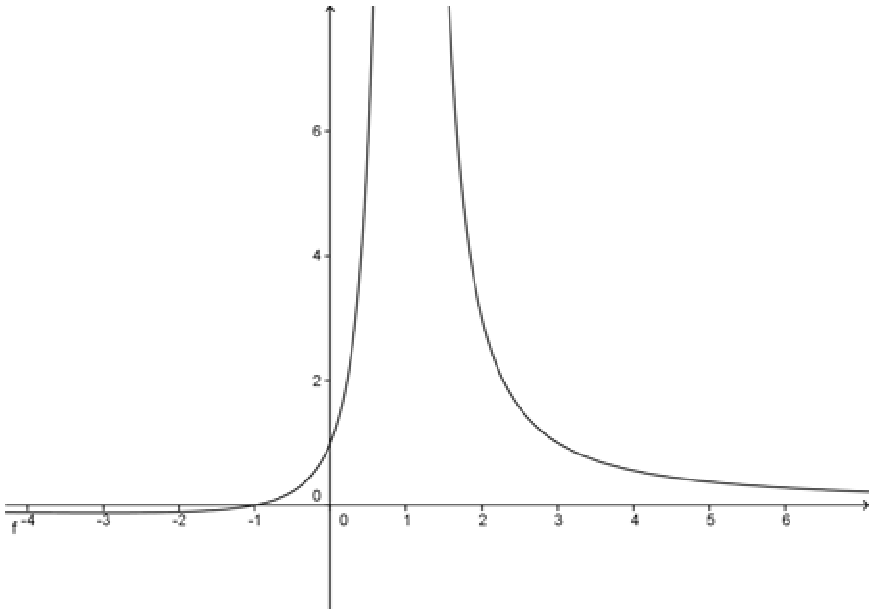


Figura 3: Gráfico de $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{(x-1)^2}$.

**Exemplo 2.3.2.** Mostre que

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-3}{(x-2)^2} = -\infty.$$

*Solução:* Basta notar que

$$\lim_{x\to 2}(x-3) = -1 \neq 0, \qquad \lim_{x\to 2}(x-2)^2 = 0 \quad \text{e} \quad \frac{x-3}{(x-2)^2} < 0$$

para $x$ próximo de 2 e aplicar a propriedade (6).

**Exemplo 2.3.3.** Mostre que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty,$$

usando a definição e propriedades.

*Solução:* Pela definição, dada $M > 0$ tome $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ e temos que

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow x^4 < \delta^4 \Rightarrow x^4 < \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{x^4} > M \Rightarrow f(x) > M.$$

Por outro lado, como

$$\lim_{x\to 0} 1 = 1, \qquad \lim_{x\to 0} x^4 = 0$$

e

$$\frac{1}{x^4} > 0$$

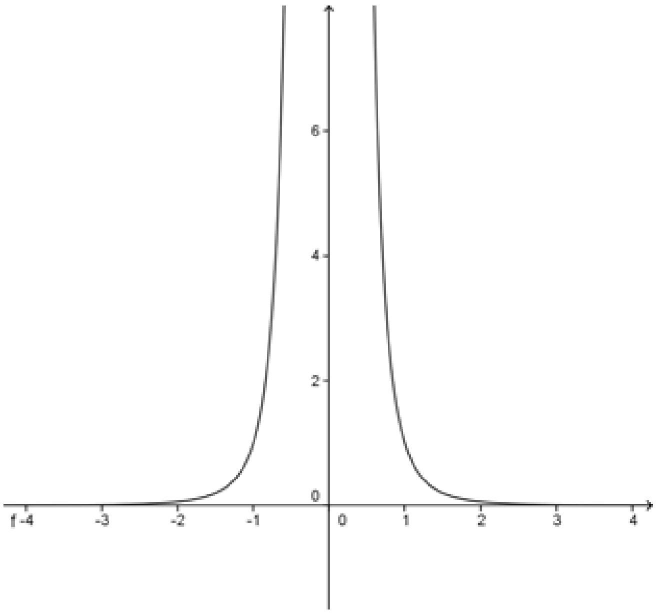


Figura 4: Gráfico de $\frac{1}{x^4}$.

para todo $x \neq 0$, por (6)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^4} = \infty.$$

Na continuação, estudaremos os limites no infinito.

## 2.4 Limites no Infinito

Seja $f$ a função definida por

$$f(x) = \frac{x+1}{x},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$. Observe na tabela ou no gráfico abaixo que à medida que $x$ cresce através de valores positivos, os valores da função se aproxima cada vez mas de 1, isto é , podemos tornar $f(x)$ tão próximo de 1 quanto desejarmos se atribuirmos a $x$ valores suficientemente grande. Neste caso dizemos que o limite de $f(x)$ quando tende a $+\infty$ é 1 e denotamos

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1.$$

| $x$ | 1 | 10 | 100 | 1000 | 10000 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2 | 1,1 | 1,01 | 1,001 | 1,0001 |

Em geral, dada uma função real $f$ definida num intervalo aberto $(a, +\infty)$, dizemos que o limite de $f(x)$ quando $x$ tende a $\infty$ é $L$ e escrevemos

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

se para qualquer número real $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que

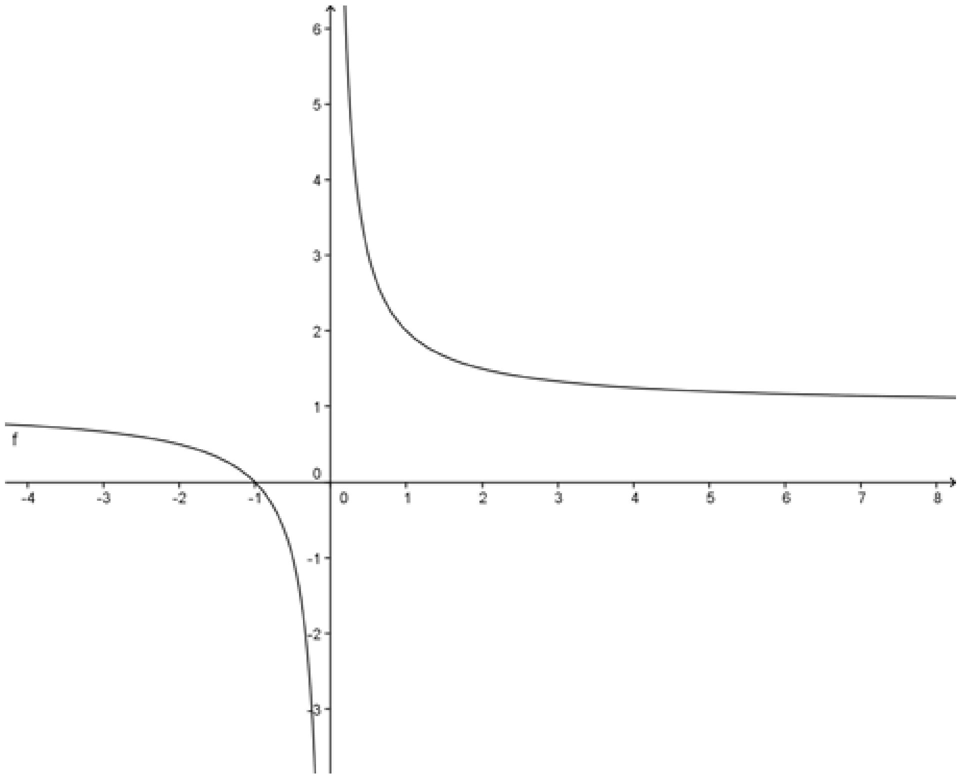


Figura 5: Gráfico de $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$.

$x$ tende menos a infinito é $L$ se a medida que $x$ decresce $f(x)$ toma valores cada vez mais próximo de $L$.

**Exemplo 2.4.1.** Provaremos usando a definição que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Com efeito, dado $\epsilon > 0$, tome $N > \dfrac{1}{\epsilon}$ e temos

$$x > N \Rightarrow x > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{x} < \epsilon \Rightarrow |f(a) - 0| < \epsilon$$

e, portanto,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

No outro caso, dado $\epsilon > 0$, tome $N < \dfrac{-1}{\epsilon}$ e temos

$$x < N \Rightarrow x < -\frac{1}{\epsilon} \Rightarrow -x > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow -\frac{1}{x} < \epsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \epsilon$$

logo $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

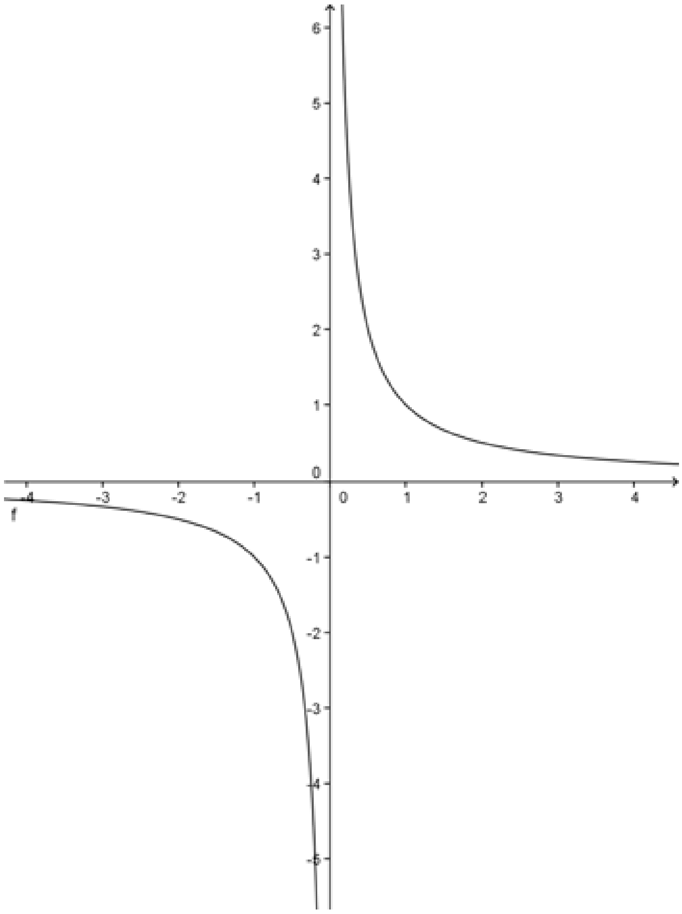


Figura 6: Gráfico de $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$.

Outros símbolos usados frequentemente no cálculo são :
1. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$;
2. $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$;
3. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$;
4. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$,
que dizem, respectivamente,
1. Quando $x$ cresce $f(x)$ cresce ilimitadamente.
2. Quando $x$ cresce $f(x)$ decresce ilimitadamente.
3. Quando $x$ decresce $f(x)$ cresce ilimitadamente;
4. Quando $x$ decresce $f(x)$ decresce ilimitadamente.

Por exemplo, olhando o gráfico de $f(x) = x^2$ vemos que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Do gráfico de $f(x) = x^3$ temos que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

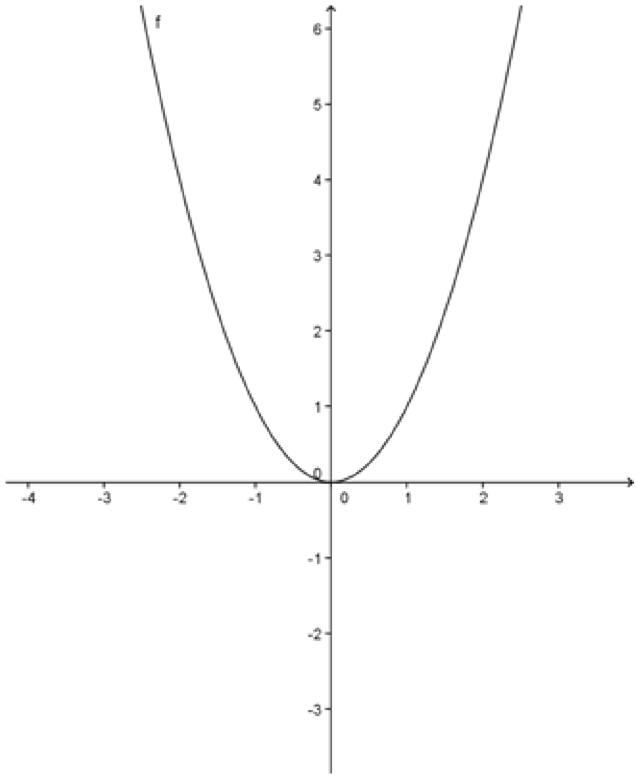


Figura 7: Gráfico de $f(x) = x^2$.

Em geral, vale: $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = +\infty$ se $n$ é um número inteiro positivo e $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ se $n$ é par; $-\infty$ se $n$ é ímpar.

Como generalização de

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

temos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

Prove isso!!

Para uma função polinomial

$$f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n, a_n \neq 0$$

vale

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} a_nx^n$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} a_nx^n$$

e, no caso de uma função racional

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + ... + a_nx^n}{b_0 + b_1x + ... + b_mx^m}, a_n, b_n \neq 0$$

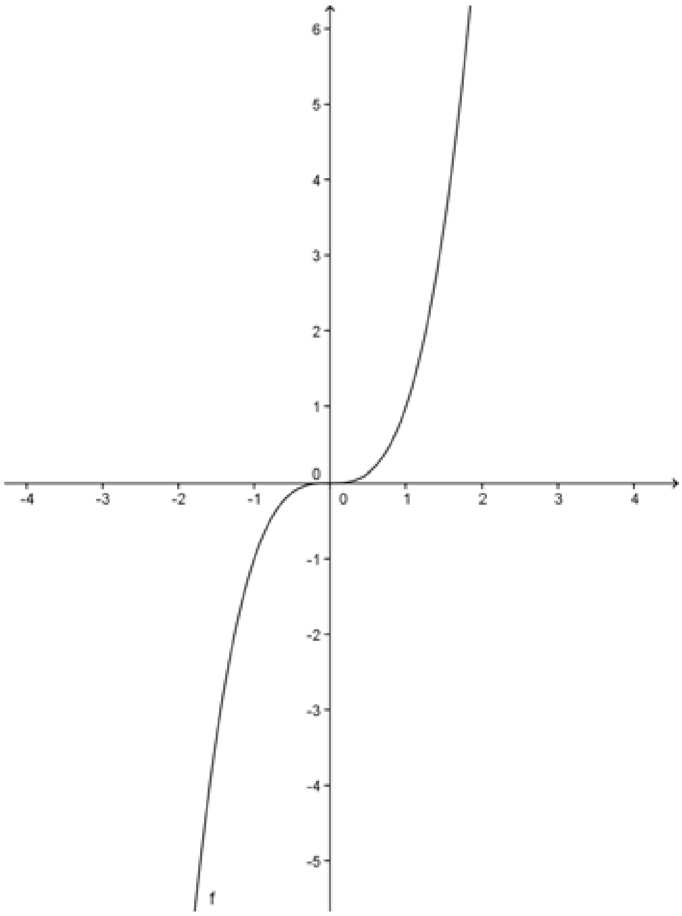


Figura 8: Gráfico de $f(x) = x^3$.

temos que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty} (\frac{a_n}{b_m}x^n - m)$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{n\to-\infty} (\frac{a_n}{b_m}x^n - m).$$

**Exemplos 2.4.2.** Calcule

$$\lim_{x\to+\infty} 4x^5 - 3x^3 + 7 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} x^2 - x^{10}.$$

*Solução:* De acordo com o que foi visto acima

$$\lim_{x\to+\infty} 4x^5 - 3x^3 + 7 = \lim_{x\to+\infty} 4x^5 = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 - x^{10} = \lim_{x\to-\infty} (-x^{10}) = -\infty.$$

**Exemplo 2.4.3** Calcule

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3}{2x^2+x}.$$

*Solução:* Pelo resultado que vimos, para funções racionais

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3}{2x^2+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x^{2-2} = \frac{1}{2}.$$

Note que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3}{2x^2+x} = \frac{1}{2}$$

também. Pense um pouco nisso!!

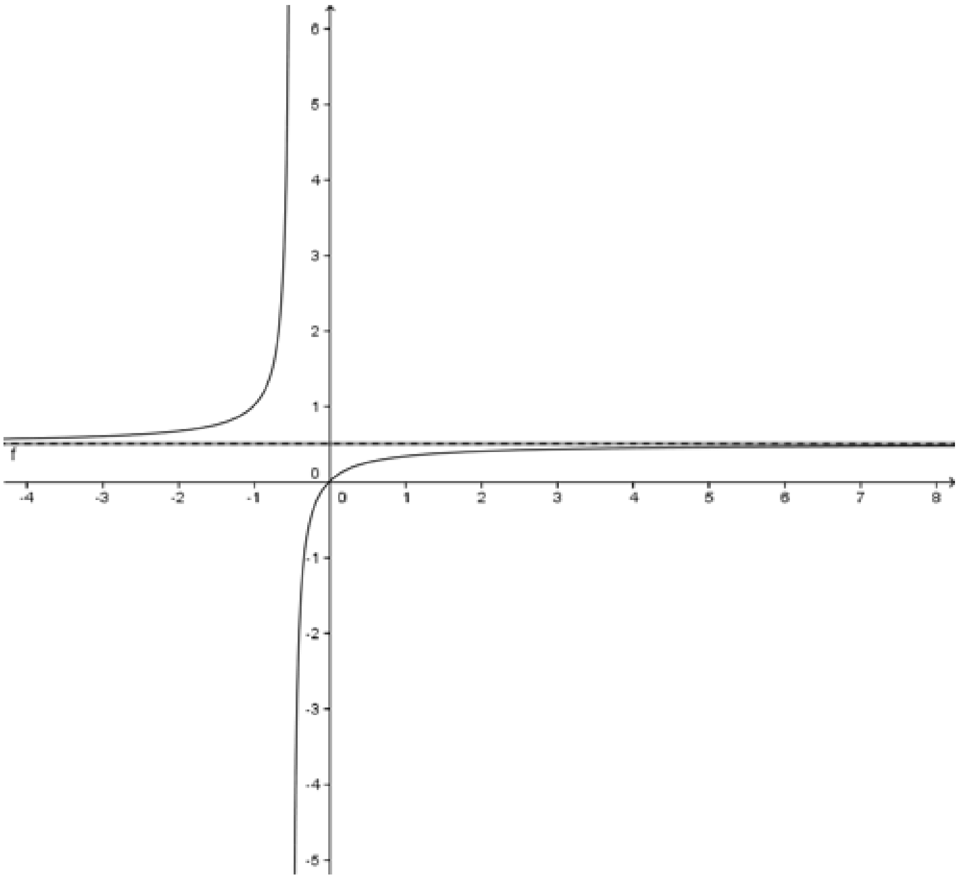


Figura 9: Grafico de $f(x) = \dfrac{x^2-3}{2x^2+x}$.

## 2.5 Propriedades dos Limites no Infinito

Para facilitar o cálculo de limites no infinito, apresentaremos algumas propriedades.

**Proprieadades:**

(a) se $\lim_{x\to\infty} x^n = +\infty$ e $\lim_{x\to\infty} x^n = +\infty$ então
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to+\infty} (f(x).g(x)) = +\infty;$$

(b) se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ então
$$\lim_{x\to+\infty} f(x).g(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x\to+\infty} f(x) - g(x) = +\infty;$$

(c) se $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ então $\lim_{x\to\infty} (c.f(x)) = +\infty$, se $c > 0$; $-\infty$ se $c < 0$ e
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = 0;$$

(d) se $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ então $\lim_{x\to\infty} (c.f(x)) = -\infty$, se $c > 0$; $+\infty$ se $c < 0$ e
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = 0;$$

(e) se $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ então $\lim_{x\to\infty} \left|\frac{1}{f(x)}\right| = +\infty;$

(f) se $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ então
$$\lim_{x\to\infty} (f(x) + g(x)) = -\infty \text{ e } \lim_{x\to\infty} (f(x).g(x)) = +\infty.$$

As propriedades acima permanecem válidas se trocarmos $x \to +\infty$ por $x \to -\infty$.

**Exemplo 2.5.4.** Como $\lim_{x\to+\infty} x^2 - 1$ então $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0$ pela propriedade (d).

## 2.6 Conclusão

Vimos nessa aula o significado de algumas notações que dizem respeita ao comportamento de funções reais quando tais funções crescem ou decrescem ilimitadamente ou quando a variável dependente cresce ou decrescem ilimitadamente. Esta aula completa algumas lacunas deixadas na primeira aula e será bastante útil futuramente, quando estudaremos esboço de gráficos de funções.

## 2.7 Resumo

Nessa aula, vimos que as notações envolvendo o conceito de infinito
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to a} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$
significam, respectivamente, que

1. quando $x$ se aproxima de $a$ ( por valores maiores e menores que zero ) a função $f(x)$ assume valores positivos cada vez maior;

2. quando $x$ se aproxima de $a$ ( por valores maiores e menores que zero ) a função $f(x)$ assume valores negativos cada vez menor;

3. quando $x$ cresce ilimitadamente a função $f(x)$ assume valores cada vez mais próximo de $L$;

4. quando $x$ decresce ilimitadamente a função $f(x)$ assume valores cada vez mais próximo de $L$.

Vimos também que esse limites satisfazem as propriedades listadas nas seções 2.3 e 2.5.

Outras notações introduzidas nessa aula foram

5. $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$
6. $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$
7. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$
8. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

para significarem, respectivamente,

5. Quando $x$ cresce $f(x)$ cresce ilimitadamente.
6. Quando $x$ cresce $f(x)$ decresce ilimitadamente.
7. Quando $x$ decresce $f(x)$ cresce ilimitadamente;
8. Quando $x$ decresce $f(x)$ decresce ilimitadamente.

## 2.8 Atividades

**Atividade 2.8.1.** Mostre, usando a definição que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3} = -\infty.$$

**Atividade 2.8.2.** Calcule

$$\lim_{x \to 3} \frac{x+3}{(x-3)^3}$$

usando o método que você achar conveniente.

## 2.9 Próxima aula

Na próxima aula, usando as noções de limites abordadas nessa e na primeira aula, formalizaremos a noção de função contínua.

## 2.10 Referências Bibliográficas


- STEWART, James. Cálculo. Editora Pioneira, 5º edição, volume 1;

- IEZZI, Gerson; MURAKAM, Carlos; MACHADO, Nilson José. Fundamentos de Matemática Elementar 8. Editora Atual, 3º edição, 1985.

- TAN, S. T. Matemática Aplicada a Administração e Economia. Editora Thomson Learning, segunda edição, São Paulo, 2007.